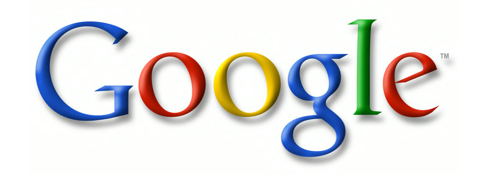


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

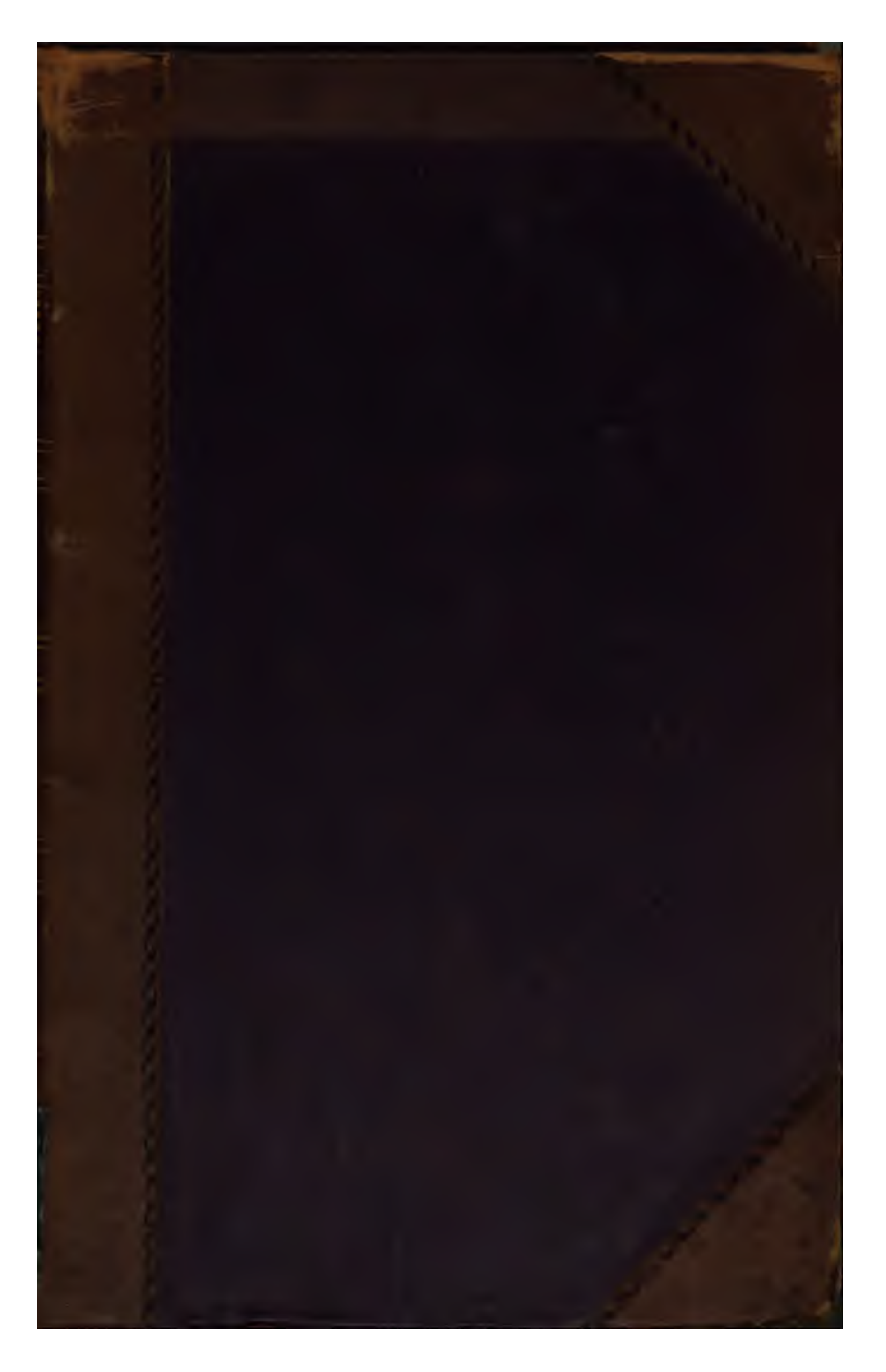
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

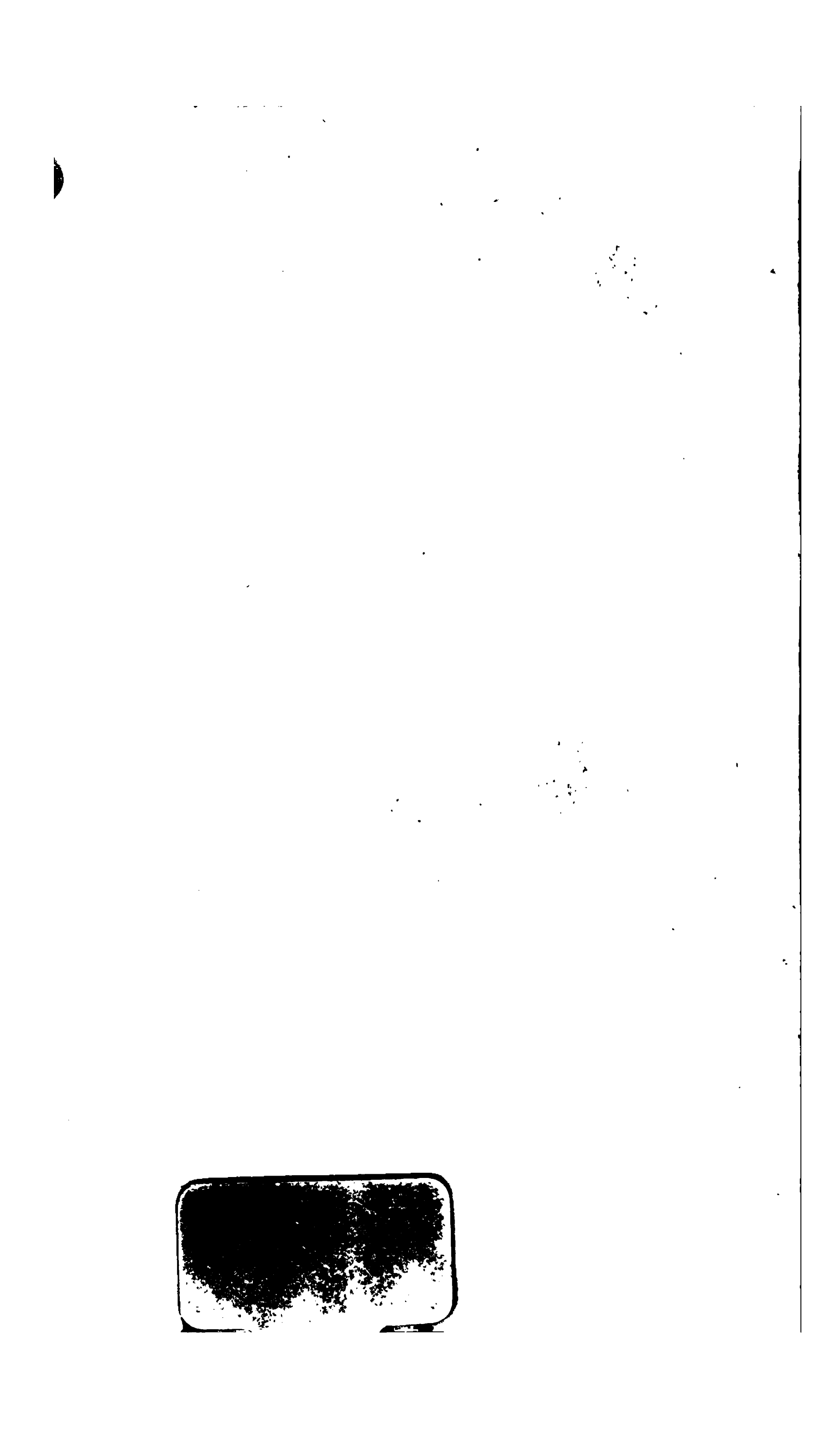
We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/





MANUEL

DES

CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage (tome Ier) a été fait à Paris dans le cours du mois de février 1857, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Mallet-Bachelier

Paris. — Imprimerie de Mallet-Bachelier, rue du Jardinet, 12.

MANUEL
DES CANDIDATS
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR EUGÈNE CATALAN,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, ex-Répétiteur de Géométrie descriptive à cette École, Docteur ès Sciences, Agrégé de l'Université, ex-Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée Saint-Louis, Membre de la Société Philomathique, Correspondant des Académies des Sciences de Toulouse, Lille, Liége, et de la Société d'Agriculture de la Marne.

TOME PREMIER.

ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE, GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS.

Avec 167 figures intercalées dans le texte.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1857

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

157. c. 3.


BIBLIOTHECA · BODLEIANA

AVERTISSEMENT

DU LIBRAIRE-ÉDITEUR.

Le premier volume contient, outre un très-grand nombre d'*Exercices*, le développement de toutes les théories d'*Algèbre*, de *Trigonométrie* et de *Géométrie analytique à deux dimensions*, exigées pour l'admission à l'École Polytechnique, et appartenant, aux termes du Programme officiel, à l'*Enseignement complémentaire*.

Le second volume renferme la *Géométrie analytique à trois dimensions* et la *Mécanique*.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

Pages.

AVERTISSEMENT DU LIBRAIRE-ÉDITEUR v

ALGÈBRE.

CHAPITRE Ier. — Division algébrique 1

Division des monômes 1
Division des polynômes 2
Divisibilité d'un polynôme par un binôme 8

Exercices 9

CHAPITRE II. — Résolution des équations générales du premier degré 10

Équations à trois inconnues 10
Des déterminants 12
Règles de Cramer 15

Exercices 16

CHAPITRE III. — Notions sur les nombres incommensurables 18

CHAPITRE IV. — Complément de la théorie des équations du second degré 22

Discussion de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ 22
Calcul des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, lorsque a est très-petit 25
Équations réductibles au second degré 27
Simplification des radicaux doubles 28
Exemples de problèmes que l'on résout par des équations du second degré, au moyen d'inconnues auxiliaires 30
Des expressions imaginaires 31

Exercices 36

Pages.

CHAPITRE V. — Puissances et racines 38

Calcul des valeurs arithmétiques des radicaux 38
Quelques exemples de réductions 42

Exercices 45

Exposants négatifs, fractionnaires, etc 46
Calcul des exposants 47

CHAPITRE VI. — Notions sur les séries 49

Préliminaires 49
Théorèmes sur la convergence 50
De la série harmonique 52
Suite des théorèmes sur la convergence 54
Exemples de séries 58

Exercices 62

CHAPITRE VII. — Arrangements et combinaisons 63

Définitions 63
Problèmes principaux 64
Permutations avec répétition 67
Triangle arithmétique 68

Exercices 70

CHAPITRE VIII. — Formule du binôme 71

Exercices 76

CHAPITRE IX. — Applications de la formule du binôme. 77

Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ 77
Sommation des puissances semblables des termes d'une progression par différence 82
Sommation des piles de boulets 83

Exercices 86

CHAPITRE X. — Théorie des logarithmes 87

Des fonctions 87
Discussion de la fonction exponentielle 88
Définition algébrique des logarithmes 90
Propriétés des logarithmes 91

Pages.

Concordance des deux définitions des logarithmes........... 92
Comment on passe d'un système à un autre................ 93
Définition du module.................................... 94
Des logarithmes vulgaires............................... 94
Usage des Tables de Callet.............................. 97

Exercices... 100

CHAPITRE XI. — Applications des logarithmes......... 101

Calculs numériques...................................... 101
Résolution des équations exponentielles................. 105
Des intérêts composés et des annuités................... 106

Exercices... 108

CHAPITRE XII. — Théorie des dérivées................ 109

Des fonctions dérivées.................................. 109
Dérivée d'une somme, d'un produit, etc.................. 111
Dérivées des fonctions algébriques...................... 115
Dérivées des fonctions de fonctions..................... 116
Dérivées des fonctions logarithmiques et exponentielles.... 117
Dérivées des fonctions circulaires...................... 119
Dérivées des fonctions circulaires inverses............. 120
Dérivées des fonctions composées........................ 121
Dérivées des fonctions implicites....................... 124
Dérivées successives.................................... 125
Dérivées successives des fonctions implicites........... 125
Théorème de Taylor...................................... 126

Exercices... 129

CHAPITRE XIII. — Application des dérivées à la discussion des fonctions................................ 132

Exercices... 135

CHAPITRE XIV. — Des fonctions primitives............ 135

Préliminaires... 135
Recherche des fonctions primitives...................... 136

CHAPITRE XV. — Séries logarithmiques et circulaires... 138

Développement de $l(1+x)$............................... 138
Développement de $l(1-x)$............................... 140

Pages.

Calcul des logarithmes népériens 141
Calcul du module 143
Calcul des logarithmes vulgaires 143
Développement de arc tang x 145
Calcul du rapport de la circonférence au diamètre 146

Exercices 147

CHAPITRE XVI. — Principes sur les équations algébriques. 148

Préliminaires 148
Composition des coefficients 151
Continuité des fonctions entières 152
Propositions sur l'existence des racines réelles 157
Théorème de Descartes 159

Exercices 163

CHAPITRE XVII. — Transformation des équations. — Limites des racines 163

Limites des racines 167

Exercices 170

CHAPITRE XVIII. — Recherche des racines commensurables 171

Conditions auxquelles satisfont les racines entières 171
Recherche des racines entières 172
Recherche des racines fractionnaires 175

Exercices 177

CHAPITRE XIX. — Des racines communes à deux équations. 178

Exercices 181

CHAPITRE XX. — Théorie des racines égales 182

Préliminaires 182
Réduction d'une équation qui a des racines égales 183

Exercices 185

CHAPITRE XXI. — Résolution des équations du troisième degré 186

Condition de réalité des racines 186
Équations binômes du troisième degré 188

Pages.
Résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$ 190
Discussion de la formule de Cardan 192

Exercices 193

CHAPITRE XXII. — Notions sur le calcul des différences. 193

Principaux problèmes sur les différences 195
Différences des fonctions 198
Construction des Tables numériques 200

Exercices 204

CHAPITRE XXIII. — De l'interpolation 204

Applications de la formule de Newton 207

Exercices 209

CHAPITRE XXIV. — Recherche des racines incommensurables 209

Séparation des racines 210
Calcul des racines 215
Séparation des racines, par la méthode de Newton 221

Exercices 226

CHAPITRE XXV. — Résolution des équations transcendantes 227

Exercices 234

CHAPITRE XXVI. — Décomposition des fractions rationnelles 235

Cas des facteurs inégaux 236
Cas des facteurs égaux 239
Cas des facteurs imaginaires 245
Usage de la décomposition des fractions rationnelles 249

Exercices 251

TRIGONOMÉTRIE.

COMPLÉMENT DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Pages.

CHAPITRE Ier. — Discussion des formules ... 253

Arcs répondant à une ligne trigonométrique donnée ... 253
Applications des formules précédentes ... 254

CHAPITRE II. — Recherche des valeurs des lignes trigonométriques ... 257

Du décagone régulier ... 257
Du pentédécagone régulier ... 259
Valeurs des sinus et cosinus des arcs $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ ... 259
Trisection d'un arc ou d'un angle ... 261

CHAPITRE III. — Application de la trigonométrie à la résolution des équations numériques ... 265

Équation du deuxième degré ... 265
Équation du troisième degré ... 266

Exercices ... 271

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE Ier. — Relations entre les éléments d'un triangle sphérique ... 274

Relation entre les trois côtés et un angle ... 274
Relation entre deux côtés et les deux angles opposés ... 275
Relation entre deux côtés, l'angle compris, et l'un des deux angles opposés ... 276
Relation entre trois angles et un côté ... 277

CHAPITRE II. — Résolution des triangles rectangles ... 277

Pages.

CHAPITRE III. — Résolution des triangles obliquangles. 280

Analogies de Néper. — Formules de Delambre 285
Applications numériques 288

Exercices 291

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE Ier. — Notions préliminaires 293

Introduction 293
De l'homogénéité 295

CHAPITRE II. — Construction des expressions algébriques. 298

Expressions rationnelles 299
Expressions irrationnelles 302
Construction des racines des équations 305

CHAPITRE III. — Problèmes déterminés 308

Exercices 317

CHAPITRE IV. — Théorie des coordonnées 317

Préliminaires 317
Coordonnées rectilignes 318
Equations d'un point 319
Coordonnées polaires 319
Lieu d'une équation 320
Signes des coordonnées 321

CHAPITRE V. — Recherche des équations de quelques lieux géométriques 322

Ligne droite 322

Pages.
Ellipse 323
Hyperbole 324
Parabole 325
Cissoïde 325
Conchoïde 326
Ellipse de Cassini 327
Cycloïde 327
Développante du cercle 329

Exercices 330

CHAPITRE VI. — Construction de quelques équations 331

Exercices 337

CHAPITRE VII. — Théorie des projections 338

CHAPITRE VIII. — Transformation des coordonnées 341

CHAPITRE IX. — Généralités sur les courbes 344

CHAPITRE X. — Théorie de la ligne droite 347

Préliminaires 347
Problèmes sur la ligne droite 350

Exercices 355

CHAPITRE XI. — Classification des lignes du second ordre. 356

Exercices 364

CHAPITRE XII. — Théorie du cercle 365

Exercices 367

CHAPITRE XIII. — Théorie des tangentes 369

Coordonnées rectilignes 369
Coordonnées polaires 372
Problèmes sur les tangentes 373
Application de la théorie des tangentes à la discussion des courbes 375
Application de la théorie des tangentes aux questions de maximums et de minimums 377

Exercices 378

CHAPITRE XIV. — Théorie des asymptotes 379

Préliminaires 379

Pages.
Coordonnées rectilignes.............................. 381
Application au second ordre.......................... 384
Coordonnées polaires................................. 386
Applications... 388

Exercices.. 390

CHAPITRE XV. — Théorie des diamètres................. 391

Recherche des diamètres d'une courbe................. 391
Propriétés des diamètres, dans les courbes du second ordre.. 394
Des axes... 395

CHAPITRE XVI. — Théorie du centre.................... 397
Détermination du centre.............................. 399
Application au second ordre.......................... 399

Exercices.. 401

CHAPITRE XVII. — Réduction de l'équation générale du second degré.. 401

Disparition des termes du premier degré.............. 401
Disparition du rectangle.............................. 402
Équation des courbes à centre........................ 403
Réduction dans le cas de la parabole................. 405
Équation de la parabole.............................. 406

Exercices.. 407

CHAPITRE XVIII. — Théorie de l'ellipse............... 408

Préliminaires.. 408
Exercices.. 410
Des foyers et des directrices........................ 411
Exercices.. 416
De la tangente et de la normale...................... 416
Exercices.. 424
Cordes supplémentaires............................... 425
Exercices.. 427
Diamètres conjugués.................................. 427
Théorèmes d'Apollonius............................... 429
Exercices.. 434
Quadrature de l'ellipse.............................. 435

Pages

CHAPITRE XIX. — Théorie de l'hyperbole 436

Préliminaires 436

Exercices 439

Des foyers et des directrices 439

Exercices 441

Tangente et normale 442

Exercices 446

Cordes supplémentaires 446

Diamètres conjugués 447

Asymptotes 449

Exercices 451

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes 451

CHAPITRE XX. — Théorie de la parabole 452

Préliminaires 452

Du foyer 454

Tangente et normale 456

Exercices 459

Diamètres 459

CHAPITRE XXI. — Quadrature des courbes planes 461

Exercices 464

CHAPITRE XXII. — Équations des courbes du second ordre, en coordonnées polaires 464

Cercle 465

Ellipse 466

Parabole 467

Hyperbole 467

Exercices 469

CHAPITRE XXIII. — Sections coniques et cylindriques 470

Section plane d'un cône de révolution 470

Section d'un cylindre de révolution 474

Section anti-parallèle 474

Pages.

CHAPITRE XXIV. — Du nombre de conditions nécessaires pour déterminer une conique 475

Lieux géométriques 478

Exercices 481

CHAPITRE XXV. — Intersection de deux coniques 482

Applications 485

Exercices 486

CHAPITRE XXVI. — Construction des racines des équations numériques 487

Application aux équations transcendantes 488

Application au quatrième degré 488

Application au troisième degré 489

CHAPITRE XXVII. — Discussion de quelques courbes 490

APPENDICE.

Modification à la méthode de Newton 502

MANUEL

DES

CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ALGÈBRE.

CHAPITRE Ier.

DIVISION ALGÉBRIQUE (*).

Division des monômes.

1. Soit à diviser $15a^7b^8c^5d^3$ par $3a^2b^3c^4d$. Il s'agit de *trouver, s'il est possible, un monôme qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende*. D'après la règle de la multiplication des monômes, le *quotient* cherché sera $\frac{15}{3}a^{7-2}b^{8-3}c^{5-4}d^{3-1}$, ou $5a^5b^5cd^2$. Ainsi, *pour diviser l'un par l'autre deux monômes entiers, on divise le coefficient du dividende par le coefficient du diviseur, et on écrit ensuite toutes les lettres qui entrent dans les deux monômes, en donnant à chacune d'elles un exposant égal à l'excès de son exposant dans le dividende sur son exposant dans le diviseur.*

2. Cette règle est inapplicable dans plusieurs cas (**). On peut la remplacer par celle-ci :

Pour diviser un monôme par un monôme, on met le quotient sous la forme d'une fraction ayant pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur; puis, s'il y a lieu, on simplifie la fraction.

Par exemple, $15a^4b^3c^2 : 3a^2bc^3d = \frac{15a^4b^3c^2}{3a^2bc^3d} = \frac{5a^2b^2}{cd}$.

(*) On trouvera, dans ce chapitre, quelques théories élémentaires que nous n'avons pu développer suffisamment dans notre *Manuel du Baccalauréat ès Sciences.*

(**) L'emploi de l'*exposant zéro* et des *exposants négatifs* la rend générale (*voir* plus loin).

Division des polynômes.

3. Dans la division des polynômes, on se propose de *trouver un polynôme* Q *qui, multiplié par un polynôme donné* B, *reproduise un autre polynôme donné* A : A est le *dividende,* B le *diviseur,* et Q le *quotient.*

Nous ferons, au sujet de cette définition, les remarques suivantes :

1°. Le dividende, le diviseur et le quotient (s'il existe) doivent être composés chacun d'un nombre *fini* de termes ;

2°. Ces polynômes peuvent être fractionnaires, mais ils ne doivent renfermer *aucune fraction à dénominateur polynôme ;*

3°. De même qu'il n'existe pas toujours de nombre entier qui, multiplié par un nombre entier donné, reproduise un autre nombre entier donné, *il peut arriver que le quotient de deux polynômes* A, B, défini comme il vient de l'être, *n'existe pas.* En d'autres termes, *une division proposée peut être impossible.*

Pour justifier la première remarque, il suffit de faire attention que si le dividende, le diviseur et le quotient pouvaient être composés d'un nombre *indéfini* ou *infini* de termes, ces quantités ne seraient plus des polynômes proprement dits.

Quant à la deuxième remarque, nous nous contenterons de faire observer que, sans la restriction qu'elle exprime, *aucune division ne serait impossible.* En effet, on pourrait toujours adopter, pour quotient de A par B, la *fraction* $\frac{A}{B}$.

Enfin, la troisième remarque est une conséquence des deux premières.

4. Ces préliminaires entendus, proposons-nous, pour fixer les idées, de diviser le polynôme

$$A = -5a^3b^2 + 10b^5 + 22a^4b - 46a^2b^3 + 8a^5 - 17ab^4$$

par le polynôme $B = 3a^2b - 5b^3 - 4ab^2 + 2a^3$.

Désignons par Q le quotient : la suite des calculs nous apprendra si ce quotient existe. Si les polynômes étaient ordonnés par rapport aux puissances descendantes de a, le premier terme de A serait égal au produit du premier terme de B par le premier terme de Q (*B.*, *Alg.*, 40) (*). *Il est donc avantageux d'ordonner le dividende*

(*) Ce renvoi signifie : *Manuel du Baccalauréat, Algèbre,* n° 40.

et le diviseur par rapport à une lettre. En outre, on dispose le calcul comme dans la division arithmétique, de cette manière :

$$\begin{array}{lll|l}
 & & 8a^5+22a^4b-5a^3b^2-46a^2b^3-17ab^4+10b^5 & 2a^3+3a^2b-4ab^2-5b^3 \\
 & & -8a^5-12a^4b+16a^3b^2+20a^2b^3 & \overline{4a^2+5ab-2b^2=Q} \\
\hline
1^{\text{er}}\text{ reste.} & R= & 10a^4b+11a^3b^2-26a^2b^3-17ab^4+10b^5 & \\
 & & -10a^4b-15a^3b^2+20a^2b^3+25ab^4 & \\
\hline
2^{\text{e}}\text{ reste.} & R'= & -4a^3b^2-6a^2b^3+8ab^4+10b^5 & \\
 & & +4a^3b^2+6a^2b^3-8ab^4-10b^5 & \\
\hline
3^{\text{e}}\text{ reste.} & R''= & 0 &
\end{array}$$

D'après le théorème rappelé tout à l'heure, le premier terme du quotient égale $\frac{8a^5}{2a^3}$; ce premier terme est donc $4a^2$ (toujours en supposant qu'il y ait un quotient).

Multiplions le diviseur B par $4a^2$, et retranchons de A le produit $8a^5+12a^4b-16a^3b^2-20a^2b^3$: le reste **R** sera égal au produit de **B** par l'ensemble des autres termes du quotient cherché.

On peut, évidemment, raisonner sur R comme on a raisonné sur A; et, en divisant le monôme $10a^4b$, premier terme de R, par $2a^3$, premier terme de B, on trouve le deuxième terme du quotient, etc. En continuant ainsi, on arrive à un dernier reste nul; donc $A = BQ$; donc le polynôme Q est le quotient demandé.

5. Il peut arriver que, le dividende et le diviseur étant ordonnés par rapport à une lettre a, les coefficients des diverses puissances de cette lettre deviennent des polynômes, *fonctions* des autres lettres $b, c, d, \ldots$. Cette circonstance ne modifie en rien les raisonnements précédents; seulement la recherche des divers termes du quotient exigera des *divisions partielles*, dans lesquelles le diviseur, constamment égal au coefficient de la plus haute puissance de a dans le diviseur donné B, pourra être un polynôme.

Soient, par exemple,

$$A=(b^3+c^3)a^4-2bc(b^2-bc+c^2)a^3+(b+c)(b^4-b^2c^2+c^4)a^2$$
$$-bc(b^2+c^2)(b^2+bc+c^2)a+(b+c)(b^6+c^6),$$

$$B=(b^2-bc+c^2)a^2-(b+c)(b^2-bc+c^2)a+b^4-b^2c^2+c^4.$$

Voici comment on dispose le calcul, après avoir effectué les produits indiqués :

$$A = \left\{ \begin{array}{r|l|l|l|l} b^3 & a^4 - 2b^3c & a^3 + b^5 & a^2 - b^5c & a + b^7 \\ +c^3 & + 2b^2c^2 & + b^4c & - b^4c^2 & + b^6c \\ & - 2bc^3 & - b^3c^2 & - 2b^3c^3 & + bc^6 \\ & & - b^2c^3 & - b^2c^4 & + c^7 \\ & & + bc^4 & - bc^5 & \\ & & + c^5 & & \end{array} \right\} \; \frac{\left. \begin{array}{r|l|l} b^2 & a^2 - b^3 & a + b^4 \\ -bc & - c^3 & - b^2c^2 \\ +c^2 & & + c^4 \end{array} \right\} = B}{\left. \begin{array}{r|l|l} b & a^2 + b^2 & a + b^3 \\ +c & + c^2 & + b^2c \\ & & + bc^2 \\ & & + c^3 \end{array} \right\} = C}$$

$$\begin{array}{r|l|l|l} -b^3 & a^4 + b^4 & a^3 - b^5 & a^2 \\ -c^3 & + b^3c & - b^4c & \\ & + bc^3 & + b^3c^2 & \\ & + c^4 & + b^2c^3 & \\ & & - bc^4 & \\ & & - c^5 & \end{array}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{r|l r|l} b^4 & a^3 & - b^5c & a + b^7 \\ - b^3c & & - b^4c^2 & + b^6c \\ + 2b^2c^2 & & - 2b^3c^3 & + bc^6 \\ - bc^3 & & - b^2c^4 & + c^7 \\ + c^4 & & - bc^5 & \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r|l|l|l} - b^4 & a^3 + b^5 & a^2 - b^6 & a \\ + b^3c & + b^3c^2 & - c^6 & \\ - 2b^2c^2 & + b^2c^3 & & \\ + bc^3 & + c^5 & & \\ - c^4 & & & \end{array}$$

$$R' = \left\{ \begin{array}{r|l|l} + b^5 & a^2 - b^6 & a + b^7 \\ + b^3c^2 & - b^5c & + b^6c \\ + b^2c^3 & - b^4c^2 & + bc^6 \\ + c^5 & - 2b^3c^3 & + c^7 \\ & - b^2c^4 & \\ & - bc^5 & \\ & - c^6 & \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r|l|l} - b^5 & a^2 + b^6 & a - b^7 \\ - b^3c^2 & + b^5c & - b^6c \\ - b^2c^3 & + b^4c^2 & - bc^6 \\ - c^5 & + 2b^3c^3 & - c^7 \\ & + b^2c^4 & \\ & + bc^5 & \\ & + c^6 & \end{array}$$

$$R'' = 0$$

Première division partielle.

$$\begin{array}{llll|l} b^3 & & & + c^3 & b^2 - bc + c^2 \\ \cline{5-5} -b^3 & + b^2c & - bc^2 & & b + c \\ \cline{1-4} & + b^2c & - bc^2 & + c^3 & \end{array}$$

Deuxième division partielle.

$$\begin{array}{lllll|l} b^4 & - b^3c & + 2b^2c^2 & - bc^3 & + c^4 & b^2 - bc + c^2 \\ \cline{6-6} -b^4 & + b^3c & - b^2c^2 & & & b^2 + c^2 \\ \cline{1-5} & & + b^2c^2 & - bc^3 & + c^4 & \end{array}$$

Troisième division partielle.

$$\begin{array}{llllll|l} b^5 & & + b^3c^2 & + b^2c^3 & & + c^5 & b^2 - bc + c^2 \\ \cline{7-7} -b^5 & + b^4c & - b^3c^2 & & & & b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 \\ \cline{1-6} & + b^4c & & + b^2c^3 & & + c^5 & \\ & - b^4c & + b^3c^2 & - b^2c^3 & & & \\ \cline{2-6} & & + b^3c^2 & & & + c^5 & \\ & & - b^3c^2 & + b^2c^3 & - bc^4 & & \\ \cline{3-6} & & & + b^2c^3 & - bc^4 & + c^5 & \end{array}$$

6. *Divisions impossibles.* — Avant d'indiquer les *caractères d'impossibilité* de la division, nous ferons les remarques suivantes:

1°. Dans certains cas, on peut être conduit à écrire au quotient un terme fractionnaire, sans que cependant la division soit impossible.

Par exemple, si l'on essaye de diviser $8x^3 - 7x^2 - 28x + 20$ par $12x^3 - 24x^2$, on trouve, pour les deux premiers termes du quotient, $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4x}$; mais on aurait tort de conclure, de la présence de ces fractions, que le calcul ne se terminera pas : en effet, une troisième division partielle donne $-\frac{5}{6x^2}$ pour quotient, et zéro pour reste.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 8 & x^3 - 7 & x^2 - 28x & + 20 & 12x^3 - 24x^2 \\ \cline{5-5} -8 & +16 & & & \frac{2}{3} + \frac{3}{4x} - \frac{5}{6x^2} \\ \cline{1-4} & 9 & x^2 - 28 & x + 20 & \\ & -9 & x^2 + 18 & & \\ \cline{2-4} & & -10 & x + 20 & \\ & & +10 & -20 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

2°. On peut toujours réduire la division de deux polynômes quelconques à la division de deux polynômes ayant chacun leurs termes entiers et premiers entre eux.

Soit à diviser

$$A = \frac{a^2}{2b^2}x^2 - \frac{1}{3}ax + \frac{9}{4a} - \frac{3b^2}{2a^2x}$$

par

$$B = \frac{2a^2}{3b}x + \frac{3b}{ax}.$$

Effectuant la *réduction au plus petit dénominateur commun* (*), on aura

$$A = \frac{1}{12a^2b^2x}(6a^4x^3 - 4a^3b^2x^2 + 27ab^2x - 18b^4) = \frac{A'}{12a^2b^2x},$$

$$B = \frac{1}{3abx}(2a^3x^2 + 9b^2) = \frac{B'}{3abx}.$$

Par suite, le quotient cherché Q s'obtiendra en multipliant le monôme fractionnaire $\frac{3abx}{12a^2b^2x} = \frac{1}{4ab}$ par le quotient Q' des deux polynômes A', B'. Et il est visible que chacun de ces polynômes a ses termes entiers et premiers entre eux. En terminant le calcul, on trouve $Q' = 3ax - 2b^2$; donc $Q = \frac{3ax - 2b^2}{4ab} = \frac{3x}{4a} - \frac{b}{2a}$.

7. Quand le dividende et le diviseur sont ordonnés suivant les *puissances descendantes* d'une lettre, et qu'ils ont été, s'il est nécessaire, *modifiés* comme on vient de le dire, il est bien facile de juger si la division proposée est *impossible*, c'est-à-dire *si le calcul, prolongé aussi loin qu'on le voudra, ne donnera jamais un reste nul*. En effet, *tous les caractères d'impossibilité* sont des corollaires de la proposition suivante, dont nous ne donnons pas la démonstration, parce qu'elle suppose des théories qui ne sont pas comprises dans le Programme (**).

THÉORÈME. — *Les termes du dividende étant entiers* (***), *et les*

(*) *Voyez* la note sur le *plus petit multiple* (B., *Alg.*, 70).

(**) Cette démonstration est fondée sur un théorème dont voici l'énoncé: *Toute quantité première qui divise un produit de deux quantités entières, divise au moins l'une d'elles.*

(***) Il n'est pas nécessaire que les termes du dividende soient premiers entre eux.

termes du diviseur étant entiers et premiers entre eux, la division sera absolument impossible, si le premier terme d'un dividende partiel quelconque n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur.

Voici une application de ce théorème :

Soit à diviser

$$12x^7 + 10x^6 - 7x^5 + 8x^4 + 4x^3 + 2x - 1$$

par

$$2x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r|r|r|r r}
12\,x^7 + 10\,x^6 - 7 & x^5 + 8 & x^4 + 4\,x^3 & & + 2x - 1 \\
-12 \qquad\qquad -18 & +30 & -6 & & \\
\hline
10\,x^6 - 25\,x^5 + 38 & x^4 - 2 & x^3 & & + 2x - 1 \\
-10 \qquad\qquad -15 & +25 & -5x^2 & & \\
\hline
\multicolumn{5}{r}{-25\,x^5 + 23\,x^4 + 23\,x^3 - 5x^2 + 2x - 1}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
2x^4 + 3x^2 - 5x + 1 \\
\hline
6x^3 + 5x^2
\end{array}
\end{array}$$

Le troisième dividende partiel est $-25x^5 + 23x^4 + \ldots$; son premier terme, divisé par $2x^4$, donnerait le quotient *fractionnaire* $-\dfrac{25}{2}x$: la division est impossible.

8. Si le dividende et le diviseur sont ordonnés suivant les *puissances ascendantes* d'une lettre, il peut arriver que l'on obtienne indéfiniment des *quotients partiels entiers*. Mais, dans ce cas, une remarque très-simple permet de reconnaître l'impossibilité de la division. En effet, *si le quotient existe, son dernier terme, multiplié par le dernier terme du diviseur, doit reproduire le dernier terme du dividende*. Par conséquent :

Le dividende et le diviseur étant ordonnés suivant les puissances ascendantes d'une lettre, si l'on est conduit à écrire au quotient un terme dans lequel l'exposant de cette lettre surpasse la différence entre les exposants de cette même lettre dans les derniers termes du dividende et du diviseur, la division est impossible.

Par exemple, $1 + x^2$ n'est pas divisible par $1 + x$, parce que le calcul ne se termine pas à la deuxième division partielle.

$$\begin{array}{r|l}
1 + x^2 & 1 + x \\
\cline{2-2}
-1 - x & 1 - x \\
\cline{1-1}
-x + x^2 & \\
+x + x^2 & \\
\cline{1-1}
2x^2 &
\end{array}$$

9. *Quotients entiers.* — Lorsqu'un dividende et un diviseur entiers, A et B, ordonnés suivant les puissances descendantes d'une lettre, conduisent à un reste R de degré moindre que le diviseur, le polynôme Q, formé par l'ensemble des quotients partiels, porte le nom de *quotient entier*, par analogie avec ce qui a lieu dans la division des nombres entiers. On a en outre, comme dans cette espèce de division,

$$A = B \times Q + R.$$

10. *Remarque.* — Le quotient entier ainsi obtenu peut être fort différent, suivant que les polynômes donnés sont ordonnés par rapport à telle ou telle lettre. Ainsi, en divisant $a^3 - 2a^2b + b^3$ par $a + b$, on trouve

$$Q = a^2 - 3ab + 3b^2, \quad R = -4b^3;$$

mais si l'on divise $b^3 - 2a^2b + a^3$ par $b + a$, on obtient

$$Q = b^2 - ab - a^2, \quad R = 2a^3.$$

Divisibilité d'un polynôme par un binôme.

11. Théorème. — *Le reste de la division d'un polynôme* X, *entier par rapport à* x, *par le diviseur* $x - a$, *est égal au résultat que l'on obtient en remplaçant* x *par* a *dans ce polynôme.*

Concevons que la division soit continuée jusqu'à ce que l'on arrive à un reste indépendant de x; désignons par R ce reste, et par Q le quotient. Nous aurons

$$X = (x - a)Q + R.$$

Dans cette relation, qui doit avoir lieu quel que soit x, remplaçons x par a : le produit $(x - a)Q$ s'annulera, car le facteur $x - a$ devient zéro pour $x = a$, et l'autre facteur est fini; d'ailleurs, le reste R n'aura pas changé. Donc, en désignant par X_a ce que devient X après la substitution, nous aurons

$$X_a = R.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

12. Corollaire. — *Pour que le polynôme* X, *entier par rapport à* x, *soit divisible par* $x - a$, *il faut et il suffit que ce polynôme s'annule quand on y remplace* x *par* a.

13. Problème. — *Effectuer la division du polynôme*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

par le binôme $x - a$.

Soient $B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-2} x + B_{m-1}$ le quotient et R le reste. En multipliant le quotient par $x - a$, ajoutant R et *identifiant* avec le dividende, on trouve

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1 - B_0 a, \quad A_2 = B_2 - B_1 a, \ldots,$$
$$A_{m-1} = B_{m-1} - B_{m-2} a, \quad A_m = R - B_{m-1} a;$$

ou

$$B_0 = A_0, \quad B_1 = B_0 a + A_1, \quad B_2 = B_1 a + A_2, \ldots,$$
$$B_{m-1} = B_{m-2} a + A_{m-1}, \quad R = B_{m-1} a + A_m.$$

Ces dernières valeurs démontrent la règle suivante :

Pour obtenir le coefficient d'un terme quelconque du quotient, on multiplie le coefficient précédent par a et l'on ajoute le coefficient du dividende, de même rang que le coefficient cherché.

Par exemple, la division de

$$3x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 2x - 3$$

par $x + 4$, donne

$$3, \quad -10, \quad +33, \quad -124, \quad +498, \quad -1995;$$

en sorte que le quotient est

$$3x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 124x + 498,$$

et le reste, $\qquad R = -1995.$

EXERCICES.

I. Conclure, du théorème ci-dessus, les propositions suivantes :

1°. *La différence $x^m - a^m$ des puissances semblables de deux quantités est toujours divisible par la différence $x - a$ de ces quantités.*

2°. *La somme $x^m + a^m$ des puissances semblables de deux quantités est divisible par la somme $x + a$ de ces quantités, quand l'exposant m est impair.*

3°. *La différence $x^m - a^m$ des puissances semblables de deux quantités est divisible par la somme $x + a$ de ces quantités, quand l'exposant m est pair.*

II. Comment doit-on prendre le coefficient m, pour que

$$a^3 + b^3 + c^3 - mabc$$

soit divisible par $a + b + c$?

Réponse : $m = 3$.

III. Dans quel cas le trinôme $x^p + 2x^{p-q}y^q + y^p$ est-il divisible par $(x+y)^2$?

Réponse : $p = 2q$.

IV. Pour quelles valeurs de m le polynôme

$$(a+b+c)^m - a^m - b^m - c^m$$

est-il divisible par $(a+b)(b+c)(c+a)$?

Réponse : m impair.

V. m et n étant entiers et premiers entre eux, le polynôme

$$x^{m(n-1)} + x^{m(n-2)} + \ldots + x^m + 1$$

est divisible par

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

VI. Diviser

$$\begin{aligned}&(b^4+b^2c^2+c^4)a^4 + 4(b+c)(b^2+c^2)bca^3\\ &+(b^6-2b^5c+6b^3c^3-2bc^5+c^6)a^2\\ &+2(b+c)(b^4-4b^3c-4bc^3+c^4)bca+(b^8-14b^4c^4+c^8)\end{aligned}$$

par

$$(b^2+bc+c^2)a^2-(b+c)(b^2-bc+c^2)a+(b^4-4b^2c^2+c^4).$$

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU PREMIER DEGRÉ.

Équations à trois inconnues.

14. Considérons d'abord le cas particulier de trois équations entre trois inconnues. Soient

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=d, &(1)\\ a'x+b'y+c'z&=d', &(2)\\ a''x+b''y+c''z&=d'', &(3)\end{aligned}$$

ces équations, $a, b, c, \ldots$ représentant des quantités connues. Pour trouver rapidement les valeurs de x, y, z, multiplions l'équation (1) par une *indéterminée* λ (*), l'équation (2) par une

(*) Ce procédé remarquable, connu sous le nom de *méthode des indéterminées*, est attribué à Bezout.

indéterminée λ', et, de la somme des produits, retranchons l'équation (3); nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned}(\lambda a+\lambda' a'-a'')x+(\lambda b+\lambda' b'-b'')y\\ +(\lambda c+\lambda' c'-c'')z=\lambda d+\lambda' d'-d''.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Quand λ et λ' ont des valeurs quelconques, cette équation (4), qui peut *remplacer une des proposées* (*B.*, *Alg.*, 65), est plus compliquée que chacune d'elles; mais on peut disposer de ces indéterminées de manière à *faire disparaître deux des inconnues,* et à *tirer* de cette même équation (4) *la valeur de la troisième inconnue.* Si, par exemple, nous voulons obtenir la valeur de x, nous poserons

$$\lambda b+\lambda' b'=b'', \quad (5) \qquad \lambda c+\lambda' c'=c''; \quad (6)$$

l'équation (4) nous donnera

$$z=\frac{\lambda d+\lambda' d'-d''}{\lambda c+\lambda' c'-c''}; \quad (7)$$

et il ne restera plus qu'à substituer, dans cette formule, les valeurs de λ et de λ', tirées des équations (5), (6).

Or, la règle connue donne

$$\lambda=\frac{c''b'-b''c'}{cb'-bc'}, \quad \lambda'=\frac{cb''-bc''}{cb'-bc'};$$

donc

$$x=\frac{d(b'c''-c'b'')+d'(b''c-c''b)+d''(bc'-cb')}{a(b'c''-c'b'')+a'(b''c-c''b)+a''(bc'-cb')},$$

ou

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

A cause de la symétrie des équations (1), (2), (3), les valeurs de y et de z se déduisent de la valeur de x par une simple *permutation tournante;* en sorte que les formules cherchées sont

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{d(b'c''-c'b'')+d'(b''c-c''b)+d''(bc'-cb')}{a(b'c''-c'b'')+a'(b''c-c''b)+a''(bc'-cb')},\\ y&=\frac{d(c'a''-a'c'')+d'(c''a-a''c)+d''(ca'-ac')}{b(c'a''-a'c'')+b'(c''a-a''c)+b''(ca'-ac')},\\ z&=\frac{d(a'b''-b'a'')+d'(a''b-b''a)+d''(ab'-ba')}{c(a'b''-b'a'')+c'(a''b-b''a)+c''(ab'-ba')},\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},\\ y &= \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},\\ z &= \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}. \end{aligned}\right\} \quad (9)\ (*)$$

Des déterminants.

15. Avant de passer au cas d'un nombre quelconque d'équations, nous donnerons quelques notions sur les *fonctions alternées* ou *déterminants*.

1°. Avec les lettres a, b, formons les deux *permutations* (**) ab, ba, et interposons le signe —, nous aurons

$$ab - ba.$$

Dans chacun des termes du binôme $ab - ba$, introduisons la lettre c à toutes les places, en commençant par la troisième, et en ayant soin d'effectuer un changement de signe chaque fois que la lettre c change de place *dans un terme*; nous formerons ainsi le polynôme

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Dans chacun des termes de ce polynôme, introduisons la lettre d à toutes les places, en commençant par la quatrième, et en opérant un changement de signe chaque fois que cette lettre change de place dans un terme; nous obtiendrons le polynôme suivant, formé de *vingt-quatre* termes :

$$abcd - abdc + adbc - dabc - acbd + acdb - adbc + \ldots.$$

Dans chacun des termes de ce nouveau polynôme, introduisons la lettre e, etc.

2°. Quel que soit le nombre des termes du polynôme auquel nous nous arrêtons, mettons un *accent* à chaque deuxième lettre, deux

(*) Les formules (8) se prêtent aux applications numériques mieux que les formules (9). En effet, celles-ci nécessitent 42 multiplications, et les autres, seulement 21.

(**) *Voir* plus loin la théorie des *arrangements*, des *permutations* et des *combinaisons*.

accents à chaque troisième lettre, et ainsi de suite; nous obtiendrons les quantités suivantes :

$$ab' - ba',$$
$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$
$$ab'c''d''' - ab'd''c''' + ad'b''c''' - da'b''c''' - ac'b''d''' + ac'd''b''' - \ldots$$

....

La première est le *déterminant* des *quatre* quantités

$$\begin{matrix} a, & b, \\ a', & b'; \end{matrix}$$

la deuxième est le déterminant des *neuf* quantités

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c''; \end{matrix}$$

....

16. Le déterminant Δ des n^2 quantités

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1,\ldots, & k_1, & l_1, \\ a_2, & b_2, & c_2,\ldots, & k_2, & l_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n,\ldots, & k_n, & l_n \end{matrix} (*)$$

donne lieu aux remarques suivantes:

1°. *Si l'on fait abstraction des indices et des signes, les termes de* Δ *sont les permutations que l'on peut former avec les lettres* a, b, $c,\ldots,$ k, l (**).

2°. *Un terme quelconque a le signe* $+$ *ou le signe* $-$ *suivant que ce terme contient un nombre* PAIR *ou un nombre* IMPAIR D'INVERSIONS ALPHABÉTIQUES.

Cette propriété se vérifiant sur les déterminants développés plus haut, il suffit de faire voir que si elle a lieu pour un déterminant

(*) Pour plus de régularité, nous remplaçons les accents par des indices.

(**) On peut conclure de là que le déterminant de n^2 quantités contient un nombre de termes égal à $1.2.3\ldots(n-1)n$. D'ailleurs, chaque terme est un produit de n facteurs; donc le calcul de ce déterminant exigerait $1.2.3\ldots(n-1)n.(n-1)$ multiplications.

dont les termes renferment chacun $n-1$ lettres, elle subsiste pour le déterminant formé de celui-là.

Or, quand on introduit la lettre l à la $n^{\text{ième}}$ place, dans un terme contenant $n-1$ lettres, on n'altère pas le nombre des inversions alphabétiques, mais on conserve le signe de ce terme (15, 1°).

Quand on fait passer la lettre l à la $(n-1)^{\text{ième}}$ place, on introduit *une* inversion. En même temps, on change le signe (15, 1°), de façon que si le terme avait d'abord le signe $+$, c'est-à-dire s'il présentait un nombre *pair* d'inversions, il a ensuite le signe $-$, et il contient un nombre *impair* d'inversions, etc.

3°. *Si, en faisant abstraction des indices, deux termes de* Δ *diffèrent seulement par un simple échange entre deux lettres, ces deux termes sont de signes contraires.*

Pour fixer les idées, considérons deux termes qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres f, c; dans l'un, la lettre c occupe le $p^{\text{ième}}$ rang *avant* la lettre f; dans l'autre, c occupe le $p^{\text{ième}}$ rang *après* f. Pour passer du premier terme au second, il suffit de faire *reculer* la lettre f, en lui faisant occuper successivement p places, et de faire *avancer* ensuite de $(p-1)$ rangs la lettre c. Chaque déplacement introduit ou fait disparaître une inversion; et comme le nombre total de ces déplacements est $2p-1$, c'est-à-dire un nombre *impair*, les deux termes considérés présentent, l'un un nombre pair et l'autre un nombre impair d'inversions. Ils ont donc des signes contraires (2°).

4°. *Si, dans tous les termes de* Δ, *on remplace une lettre par une autre, sans faire le changement inverse, le polynôme* Δ *s'annule.*

Changeons, par exemple, c en f, sans changer f en c. Avant ce changement, le polynôme Δ était composé de binômes différant seulement par l'ordre des lettres c, f; donc, après le changement, les deux termes de chaque binôme sont égaux. De plus, ils ont des signes contraires (3°); donc $\Delta = 0$.

17. Dans le déterminant Δ, groupons tous les termes qui renferment a_1, tous les termes qui renferment $a_2, \ldots$, enfin tous les termes qui renferment a_n. Nous pourrons écrire

$$\Delta = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 - \ldots \pm a_n A_n, \quad (10)$$

en représentant par A_1 un *polynôme qui ne renferme ni la lettre* a *ni l'indice* 1, par A_2 un *polynôme qui ne renferme ni la lettre* a

ni l'indice 2, etc. Semblablement

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = -(b_1 B_1 - b_2 B_2 + b_3 B_3 - \ldots \pm b_n B_n),\\ \Delta = +(c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3 - \ldots \pm c_n C_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Delta = \pm(l_1 L_1 - l_2 L_2 + l_3 L_3 - \ldots \pm l_n L_n):\end{array}\right\}\quad(11)$$

B_1 est un *polynôme qui ne contient ni la lettre b ni l'indice* 1, etc. (*).

18. On conclut de ces valeurs, et de la dernière propriété démontrée ci-dessus (16, 4°),

$$\left.\begin{array}{l}0 = b_1 A_1 - b_2 A_2 + b_3 A_3 - \ldots \pm b_n A_n,\\ 0 = c_1 A_1 - c_2 A_2 + c_3 A_3 - \ldots \pm c_n A_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 0 = a_1 B_1 - a_2 B_2 + a_3 B_3 - \ldots \pm a_n B_n,\\ 0 = c_1 B_1 - c_2 B_2 + c_3 B_3 - \ldots \pm c_n B_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(12)$$

Règles de Cramer.

19. Soit actuellement un système quelconque d'équations du premier degré, en nombre égal à celui des inconnues. Nous pourrons le représenter par

$$\left.\begin{array}{l}a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \ldots + k_1 x_{n-1} + l_1 x_n = u_1,\\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \ldots + k_2 x_{n-1} + l_2 x_n = u_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 + \ldots + k_n x_{n-1} + l_n x_n = u_n.\end{array}\right\}\quad(13)$$

Pour obtenir la valeur de x_1, multiplions la première équation par A_1, la deuxième par $-A_2$, la troisième par A_3, etc., et ajoutons membre à membre. Nous aurons, à cause des relations (12),

$$x_1 = \frac{u_1 A_1 - u_2 A_2 + u_3 A_3 - \ldots \pm u_n A_n}{a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 - \ldots \pm a_n A_n}.\quad(14)$$

(*) **Il est facile de voir que tous ces polynômes sont des déterminants; mais cette propriété est étrangère à notre objet. Le lecteur pourra consulter des *Recherches sur les déterminants*, insérées dans le *Bulletin de l'Académie de Belgique*, tome XIII.**

Le même calcul donne

$$x_2 = \frac{-u_1 B_1 + u_2 B_2 - \ldots \mp u_n B_n}{-b_1 B_1 + b_2 B_2 - \ldots \mp b_n B_n}, \quad (15)$$

$$x_3 = \frac{u_1 C_1 - u_2 C_2 + \ldots \pm u_n C_n}{c_1 C_1 - c_2 C_2 + \ldots \pm c_n C_n}. \quad (16)$$

. . . .

20. Ces valeurs mettent en évidence les deux règles suivantes, découvertes par *Cramer*, et démontrées par Laplace.

Première règle. — *Les valeurs qui vérifient un système quelconque d'équations du premier degré, entre un pareil nombre d'inconnues, ont pour dénominateur commun le déterminant des coefficients des inconnues dans ces équations* (*).

Seconde règle. — *Le numérateur de la valeur de chaque inconnue se déduit du dénominateur commun, en remplaçant le coefficient de cette inconnue par le terme connu correspondant.*

EXERCICES.

I. Étant donné le système

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p = a_1,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{p+1} = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n + x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = a_n,$$

trouver dans quel cas il est déterminé, indéterminé, ou impossible. Quand il est déterminé, quel en est le déterminant, et quelles sont les valeurs des inconnues?

II. Partager une somme a en n parties, de manière que la première égale une somme *inconnue* b, plus $\frac{1}{n}$ du reste, que la deuxième égale b plus $\frac{1}{n}$ du deuxième reste, et ainsi de suite jusqu'à la dernière partie, qui devra être égale à b.

III. n personnes jouant ensemble, les conditions du jeu sont qu'à chaque partie le perdant doublera l'argent de chacun des

(*) Cet énoncé exprime un *théorème* plutôt qu'une *règle*; la véritable règle, celle qui sert à former le déterminant, a été donnée ci-dessus (15).

gagnants. Après n parties, perdues successivement par la première, la deuxième,..., la $n^{ième}$ personne, il reste à chacune d'elles une même somme a. Quelles étaient les mises?

Réponse : La mise du joueur qui a perdu la $p^{ième}$ partie est

$$x_p = \frac{1 + 2^{n-p} n}{2^n} a.$$

IV. Deux vases A et B, dont les capacités sont a et b, contiennent chacun de l'eau et du vin en quantité déterminée. On a deux mesures égales c que l'on plonge en même temps, pour les remplir, l'une dans le vase A, l'autre dans le vase B; après quoi l'on verse dans B ce qu'on a tiré de A, et dans A ce qu'on a tiré de B. On répète cette opération n fois, et l'on demande quelles sont alors les proportions de l'eau et du vin dans chaque vase?

V. D'après le Code civil (art. 757) « le droit de l'enfant naturel est d'un tiers de la portion héréditaire qu'il aurait eue, s'il eût été légitime ». Si une personne laisse l enfants légitimes et n enfants naturels, comment devra-t-on partager sa succession?

Réponse : La part d'un enfant légitime est, en prenant pour unité l'héritage,

$$\frac{1}{l} - \frac{n}{3l(l+1)} + \frac{n(n+1)}{3^2 l(l+1)(l+2)} - \dots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{3^n l(l+1)\dots(l+n)}.$$

VI. Résoudre les équations

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 1,$$
$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

VII. Résoudre

$$x_1 + ax_2 + a^2 x_3 + \dots + a^{n-1} x_n = a^n,$$
$$x_1 + bx_2 + b^2 x_3 + \dots + b^{n-1} x_n = b^n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1 + kx_2 + k^2 x_3 + \dots + k^{n-1} x_n = k^n.$$

VIII. Résoudre

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \quad + x_3 \quad + \ldots + x_n \quad = 1, \\ x_1 + ax_2 \quad + bx_3 \quad + \ldots + lx_n \quad = 0, \\ x_1 + a^2x_2 \quad + b^2x_3 \quad + \ldots + l^2x_n \quad = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + a^{n-1}x_2 + b^{n-1}x_3 + \ldots + l^{n-1}x_n = 0. \end{array}$$

IX. Étant donnée la suite

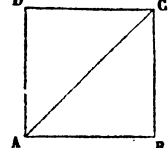
$a+b+c$, $ap+bq+cr$, $ap^2+bq^2+cr^2, \ldots$, $ap^n+bq^n+cr^n, \ldots$,

on demande trois nombres x, y, z tels, qu'un terme quelconque de cette suite soit égal à la somme des trois termes précédents, respectivement multipliés par x, y et z.

CHAPITRE III.

NOTIONS SUR LES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

21. Lorsque deux grandeurs n'ont aucune commune mesure, on dit qu'elles sont *incommensurables*. Par exemple, *la diagonale* AC *et le côté* AB *d'un carré sont deux droites incommensurables entre elles*.



En effet, si AC et AB avaient une plus grande commune mesure, contenue m fois dans AC et n fois dans AB, il en résulterait

$$AC = AB \cdot \frac{m}{n} \quad \text{ou} \quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Mais, dans le triangle rectangle isocèle ABC, $\overline{AC}^2 = 2\,\overline{AB}^2$; donc, par l'égalité précédente,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Cette égalité, dans laquelle m et n *sont deux nombres premiers entre eux*, est absurde, car *une puissance quelconque d'une fraction irréductible est une fraction irréductible* (*B.*, *Arith.*, 128); donc, etc.

La diagonale AC étant incommensurable avec le côté AB, il s'ensuit que, si l'on prend cette dernière droite pour unité de longueur, la ligne AC ne pourra être exprimée ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire : à cause de $\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$, on convient de représenter la diagonale par le symbole $\sqrt{2}$.

22. Toutes les expressions numériques non réductibles à des nombres entiers ou fractionnaires, peuvent toujours être regardées comme représentant des grandeurs incommensurables avec la grandeur prise pour unité : telles sont $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\dfrac{\sqrt[4]{5-\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{3+\sqrt{2}}}$. Par une extension de l'idée attachée au mot *nombre*, on dit que ces expressions sont des *nombres incommensurables* ou *irrationnels*.

23. Comme il serait souvent très-difficile de construire les droites représentées par des nombres incommensurables donnés (*), il est important de définir ceux-ci d'une manière purement arithmétique. Nous prendrons pour exemple l'*irrationnelle* très-simple $\sqrt{2}$: mais nos raisonnements s'appliquent à des incommensurables quelconques.

Remarquons, avant tout, que si l'on disait : *on appelle racine carrée de* 2 *un nombre qui, multiplié par lui-même, reproduit* 2, on commettrait un cercle vicieux; car la définition de la multiplication par $\sqrt{2}$ exige, préalablement, la définition de $\sqrt{2}$. Pour arriver à cette dernière définition, multiplions et divisons le nombre 2 par les puissances successives de 100 (**), en y comprenant l'unité; nous obtiendrons cette suite indéfinie de fractions, toutes égales à 2,

$$\frac{2.1}{1},\quad \frac{2.100}{100},\quad \frac{2.100^2}{100^2},\quad \frac{2.100^3}{100^3},\quad \frac{2.100^4}{100^4},\ \ldots$$

Prenons, par défaut et par excès, la racine carrée de chaque numérateur, et divisons-la par la racine carrée du dénominateur

(*) *Voyez*, sur ce point, la *Géométrie analytique*.

(**) Au lieu des puissances successives de 100, on pourrait prendre les puissances successives d'un carré quelconque, ou même les carrés des nombres naturels. Les raisonnements et les calculs sont plus simples quand on adopte la marche indiquée dans le texte.

correspondant; nous formerons ces deux nouvelles suites

$$1, \quad 1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142,\ldots, \quad (A)$$
$$2, \quad 1,5, \quad 1,42, \quad 1,415, \quad 1,4143,\ldots. \quad (B)$$

Or, évidemment:

1°. Les termes de la suite (A) vont en augmentant;

2°. Les termes de la suite (B) vont en diminuant;

3°. Les différences entre les termes correspondants des deux suites diminuent indéfiniment, de manière à pouvoir devenir moindres que tout nombre donné.

Puisqu'il en est ainsi, et que d'ailleurs *les carrés des termes contenus dans la ligne* (A) *ou dans la ligne* (B) *ont pour limite commune le nombre* 2 (*), ces termes ont eux-mêmes une limite, comprise entre 1 et 2, entre 1,4 et 1,5, entre 1,41 et 1,42,...; cette limite est ce qu'on appelle *racine carrée de* 2. Ainsi, *la racine carrée de* 2 *est la limite des nombres dont les carrés ont pour limite* 2 (**).

24. Les raisonnements précédents peuvent être rendus plus clairs encore par la construction suivante:



Sur une droite xy prenons, à partir d'un point fixe O, les distances OA, OA′, OA″,..., proportionnelles aux nombres 1; 1,4; 1,41;...; et les distances OB, OB′, OB″,..., proportionnelles aux nombres 2; 1,5; 1,42;...: les distances AB, A′B′, A″B″,..., pro-

(*) On a effectivement

$$2-(1,4)^2 < (1,5)^2 - (1,4)^2, \quad \text{ou} \quad 2-(1,4)^2 < 0,1.2,9,$$
$$2-(1,41)^2 < (1,42)^2 - (1,41)^2, \quad \text{ou} \quad 2-(1,41)^2 < 0,01.2,83,$$
$$2-(1,414)^2 < (1,415)^2 - (1,414)^2, \quad \text{ou} \quad 2-(1,414)^2 < 0,001.2,829,$$

etc.;

et, à plus forte raison,

$$2-(1,4)^2 < 0,3, \quad 2-(1,41)^2 < 0,03, \quad 2-(1,414)^2 < 0,003, \quad \text{etc.}$$

(**) Nous avons proposé, il y a déjà bien des années, cette définition; repoussée d'abord, elle a été adoptée depuis.

portionnelles elles-mêmes à 1; 0,1; 0,01,..., auront zéro pour limite. Par conséquent, les points A, A', A",..., d'une part, et les points B, B', B",..., de l'autre, s'approchent indéfiniment d'un certain *point-limite* L, situé entre A et B, entre A' et B', entre A" et B",.... Autrement dit, *les grandeurs* OA, OA', OA",..., *et les grandeurs* OB, OB', OB",..., *mesurées par des nombres dont les carrés ont pour limite* 2, *ont elles-mêmes pour limite une grandeur* OL *que l'on représente par* $\sqrt{2}$.

25. La considération des limites, qui vient de nous conduire à la définition du symbole $\sqrt{2}$, permet également de définir toutes les expressions renfermant des incommensurables. Ainsi, $\sqrt[3]{5}$ *est la limite des nombres dont les cubes ont pour limite* 5 (*); $3-\sqrt{2}$ *est la limite des restes qu'on obtiendrait en retranchant de* 3 *les nombres dont la limite est* $\sqrt{2}$, etc. En particulier :

Le produit d'un nombre A *par un nombre incommensurable* B *est la limite des produits que l'on obtiendrait en multipliant* A *par les nombres dont la limite est* B.

Ainsi l'expression $3\times\sqrt{2}$ représente la limite vers laquelle tendent les produits

$$3\times 1,\quad 3\times 1,4,\quad 3\times 1,41,\quad 3\times 1,414,\ldots.$$

On s'assurerait de l'existence de cette limite, en répétant les raisonnements employés ci-dessus.

26. Cette considération des limites prouve encore simplement que *les théorèmes démontrés pour des nombres commensurables quelconques, subsistent pour les nombres incommensurables limites des premiers.*

Par exemple, *le produit de deux facteurs incommensurables*, A, B, *ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces facteurs.*

Soient, en effet, a, a', a'',... des nombres commensurables ayant pour limite A, et b, b', b'',... des nombres commensurables ayant pour limite B. On a

$$a\times b=b\times a,\quad a'\times b'=b'\times a',\quad a''\times b''=b''\times a'',\ldots.$$

(*) D'après le numéro précédent, il serait encore plus exact de dire : $\sqrt[3]{5}$ *représente la limite des grandeurs mesurées par des nombres dont les cubes ont pour limite* 5.

Mais, *par définition*, la limite des premiers membres est $A \times B$, et la limite des seconds membres est $B \times A$. D'ailleurs, *une même variable ne peut avoir qu'une limite*; donc

$$A \times B = B \times A.$$

CHAPITRE IV.

COMPLÉMENT DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Discussion de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

27. Les racines de cette équation sont données par la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

elles sont *réelles et inégales*, *réelles et égales*, ou *imaginaires*, suivant que le binôme $b^2 - 4ac$ est *positif*, *nul* ou *négatif*.

28. Si, dans la formule générale, on suppose $a = 0$, on trouve

$$x = \frac{-b \pm b}{0},$$

c'est-à-dire

$$x' = \frac{-b + b}{0} = \frac{0}{0}, \quad x'' = \frac{-2b}{0} = \infty.$$

Ainsi, des deux valeurs de x, qui sont *finies et déterminées* tant que le coefficient a diffère de zéro, l'une prend la forme *indéterminée*, et l'autre la forme *infinie*, quand on suppose $a = 0$. Il est facile de rendre raison de ces deux circonstances, et de trouver, non-seulement la *vraie valeur* de x', mais encore le *signe* de x''.

Remarquons d'abord que la discussion dont il s'agit n'aurait pas de sens si elle n'était entendue ainsi : *examiner comment varient les racines de l'équation*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

quand le coefficient a, d'abord supposé très-petit, tend vers zéro (*).

(*) Si, dans l'équation (1), on faisait $a = 0$, en supposant x *fini*, on

Or, les valeurs générales des deux racines sont

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1°. Le numérateur de x'' se réduit à $-2b$ quand $a = 0$; donc, quand ce coefficient a est fort petit, x'' a pour valeur approchée $\frac{-2b}{-2a}$ ou $-\frac{b}{a}$. Cette fraction, qui augmente indéfiniment (en valeur absolue) si a s'approche de zéro, a le signe de b ou le signe contraire, suivant que a est négatif ou positif. D'ailleurs, avant d'attribuer à la variable a sa valeur *limite* zéro, on a pu, conformément à l'usage, supposer cette variable *positive*. Donc, *quand le coefficient a, d'abord supposé positif et très-petit, diminue indéfiniment, la seconde racine de l'équation* (1) *croît au delà de toute limite, en conservant un signe contraire à celui de b* (à partir d'une certaine valeur de a). C'est ce qu'on exprime en disant que *pour* $a = 0$, *cette seconde racine est infinie, et de signe contraire à b* (*).

2°. Quant à la racine x', qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ lorsqu'on suppose $a = 0$, une remarque bien simple permet d'en obtenir la vraie valeur : le numérateur de la fraction $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ s'annulant avec a, *si l'on transforme la fraction de manière à rendre ce numérateur rationnel, il deviendra divisible par a* (**12**); conséquemment, avant d'annuler a, on pourra simplifier la valeur générale de x', de telle sorte qu'elle ne prenne plus la forme $\frac{0}{0}$ quand $a = 0$.

---

obtiendrait l'équation $bx + c = 0$, dont la racine est $-\frac{c}{b}$: cette quantité est la limite de x''. Quant à x', il n'en reste plus de trace.

(*) Si, avant de faire $a = 0$, on avait supposé cette variable négative, on devrait dire que *la valeur infinie de x a le signe de b*. Mais, comme *une quantité ne peut être positive et négative en même temps*, il serait absurde de prétendre que l'équation (1) a trois racines dans le cas particulier où le coefficient de x^2 s'annule.

Pour rendre rationnel le numérateur, il suffit de le multiplier par $b+\sqrt{b^2-4ac}$ (*).

Donc

$$x' = \frac{b^2-4ac-b^2}{2a\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)} = -\frac{4ac}{2a\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}$$

$$= -\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}:$$

telle est la forme sous laquelle on peut mettre la *valeur générale* de x'. Supposant $a=0$, on obtient, pour la *vraie valeur* de la racine qui semblait indéterminée,

$$x' = -\frac{c}{b} \text{ (**)}.$$

29. *Remarque*. — Lorsque les coefficients a, b, c sont des fonctions d'une variable y, et que a s'annule pour $y=\lambda$, le moyen le plus simple de déterminer la vraie valeur de x' consiste à remplacer y par λ dans l'équation proposée. Par exemple,

$$(y^2-1)x^2-2(y^2+y+1)x+y^3-1=0$$

donne

$$x' = \frac{y^2+y+1-\sqrt{y(-y^4+y^3+3y^2+4y+2)}}{y^2-1};$$

et cette fraction devient $\frac{0}{0}$ quand $y=\pm 1$. Pour éviter une trans-

(*) En effet, la *différence* des quantités $\sqrt{b^2-4ac}$ et b, multipliée par leur *somme*, donne pour produit la différence de leurs carrés.

(**) Généralement, si une fraction *algébrique* $\frac{f(x)}{F(x)}$, dont les deux termes ne sont pas rationnels et entiers par rapport à la *variable* x, devient $\frac{0}{0}$ quand on attribue à x une valeur particulière b, *on essayera* de mettre cette fraction sous la forme $\frac{P\varphi(x)}{Q\psi(x)}$, P et Q désignant des polynômes qui s'annulent pour $x=b$, c'est-à-dire des polynômes divisibles par $x-b$ (12). Supprimant ce facteur commun autant de fois que possible, et faisant $x=b$ dans la fraction résultante, on aura la *vraie valeur* de $\frac{F(x)}{f(x)}$, pour $x=b$.

formation assez longue, remplaçons y successivement par ces deux valeurs dans l'équation; nous trouverons

pour $y = +1$, $x' = 0$;
pour $y = -1$, $x' = -1$.

Calcul des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, lorsque a est très-petit.

30. La formule générale

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

est évidemment peu propre aux applications, dans le cas où le coefficient a est fort petit par rapport à b et c. Pour calculer approximativement la valeur de la racine x' qui diffère peu de $-\frac{c}{b}$ (28), on peut employer le procédé suivant : l'autre racine sera donnée par la formule

$$x'' = -\frac{b}{a} - x'.$$

31. L'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

donne

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x^2; \quad (2)$$

et, comme *première approximation*,

$$x_1 = -\frac{c}{b}. \quad (3)$$

Dans le second membre de l'équation (2), remplaçons x par sa valeur approchée x_1; nous aurons, comme *deuxième approximation*,

$$x_2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}. \quad (4)$$

Substituons cette nouvelle valeur dans le second membre de l'équation (2), et négligeons les puissances de a supérieures à la deuxième; nous aurons, comme *troisième approximation*,

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5}. \quad (5)$$

On trouve, semblablement,

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5} - 5\frac{a^3c^4}{b^7} + \ldots \quad (6)$$

Et ainsi de suite (*).

32. *Application. — Calculer, avec 20 décimales exactes, le racines de l'équation* $x^2 - 103\,471\,x + 201 = 0$.

Dans cet exemple, $a = 1$, $b = -103\,471$, $c = 201$. Par suite $\frac{c^4}{b^7} < \frac{200^4}{10^{35}}$ (en valeur absolue). Il suffira donc, pour obtenir l'approximation demandée, d'employer la formule (5). En effectuant on trouve

$$-\frac{c}{b} = \frac{201}{103\,471} = 0{,}001\,942\,573\,281\,402\,518\,580\ldots,$$

$$-\frac{ac^2}{b^3} = \frac{201^2}{103\,471^3} = 0{,}000\,000\,000\,279\,039\,081\,568\ldots,$$

$$-2\frac{a^2c^3}{b^5} = \frac{2.201^3}{103\,471^5} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,010\,477\ldots.$$

La valeur de la première racine est donc, avec 20 décimales exactes,

$$x' = 0{,}001\,942\,573\,560\,441\,610\,62.$$

(*) Ce procédé, connu sous le nom de *méthode des approximations successives*, est à peu près le seul que l'on puisse employer pour résoudre certains problèmes d'astronomie. Dans la question actuelle, il serait avantageusement remplacé par le calcul suivant :

La *formule du binôme* (*voir* plus loin), étendue au cas où l'exposant est fractionnaire, donne

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = b\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= b\left[1 - \frac{1}{2}\frac{4ac}{b^2} - \frac{1}{2.4}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2 - \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^3 - \ldots\right]$$

$$= b - 2\frac{ac}{b} - 2\frac{a^2c^2}{b^3} - 4\frac{a^3c^3}{b^5} - 10\frac{a^4c^4}{b^7} - \ldots.$$

Donc, en prenan' e radical positivement,

$$x' = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5} - 5\frac{a^3c^4}{b^7} - \ldots.$$

On a ensuite, avec le même degré d'approximation,

$$x'' = 103\,470{,}998\,057\,426\,439\,558\,389\,38.$$

Équations réductibles au second degré.

33. Certaines équations, d'un degré supérieur au deuxième, peuvent, par un changement d'inconnue, être ramenées au second degré. Telle est, par exemple, l'équation *bicarrée*

$$x^4 + px^2 + q = 0. \quad (1)$$

Si l'on fait

$$x^2 = y, \quad (2)$$

on a, pour déterminer cette nouvelle inconnue, l'équation

$$y^2 + py + q = 0; \quad (3)$$

d'où

$$y = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}. \quad (4)$$

D'ailleurs, à chacune des valeurs de y correspondent, à cause de l'équation (2), deux valeurs de x, *égales et de signes contraires*. Par conséquent, l'équation (1) a *quatre racines*, données par la formule

$$x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}}. \quad (5)$$

34. Si, par exemple, $p = -5$, $q = 6$, on aura

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}};$$

c'est-à-dire, en prenant successivement les différentes combinaisons de signes,

$$x_1 = +\sqrt{3}, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = +\sqrt{2}, \quad x_4 = -\sqrt{3}.$$

De même, l'équation

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

donne

$$x_1 = +\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}, \quad x_2 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{6}},$$

$$x_3 = +\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}, \quad x_4 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}.$$

Simplification des radicaux doubles.

35. La résolution de l'équation bicarrée conduit quelquefois, comme on vient de le voir par le dernier exemple, à des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. On peut se proposer de remplacer cer *radicaux doubles* par des sommes ou des différences de *radicaux simples*; c'est-à-dire que A, B, a et b représentant des quantités *rationnelles*, on peut essayer de déterminer les deux dernières de manière qu'elles satisfassent à la relation

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}. \quad (1)\ (*)$$

Élevant au carré les deux membres, on obtient d'abord

$$A \pm \sqrt{B} = a + b \pm 2\sqrt{ab}. \quad (2)$$

Cette nouvelle équation se partage nécessairement en deux; c'est-à-dire que

$$A = a + b, \quad \sqrt{B} = 2\sqrt{ab}.$$

Pour le faire voir, *isolons* l'un des radicaux entrant dans l'équation (2), par exemple $\sqrt{B}$, et élevons encore au carré; nous aurons

$$B = (a + b - A)^2 + 4ab \pm 4(a + b - A)\sqrt{ab}. \quad (3)$$

Le premier membre est rationnel, et le second membre ne l'est pas, tant que la quantité $a + b - A$ est différente de zéro : on doit donc, pour satisfaire à l'équation (3), prendre

$$a + b = A; \quad (4)$$

et, par suite,

$$ab = \frac{1}{4}B. \quad (5)$$

Remarquons à présent que les solutions des dernières équations sont

$$a = \frac{1}{2}\left(A + \sqrt{A^2 - B}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(A - \sqrt{A^2 - B}\right).$$

(*) On peut s'assurer, à priori, que le problème est possible dans certains cas. En effet, soit

$$x = \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Si l'on élève au carré, et qu'on extraie ensuite la racine, on trouve

$$x = \sqrt{8 + \sqrt{60}}. \quad \text{Donc} \quad \sqrt{8 + \sqrt{60}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Conséquemment, *la réduction demandée n'est possible que si* $A^2 - B$ *est un carré* C^2. Quand cette condition sera vérifiée, on aura, en prenant les radicaux positivement :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}. \quad (6)$$

36. *Remarque.* — Si $A^2 - B$ n'est pas un carré, on a encore

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \quad (7)$$

Mais le second membre étant plus compliqué que le premier, la transformation est rarement utile.

37. *Applications.* — 1°. Soit $x = \sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}$. On aura

$$A = 5, \quad B = 24, \quad A^2 - B = 1, \quad C = 1;$$

puis, par la formule (6),

$$\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}.$$

Les racines de l'équation traitée ci-dessus (34) ont donc pour valeurs :

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad x_2 = -(\sqrt{3} + \sqrt{2}),$$
$$x_3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \quad x_4 = -(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

2°. L'équation

$$x^4 - 2[2(1+\alpha^2)(1+\beta^2) - (\alpha-\beta)^2]x^2 + (\alpha-\beta)^4 = 0$$

donne
$$x = \pm\sqrt{A^2 \pm \sqrt{B}},$$
en posant

$$A = 2(1+\alpha^2)(1+\beta^2) - (\alpha-\beta)^2, \quad B = 4(1+\alpha\beta)^2(1+\alpha^2)(1+\beta^2).$$

Or
$$A^2 - B =$$
$$(\alpha-\beta)^4 + 4(1+\alpha^2)(1+\beta^2)[(1+\alpha^2)(1+\beta^2) - (\alpha-\beta)^2 - (1+\alpha\beta)^2]$$
$$= (\alpha-\beta)^4;$$

donc
$$C = (\alpha-\beta)^2, \quad \frac{A+C}{2} = (1+\alpha^2)(1+\beta^2),$$
$$\frac{A-C}{2} = (1+\alpha^2)(1+\beta^2) - (\alpha-\beta)^2 = (1+\alpha\beta)^2;$$
et
$$x = \pm\left[\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} \pm (1+\alpha\beta)\right].$$

Exemples de problèmes que l'on résout par des équations du second degré, au moyen d'inconnues auxiliaires.

38. *Trouver deux nombres, connaissant leur somme et la somme de leurs cubes.*

Les équations du problème sont

$$x+y=a, \quad (1) \qquad x^3+y^3=b. \quad (2)$$

Elles donnent

$$(x+y)^3-(x^3+y^3)=a^3-b,$$

ou

$$3xy(x+y)=a^3-b,$$

ou encore, à cause de l'équation (1),

$$xy=\frac{a^3-b}{3}. \quad (3)$$

La somme et le produit des deux nombres cherchés étant connus, le problème peut être regardé comme résolu.

39. *Trouver deux nombres, connaissant leur somme et la somme de leurs quatrièmes puissances.*

Si nous prenons pour *inconnue auxiliaire* le produit des deux nombres, nous aurons à résoudre le système suivant :

$$x+y=a, \quad (1) \qquad x^4+y^4=b, \quad (2) \qquad xy=z. \quad (3)$$

On conclut, des équations (1) et (3) :

$$x^2+y^2=a^2-2z;$$

puis, de cette dernière, combinée avec l'équation (2) :

$$2z^2=(a^2-2z^2)^2-b,$$

ou

$$2z^2-4a^2z+a^4-b=0. \quad (4)$$

Cette équation donne

$$z=a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}.$$

Le produit z ayant deux valeurs, on peut satisfaire aux équations (1) et (2) par les deux systèmes *distincts :*

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}a+\sqrt{-\frac{3}{4}a^2-\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}},\\ y&=\frac{1}{2}a-\sqrt{-\frac{3}{4}a^2-\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}}; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}a^2 + \sqrt{\frac{a^4+b}{2}}}, \\ y = \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}a^2 + \sqrt{\frac{a^4+b}{2}}}. \end{array}\right\}$$

40. *Remarque.* — De ces deux systèmes de valeurs, le second seul pourra être *réel.*

41. *Trouver quatre nombres, connaissant leur somme, leur produit, la somme des inverses des deux premiers, et la somme des inverses des deux derniers.*

Les équations du problème étant

$$\left.\begin{array}{ll} x + x' + y + y' = a, & xx'yy' = b, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = c, & \frac{1}{y} + \frac{1}{y'} = d, \end{array}\right\} \quad (1)$$

prenons, pour inconnues auxiliaires,

$$x + x' = u, \quad y + y' = v, \quad xx' = p, \quad yy' = q; \quad (2)$$

nous aurons, au lieu du système (1),

$$u + v = a, \quad pq = b, \quad u = cp, \quad v = dq. \quad (3)$$

On conclut, des trois dernières équations,

$$uv = bcd.$$

Donc, à cause de $u + v = a$,

$$u = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bcd}, \quad v = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bcd}.$$

On trouve ensuite très-aisément,

$$x = \frac{1}{2}u + \sqrt{\frac{1}{4}u^2 - \frac{u}{c}}, \quad x' = \frac{1}{2}u - \sqrt{\frac{1}{4}u^2 - \frac{u}{c}},$$

$$y = \frac{1}{2}v + \sqrt{\frac{1}{4}v^2 - \frac{v}{d}}, \quad y' = \frac{1}{2}v - \sqrt{\frac{1}{4}v^2 - \frac{v}{d}}.$$

Des expressions imaginaires.

42. Généralisant ce qui a été dit à propos de l'équation $x^2 + px + q = 0$ (*B.*, *Alg.*, **119**, **132**), on appelle *expression*

imaginaire (*), ou simplement *imaginaire*, toute expression de la forme $\alpha \pm \sqrt{-\beta^2}$, dans laquelle le radical porte sur une *quantité essentiellement négative* $(-\beta^2)$.

Si l'on convient d'étendre aux imaginaires les règles démontrées pour les *quantités réelles* (**), on aura

$$\sqrt{-\beta^2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{\beta^2} = \sqrt{-1} \times \beta = \beta\sqrt{-1},$$

et

$$\alpha \pm \sqrt{-\beta^2} = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}:$$

c'est à cette dernière forme que l'on essaye toujours de ramener toute expression qui ne représente pas une quantité réelle.

43. Si, dans l'expression $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, on suppose $\beta = 0$, elle se réduit à α (***). Par conséquent, *les imaginaires comprennent, comme cas particulier, les quantités réelles.*

44. Deux imaginaires sont dites *conjuguées* lorsqu'elles diffèrent seulement par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$: telles sont $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$. *La somme de deux imaginaires conjuguées est toujours réelle.*

45. On appelle *module* d'une expression imaginaire *la racine carrée de la somme des carrés de la partie réelle et du coefficient de* $\sqrt{-1}$, cette racine étant prise *positivement*. Par exemple, le module de $5 + 12\sqrt{-1}$ est $m = +\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. *Deux imaginaires conjuguées ont même module.*

46. Lemme. — *L'équation* $\alpha + \beta\sqrt{-1} = 0$ *se décompose en* $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

En effet, il ne peut s'opérer aucune réduction entre la *quantité* α et le symbole $\beta\sqrt{-1}$.

47. Théorème. — *Pour qu'une expression imaginaire soit nulle, il faut et il suffit que son module soit nul.* 1°. Si l'imaginaire

(*) Nous n'avons pas cru devoir adopter la dénomination de *quantité imaginaire*, bien qu'elle soit employée dans des ouvrages justement estimés. Il nous semble qu'*une expression purement symbolique, qui ne peut représenter aucune grandeur, n'est pas une quantité.*

(**) D'après la note précédente, il suffirait de dire : les règles démontrées pour les *quantités.*

(***) En effet, d'après la convention précédente, $\beta\sqrt{-1} = \sqrt{-\beta^2}$; et $-\beta^2$ s'annule en même temps que β.

$\alpha + \beta\sqrt{-1}$ est nulle, on a

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0\ (46);\quad \text{donc}\quad m^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 0,\quad \text{et}\quad m = 0.$$

2°. Si le module est nul, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$; donc $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

48. *Addition et soustraction des imaginaires.* — En opérant sur les imaginaires comme sur de véritables quantités, on obtient

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1}) + (\alpha'+\beta'\sqrt{-1}) = (\alpha+\alpha') + (\beta+\beta')\sqrt{-1}, \quad (1)$$

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1}) - (\alpha'+\beta'\sqrt{-1}) = (\alpha-\alpha') + (\beta-\beta')\sqrt{-1}. \quad (2)\ (*)$$

49. *Remarque.* — Si la soustraction conduit à un *reste* nul, on a, d'après l'égalité (2) et le lemme (46) : $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. On voit donc, ou plutôt on *vérifie,* que *toute équation de la forme* $A + B\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1}$ *se partage en* $A = A'$ et $B = B'$ (**).

50. *Multiplication des imaginaires.* — Continuons à étendre aux imaginaires les règles ordinaires du calcul, et rappelons-nous que $(\sqrt{-1})^2 = -1$; nous trouverons

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1}) = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\sqrt{-1}. \quad (3)$$

51. *Remarque.* — *Le produit de deux imaginaires conjuguées est égal au carré de leur module.*

52. Théorème. — *Le module d'un produit est égal au produit des modules des facteurs.*

Soient

$$m = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad m' = +\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2},$$

$$M = +\sqrt{(\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2}:$$

il faut prouver que $mm' = M$. Or, en effectuant et réduisant, on trouve

$$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2) = (\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2;$$

donc, etc.

Au moyen d'un raisonnement bien connu, on étend la proposition au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

(*) Les égalités (1) et (2) pourraient être regardées comme des *définitions.*

(**) Cette proposition, qui ne diffère pas essentiellement de la proposition (46), peut aussi se démontrer comme cette dernière.

53. Théorème. — *Pour qu'un produit de facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs soit nul.*

Considérons, pour fixer les idées, le produit

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})(\alpha''+\beta''\sqrt{-1}).$$

Soient m, m', m'' les modules des facteurs, M étant le module du produit. Si ce produit est nul, $M=0$ (47); ou, par le théorème précédent, $mm'm''=0$. Cette dernière égalité, dans laquelle m, m', m'', sont des facteurs réels, exige qu'un d'eux au moins soit nul. Soit m ce facteur nul; alors $\alpha+\beta\sqrt{-1}=0$ (47). C'est ce qu'il fallait démontrer.

54. *Division des imaginaires.* — Soit à diviser $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ par $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$: il s'agit de trouver une imaginaire $x+y\sqrt{-1}$, qui, multipliée par le diviseur, reproduise le dividende.

L'équation

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})$$

se décompose (49) en

$$\alpha=\alpha'x-\beta'y,$$
$$\beta=\beta'x+\alpha'y.$$

Ces deux équations du premier degré donnent

$$x=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2},\qquad y=\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}.$$

Donc

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha'+\beta'\sqrt{-1}}=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}+\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}\sqrt{-1}.$$

55. *Remarque.* — On arrive plus rapidement à ce résultat en multipliant les deux termes de la *fraction* $\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha'+\beta'\sqrt{-1}}$ par l'imaginaire $\alpha'-\beta'\sqrt{-1}$, conjuguée du dénominateur.

56. *Racine carrée d'une imaginaire.* — Pour ramener l'expression $\sqrt{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}$ à la forme $\alpha'\pm\beta'\sqrt{-1}$, il suffit d'employer la relation générale

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

obtenue dans le n° 36, et d'y supposer $A = \alpha$, $B = -\beta^2$. On obtient ainsi

$$\sqrt{\alpha \pm \beta\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}\sqrt{-1}.$$

57. *Remarque.* — *La somme des racines carrées de deux imaginaires conjuguées est toujours réelle.*

58. *Application aux équations bicarrées.* — On a vu, dans le n° 33, que les racines de l'équation

$$x^4 + px^2 + q = 0, \quad (1)$$

sont données par la formule

$$x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}}. \quad (2)$$

Si le binôme $\frac{1}{4}p^2 - q$ est négatif, les deux valeurs de x^2 devenant imaginaires, il y a lieu d'appliquer la transformation donnée ci-dessus (56). Faisant

$$\alpha = -\frac{1}{2}p, \quad -\beta^2 = \frac{1}{4}p^2 - q,$$

on obtient, au lieu des valeurs (2) :

$$x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{-p + 2\sqrt{q}} \pm \sqrt{p + 2\sqrt{q}}.\sqrt{-1}\right). \quad (3)$$

Par exemple, l'équation

$$x^4 + 2x^2 + 3 = 0$$

a pour racines

$$x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}\sqrt{-1}\right).$$

De même, les racines de l'équation

$$x^4 + 1 = 0,$$

c'est-à-dire *les quatre valeurs de* $\sqrt[4]{-1}$, sont données par la formule

$$x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{2}.\sqrt{-1}\right),$$

que l'on peut réduire à

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\left(1 \pm \sqrt{-1}\right).$$

59. *Remarque.* — La formule (3) étant assez compliquée, il serait utile, pour soulager la mémoire, de pouvoir la retrouver rapidement, dans chaque cas particulier. C'est à quoi l'on parvient par la méthode suivante :

Après avoir transposé le terme px^2, ajoutons aux deux membres de l'équation (1) la quantité $2x^2\sqrt{q}$: le premier membre deviendra $\left(x^2+\sqrt{q}\right)^2$; en sorte que nous aurons

$$\left(x^2+\sqrt{q}\right)^2 = x^2\left(-p+2\sqrt{q}\right);$$

ou, en extrayant les racines des deux membres,

$$x^2+\sqrt{q} = \pm x\sqrt{-p+2\sqrt{q}}.$$

L'équation proposée est donc *remplacée* par les deux équations du second degré :

$$x^2 - x\sqrt{-p+2\sqrt{q}}+\sqrt{q} = 0, \quad (5)$$
$$x^2 + x\sqrt{-p+2\sqrt{q}}+\sqrt{q} = 0. \quad (6)$$

La formule ordinaire, appliquée à ces deux équations, reproduit les valeurs (3).

60. *Remarque.* — En multipliant membre à membre ces dernières équations, on retombe sur la proposée (1), c'est-à-dire que

$$x^4+px^2+q$$
$$= \left(x^2 - x\sqrt{-p+2\sqrt{q}}+\sqrt{q}\right)\left(x^2 + x\sqrt{-p+2\sqrt{q}}+\sqrt{q}\right).$$

Il est donc facile de *décomposer le trinôme* x^4+px^2+q *en deux facteurs réels du second degré* (*). Par exemple,

$$x^4+1 = \left(x^2 - x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2}+1\right).$$

EXERCICES.

I. Dans quel cas les racines de l'équation $x^4+px^2+q=0$

(*) A cause de $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$, on a $q > 0$ et $-p+2\sqrt{q} > 0$.

sont-elles réductibles à la forme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, p, q, a et b étant rationnels?

Réponse : Lorsque q est un carré.

II. Dans quel cas l'équation

$$\sqrt{A+\alpha\sqrt{B}}+\sqrt{A'+\alpha'\sqrt{B}}=\sqrt{A''+\alpha''\sqrt{B}}$$

est-elle possible?

Réponse : Quand on a, en même temps,

$$(A''-A'-A)(\alpha''-\alpha'-\alpha)-2(A\alpha'+A'\alpha)=0,$$

$$(A''-A'-A)^2-4AA'+[(\alpha''-\alpha'-\alpha)^2-4\alpha\alpha']B=0.$$

III. Réduire, à un radical double, l'expression

$$4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-\sqrt{170-26\sqrt{17}}\ (*).$$

Résultat : $\sqrt{170+38\sqrt{17}}$.

IV. Trouver deux nombres, connaissant leur somme et la somme de leurs cinquièmes puissances.

V. Trouver quatre nombres en progression par quotient, connaissant leur somme et la somme de leurs carrés.

VI. Trouver quatre nombres en proportion, connaissant leur somme, la somme de leurs cubes, et la somme de leurs cinquièmes puissances.

VII. Trouver cinq nombres en progression par différence, connaissant leur somme et la somme de leurs inverses.

VIII. Déterminer une proportion, connaissant la somme des moyens, la somme des extrêmes, et la somme des carrés des quatre termes.

IX. Résoudre les équations

$$(x+y)(1+xy+x^2y+xy^2+x^2y^2)+xy=a,$$

$$xy(x+y)(x+y+xy)(x+y+xy+x^2y+xy^2)=b.$$

X. Le module de la somme de deux expressions imaginaires est compris entre la somme et la différence de leurs modules.

(*) On rencontre cette valeur quand on cherche à *inscrire, dans un cercle donné, un polygone régulier de trente-quatre côtés*. (*Voyez* les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire.*)

XI. Le produit de plusieurs nombres égaux chacun à la somme de deux carrés est égal à la somme de deux carrés.

XII. Décomposer le produit 13.37.61 en deux carrés, de *quatre* manières différentes.

CHAPITRE V.

PUISSANCES ET RACINES.

Calcul des valeurs arithmétiques des radicaux.

61. On sait (*B.*, *Alg.*, 119) que la racine carrée d'une quantité quelconque a toujours deux valeurs égales et de signes contraires. Plus généralement : 1° *l'expression* $\sqrt[m]{B}$ *a m valeurs différentes* (*) ; 2° *si* A *est une quantité positive, une de ces valeurs est réelle et positive.*

Cette *valeur arithmétique* de $\sqrt[m]{A}$ est celle dont il a été question dans le chapitre III (25), c'est-à-dire que *la valeur arithmétique de la racine* $m^{ième}$ *d'un nombre* A *est la limite des nombres dont les puissances* $m^{ièmes}$ *ont pour limite* A.

Avant de passer en revue les règles de calcul relatives aux radicaux considérés de cette manière, nous allons établir quelques propositions sur les puissances et les racines.

62. Théorème. — *Une puissance quelconque d'un produit est égale au produit des mêmes puissances des facteurs.*

Par exemple, $(abcd)^3 = a^3.b^3.c^3.d^3$.

En effet, d'après la règle de la multiplication des monômes (*B.*, *Alg.*, 29),

$$(abcd)^3 = a^{1+1+1}\,b^{1+1+1}\,c^{1+1+1}\,d^{1+1+1} = a^3b^3c^3d^3.$$

63. *Remarques.* — I. Dans le cas particulier où les facteurs a, b, c, d seraient égaux entre eux, on aurait

$$(a^4)^3 = a^4.a^4.a^4 = a^{4+4+4} = a^{4.3};$$

et, en général, $$(a^m)^p = a^{mp}.$$

II. $$(a^m)^p = (a^p)^m.$$

(*) *Voir* le chapitre XV.

64. Corollaire. — *Pour élever un produit à une puissance, on multiplie, par l'exposant de cette puissance, les exposants des facteurs.*

Par exemple, $(2a^3b^2c)^5 = 2^5a^{15}b^{10}c^5$.

65. *Addition et soustraction des radicaux semblables.* — Deux *radicaux semblables* sont ceux qui diffèrent seulement par leurs coefficients (*B., Alg.*, 9). De cette définition on conclut immédiatement que, *pour ajouter ou retrancher des radicaux semblables, on les réduit en un seul, dont le coefficient est égal à la somme ou à la différence de leurs coefficients* (*). Ainsi

$$3\sqrt[3]{a^2b} - 5\sqrt[3]{a^2b} = -2\sqrt[3]{a^2b},$$

$$m\sqrt[7]{ab^3} + n\sqrt[7]{ab^3} - p\sqrt[7]{ab^3} = (m+n-p)\sqrt[7]{ab^3}; \text{ etc.}$$

66. *Multiplication des radicaux de même indice.* — La règle de la multiplication des radicaux de même indice consiste dans la relation suivante :

$$\sqrt[m]{A}\,.\,\sqrt[m]{B}\,.\,\sqrt[m]{C}\ldots = \sqrt[m]{ABC\ldots}, \quad (1)$$

que l'on peut énoncer ainsi :

La racine d'un produit est égale au produit des racines des facteurs.

Pour démontrer l'égalité (1), élevons les deux membres à la puissance m ; nous aurons

$$(\sqrt[m]{A}\,.\,\sqrt[m]{B}\,.\,\sqrt[m]{C}\ldots)^m = ABC\ldots.$$

Mais, par le théorème ci-dessus (62), *qui subsiste pour les quantités incommensurables* (26) :

$$(\sqrt[m]{A}\,.\,\sqrt[m]{B}\,.\,\sqrt[m]{C}\ldots)^m = (\sqrt[m]{A})^m(\sqrt[m]{B})^m(\sqrt[m]{C})^m\ldots = ABC\ldots.$$

Les puissances $m^{\text{ièmes}}$ des nombres qui forment les deux membres de la relation (1) *étant égales, ces deux nombres sont égaux* (**). C'est ce qu'il fallait démontrer.

(*) On verra tout à l'heure comment on peut, dans certains cas, rendre semblables des radicaux de formes différentes.

(**) En effet, ces nombres sont les limites de nombres égaux. Si, au lieu des valeurs arithmétiques, on considérait les *valeurs algébriques* des radicaux, on ne pourrait plus rien conclure. Par exemple, $(+2)^4 = (-2)^4$, quoique $+2$ et -2 soient des quantités inégales.

67. *Division des radicaux de même indice.* — De l'identit[é]
$B \times \frac{A}{B} = A$, on conclut, par la règle précédente,

$$\sqrt[m]{B}\sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \sqrt[m]{A};$$

et, par la définition de la division,

$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}}. \quad (2)$$

Ainsi, *pour diviser deux radicaux de même indice, on divise les quantités placées sous les radicaux, et on affecte leur quotient du radical commun;* ou encore : *la racine $m^{ième}$ d'une fraction est égale au quotient des racines $m^{ièmes}$ des deux termes.*

68. *Puissances des radicaux.* — Si, dans la relation (1), on suppose $A = B = C \ldots$, on trouve, p étant le nombre des facteurs égaux,

$$(\sqrt[m]{A})^p = \sqrt[m]{A^p}. \quad (3)$$

Donc, *pour élever un radical à une puissance, on élève à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

69. *Racines des radicaux.* — En renversant la règle précédente, on conclut que

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{A}}. \quad (4)$$

Ainsi, *pour extraire la racine d'un radical, on extrait la racine de la quantité placée sous le radical.*

Par exemple,

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^3 b^6 c^{12}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^3 b^6 c^{12}}} = \sqrt[5]{a b^2 c^4}.$$

70. *Remarque.* — Si l'on élève à la puissance mp les deux membres de l'égalité (4), on obtient l'identité $A = A$. Donc

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{A}} = \sqrt[mp]{A}. \quad (5)$$

Par conséquent, *on peut extraire la racine d'un radical en multipliant l'indice de ce radical par l'indice de la racine à extraire.*

71. *Simplification des radicaux.* — I. Si, dans la formule (1), on réduit à deux le nombre des facteurs, et qu'on remplace A par

A^m, on aura

$$\sqrt[m]{A^m B} = A\sqrt[m]{B}. \quad (6)$$

Ce résultat s'énonce ainsi : *Lorsque la quantité soumise au radical peut être décomposée en deux facteurs, dont l'un soit une puissance ayant pour degré l'indice du radical, on extrait la racine de ce facteur, et on la multiplie par la racine* (indiquée) *de l'autre facteur.*

On peut dire encore avec plus de concision : *Pour faire sortir un facteur de dessous un radical, on en extrait la racine.*

Par exemple,

$$\sqrt[5]{64a^8b^{17}c^4} = \sqrt[5]{(2^5a^5b^{15})(2a^3b^2c^4)} = 2ab^3\sqrt[5]{2a^3b^2c^4}.$$

II. De $\sqrt[mp]{A} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{A}}$ (5), on conclut, en remplaçant A par A^{np},

$$\sqrt[mp]{A^{np}} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{A^{np}}},$$

ou

$$\sqrt[mp]{A^{np}} = \sqrt[m]{A^n}. \quad (7)$$

On peut donc *diviser* (ou multiplier), *par un même nombre, l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical.*

72. Au moyen de la première simplification, on peut quelquefois rendre semblables des radicaux de formes différentes. Soit proposé, par exemple, de réduire

$$x = 3\sqrt[3]{a^5bc} + 5\sqrt[3]{a^2b^4c} - 2\sqrt[3]{a^2bc^4}.$$

Appliquant la formule (6), on aura

$$\sqrt[3]{a^5bc} = a\sqrt[3]{a^2bc}, \quad \sqrt[3]{a^2b^4c} = b\sqrt[3]{a^2bc}, \quad \sqrt[3]{a^2bc^4} = c\sqrt[3]{a^2bc};$$

donc

$$x = (3a + 5b - 2c)\sqrt[3]{a^2bc}.$$

73. *Réduction à un indice commun.* — La relation (7) permet de *réduire à un même indice plusieurs radicaux.* Soient, pour fixer les idées, les trois quantités

$$\sqrt[m]{A}, \quad \sqrt[n]{B}, \quad \sqrt[p]{C}.$$

En appliquant à chacune d'elles la transformation dont il s'agit, on obtient

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[mnp]{A^{np}}, \quad \sqrt[n]{B} = \sqrt[mnp]{B^{mp}}, \quad \sqrt[p]{C} = \sqrt[mnp]{C^{mn}}.$$

74. *Remarque.* — Ce calcul est tout à fait semblable à celui que l'on effectue pour *réduire à un même dénominateur plusieurs fractions données*. Par suite de cette analogie, *si, après avoir simplifié chaque radical, on cherche le plus petit multiple des nouveaux indices, ce plus petit multiple sera le plus petit indice commun* (*Arith.*, 114).

75. Proposons-nous, par exemple, de réduire au plus petit indice commun les radicaux suivants :

$$a = \sqrt[24]{2^{15}},\quad b = \sqrt[30]{2^{18}},\quad c = \sqrt[72]{2^{40}},\quad d = \sqrt[80]{2^{18}},\quad e = \sqrt[90]{2^{25}}.$$

Divisant par leur plus grand commun diviseur l'indice de chaque radical et l'exposant correspondant, nous aurons d'abord

$$a = \sqrt[8]{2^5},\quad b = \sqrt[5]{2^3},\quad c = \sqrt[9]{2^5},\quad d = \sqrt[40]{2^9},\quad e = \sqrt[18]{2^5}.$$

Le plus petit multiple des nombres 8, 5, 9, 40 et 18, est 360; donc

$$a = \sqrt[360]{2^{225}},\quad b = \sqrt[360]{2^{216}},\quad c = \sqrt[360]{2^{200}},\quad d = \sqrt[360]{2^{81}},\quad e = \sqrt[360]{2^{100}}.$$

76. *Application à la multiplication et à la division des radicaux.* — Après que les radicaux donnés ont été réduits à un même indice, on peut leur appliquer les règles de la multiplication ou de la division (66, 67). Par exemple, si P désigne le produit des quantités a, b, c, d, e, considérées tout à l'heure, nous aurons

$$P = \sqrt[360]{2^{225}.2^{216}.2^{200}.2^{81}.2^{100}} = \sqrt[360]{2^{822}} = \sqrt[60]{2^{137}} = 4\sqrt[60]{2^{17}}.$$

Ainsi

$$\sqrt[8]{2^5}.\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[9]{2^5}.\sqrt[40]{2^9}.\sqrt[18]{2^5}. = 4\sqrt[60]{2^{17}}.$$

Quelques exemples de réductions.

77. L'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ peut souvent servir à simplifier les expressions fractionnaires qui renferment, en dénominateur, des sommes de radicaux du second degré, simples ou composés. Les exemples suivants suffiront pour montrer comment s'opèrent ces réductions :

$$1^\circ.\quad \frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})} = \frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{A-B}.$$

2°. $$\frac{A+\sqrt{B}}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = \frac{(A+\sqrt{B})\sqrt{A+\sqrt{B}}}{\sqrt{A^2-B}}$$
$$= \frac{(A+\sqrt{B})\sqrt{(A+\sqrt{B})(A^2-B)}}{A^2-B}.$$

3°. Dans l'exemple précédent, si A et B sont *donnés en nombres*, il peut être utile de *faire passer* le facteur $(A+\sqrt{B})$ sous le grand radical. Développant $(A+\sqrt{B})^2$, on obtient

$$\frac{A+\sqrt{B}}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = \frac{\sqrt{[A^3+3AB+(3A^2+B)\sqrt{B}](A^2-B)}}{A^2-B}.$$

4°. La même transformation donne, par le changement de $\sqrt{B}$ en $-\sqrt{B}$,

$$\frac{A-\sqrt{B}}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} = \frac{\sqrt{[A^3+3AB-(3A^2+B)\sqrt{B}](A^2-B)}}{A^2-B}.$$

5°. Soit x la somme des expressions *conjuguées* $\frac{A+\sqrt{B}}{\sqrt{A-\sqrt{B}}}$, $\frac{A-\sqrt{B}}{\sqrt{A+\sqrt{B}}}$. On aura

$$x^2 = \frac{2(A^3+3AB)}{A^2-B} + 2\frac{\sqrt{(A^3+3AB)^2-(3A^2+B)^2B}}{A^2-B}$$
$$= 2\frac{A^3+3AB+\sqrt{(A^2-B)^3}}{A^2-B};$$

et, conséquemment,

$$\frac{A+\sqrt{B}}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} + \frac{A-\sqrt{B}}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} = \sqrt{2\left(A+4\frac{AB}{A^2-B}+\sqrt{A^2-B}\right)}.$$

Par exemple,

$$\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3-\sqrt{6}}} + \frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}} = \sqrt{54+2\sqrt{3}}.$$

78. Quand une expression fractionnaire renferme, en dénominateur, des radicaux de degré supérieur au second, il devient

quelquefois difficile de la transformer en une autre dont le dénominateur soit rationnel. Voici deux cas simples.

1°. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}$. Si l'on se rappelle que

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2,$$

et si l'on suppose $a = \sqrt[3]{A}$, $b = \sqrt[3]{B}$, on aura

$$x = \frac{(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B} + (\sqrt[3]{B})^2}{A - B},$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}} = \frac{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A - B}.$$

2°. Pour transformer $x = \frac{1}{\sqrt[3]{A} - \sqrt{B}}$, on réduit d'abord les deux radicaux au plus petit indice commun (73); ce qui donne $x = \frac{1}{\sqrt[6]{A^2} - \sqrt[6]{B^3}}$. Posant ensuite $a = \sqrt[6]{A^2}$, $b = \sqrt[6]{B^3}$, et multipliant les deux termes de x par $a^5 + a^4 b + \ldots + b^5$ (*B. Alg.*, 43), on obtient, après quelques réductions,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{A} - \sqrt{B}} = \frac{A\sqrt[3]{A^2} + A\sqrt[6]{A^2B^3} + AB + B\sqrt[6]{A^4B^3} + B^2\sqrt[3]{A} + B^2\sqrt{B}}{A^2 - B^3}.$$

Malheureusement, la seconde expression est plus compliquée que la première.

79. Soit proposé de réduire

$$x = \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}. \quad (1)$$

A cause de $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, on aura

$$x^3 = 2A + 3\sqrt[3]{A^2 - B}\left(\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}\right);$$

c'est-à-dire

$$x^3 = 2A + 3\sqrt[3]{A^2 - B}.x.$$

Ainsi l'expression (1) est racine de l'équation

$$x^3 - 3\sqrt[3]{A^2 - B}.x - 2A = 0 \; (*). \quad (2)$$

(*) Cette simple remarque, développée, donne la résolution des équations du troisième degré.

Réciproquement, quand on saura déterminer les racines de cette équation, on aura résolu la question proposée.

Soient, par exemple, $A = 20$, $B = 392$. L'équation (2), qui devient

$$x^3 - 6x - 40 = 0,$$

a pour racine réelle le nombre 4; donc

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = 4.$$

80. Un calcul semblable au précédent montre que la quantité

$$\sqrt[3]{\frac{A + \sqrt{B}}{A - \sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A - \sqrt{B}}{A + \sqrt{B}}}$$

est racine de l'équation

$$x^3 - 3x - 2\frac{A^2 + B}{A^2 - B} = 0.$$

En particulier, $\sqrt[3]{\dfrac{1 + \sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}}} + \sqrt[3]{\dfrac{1 - \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}}$ vérifie l'équation

$$x^3 - 3x - 2\frac{1 + m}{1 - m} = 0.$$

EXERCICES.

I. Transformer l'expression $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$ en une autre dont le dénominateur soit rationnel.

II. Même recherche pour l'expression $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5}}$.

III. Plus généralement, transformer les expressions

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a + b}}, \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{(a + b)}},$$

en deux autres dont les dénominateurs soient rationnels.

IV. Simplifier la quantité $\dfrac{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{b^4}}$.

V. Dans quel cas l'expression $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ est-elle réductible à la forme $a + \sqrt{b}$?

Réponse : Lorsque $A^2 - B$ est un cube C^3, et qu'en même temps l'équation

$$x^3 - 3Cx - 2A = 0$$

a une racine commensurable (*).

VI. Vérifier la relation

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} = x,$$

dans laquelle on suppose $x \geqq 2$.

VII. Connaissant $A_1 = 2\sqrt{2}$, $A_2 = 2^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, calculer A_3, A_4, $A_5, \ldots$ au moyen de la formule

$$(A_n)^2 = 2\frac{(A_{n-1})^3}{A_{n-1} + A_{n-2}}.$$

Résultat :

$$A_3 = 2^3\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad A_4 = 2^4\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \ldots \text{(**)}.$$

Exposants négatifs, fractionnaires, etc.

81. *Exposant zéro.* — D'après la règle de la division des monômes (1), le quotient de a^m par a^m serait a^{m-m} ou a^0. Si l'on part de la définition arithmétique des exposants, on ne peut attacher aucun sens à cette expression a^0. Mais comme, d'un autre côté, $\frac{a^m}{a^m} = 1$, on peut convenir que a^0 *représentera l'unité.* Cette convention permet de conserver, jusqu'à la fin d'un calcul, la trace d'une lettre qui aurait disparu par les réductions.

82. *Exposants négatifs.* — Si l'on avait à diviser a^m par a^{m+p}, la règle ordinaire (1) donnerait, pour expression du quotient, a^{m-m-p} ou a^{-p}. Ce qui vient d'être dit de l'exposant zéro s'ap-

(*) *Voir* le chapitre XVI.

(**) Les quantités $A_1, A_2, A_3, \ldots$, représentent les aires des polygones réguliers de 4, 8, 16, ... côtés, inscrits au cercle de rayon 1. (*Théorèmes et problèmes de Géométrie*, page 200.)

plique, à plus forte raison, à l'*exposant négatif* $(-p)$: *à priori*, il n'a pas de signification. Mais $\frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1}{a^p}$. Donc nous pouvons admettre que *a^{-p} représentera $\frac{1}{a^p}$*.

83. *Exposants fractionnaires.* — Le calcul des radicaux conduit à cette nouvelle espèce d'exposants, absolument comme la division des monômes a donné naissance à l'exposant zéro et aux exposants négatifs. En effet, lorsque $p = mq$, on a (69)

$$\sqrt[m]{a^p} = a^q = a^{\frac{p}{m}}.$$

Si l'exposant p de la quantité placée sous le radical n'est pas divisible par l'indice m du radical, l'expression $a^{\frac{p}{m}}$ n'a plus de signification : on peut donc convenir qu'elle continuera de représenter $\sqrt[m]{a^p}$, ou que *les deux expressions* $\sqrt[m]{a^p}$, $a^{\frac{p}{m}}$ sont équivalentes.

84. *Exposants incommensurables.* — Afin d'abréger, nous nous bornerons, quant à présent, à la définition suivante, qui s'accorde avec les considérations générales relatives aux incommensurables (25) : *l'expression a^X, dans laquelle a est un nombre et X une quantité incommensurable, positive ou négative, est la limite des nombres $a^x, a^{x'}, a^{x''}, \ldots$ que l'on obtient en remplaçant X par les quantités commensurables $x, x', x'', \ldots$, dont X est la limite.*

Par exemple, $3^{\sqrt{2}}$ est la limite des quantités

$$3^1,\quad 3^{1,4},\quad 3^{1,41},\quad 3^{1,414},\ldots,$$

c'est-à-dire la limite des nombres

$$3,\quad \sqrt[10]{3^{14}},\quad \sqrt[100]{3^{141}},\quad \sqrt[1000]{3^{1414}},\ldots.$$

85. *Remarque.* — Bien que ces derniers nombres (3 excepté), soient incommensurables, *leur limite $3^{\sqrt{2}}$ est peut-être commensurable.*

Calcul des exposants.

86. Les théorèmes principaux sur la multiplication, la division, la formation des puissances et l'extraction des racines, sont compris dans les quatre formules :

$$a^m . a^{m'} = a^{m+m'},\quad \frac{a^m}{a^{m'}} = a^{m-m'},\quad (a^m)^{m'} = a^{mm'},\quad \sqrt[m']{a^m} = a^{\frac{m}{m'}},$$

que nous pouvons regarder comme démontrées dans les cas où m et m' sont entiers positifs. Nous allons voir que cette restriction est inutile.

Remplaçant d'abord, dans les trois premières formules, m et m' par des fractions positives $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, on aura, en remontant à la définition des exposants fractionnaires ou négatifs, et en employant les règles du calcul des radicaux :

1°.
$$a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{p'}{q'}} = \sqrt[q]{a^p} . \sqrt[q']{a^{p'}} = \sqrt[qq']{a^{pq'}} . \sqrt[qq']{a^{p'q}}$$
$$= \sqrt[qq']{a^{pq'+p'q}} = a^{\frac{pq'+pq'}{qq'}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}},$$

ou
$$a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}}.$$

2°.
$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p'}{q'}}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q']{a^{p'}}} = \frac{\sqrt[qq']{a^{pq'}}}{\sqrt[qq']{a^{p'q}}} = \sqrt[qq']{\frac{a^{pq'}}{a^{p'q}}}$$
$$= \sqrt[qq']{a^{pq'-p'q}} \quad ou \quad = \sqrt[qq']{\frac{1}{a^{p'q-pq'}}} \ (*).$$

Donc
$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p'}{q'}}} = a^{\frac{pq'-p'q}{qq'}} \quad ou \quad = \frac{1}{a^{\frac{p'q-pq'}{qq'}}};$$

c'est-à-dire
$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p'}{q'}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}} \quad ou \quad = \frac{1}{a^{\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}}}.$$

Mais cette dernière expression peut être remplacée par
$$a^{-\left(\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}\right)} = a^{\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}};$$

(*) On prend la première forme ou la seconde, suivant que l'on a $pq' \gtrless p'q$: dans le cas de $pq' = p'q$, $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p'}{q'}}} = 1 = a^0$.

donc, dans tous les cas,

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p'}{q'}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}}.$$

3°. $$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = \sqrt[q']{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{p'}} = \sqrt[q']{\sqrt[q]{a^{pp'}}} = \sqrt[qq']{a^{pp'}} = a^{\frac{pp'}{qq'}},$$

ou $$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{p'}{q'}}.$$

4°. Dans la quatrième formule, supposons $m = \frac{p}{q}$, nous aurons

$$\sqrt[m']{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[m']{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[m'q]{a^p} = a^{\frac{p}{m'p}},$$

ou $$\sqrt[m']{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{m'}}.$$

Il resterait à considérer les cas où m et m' seraient *négatifs, entiers* ou *fractionnaires*, et encore le cas des exposants incommensurables : pour abréger, nous laissons au lecteur le soin de faire cette vérification, qui ne présente aucune difficulté.

87. L'emploi des exposants fractionnaires, négatifs, incommensurables, simplifie ou supprime, pour ainsi dire, le calcul des radicaux, en le remplaçant par un calcul dont les règles sont les mêmes que celles du calcul des exposants entiers positifs.

CHAPITRE VI.

NOTIONS SUR LES SÉRIES.

Préliminaires.

88. On appelle *série* une suite indéfinie de termes procédant suivant une *loi* déterminée, de telle sorte que le *rang* d'un terme étant donné, on puisse calculer ce terme. Autrement dit, si les termes d'une série sont généralement désignés par

$$u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_{n-1}, \quad u_n, \ldots,$$

le terme général u_n est une *fonction* de n.

89. *Diverses espèces de séries.* — Désignons par S_n la *somme des n premiers termes* d'une série ; savoir :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Cette somme, aussi bien que u_n, est une fonction de n. Cela posé, trois cas peuvent se présenter :

1°. *Si la somme* S_n des n premiers termes *tend vers une limite finie et déterminée,* lorsque le nombre n croît indéfiniment, la série est dite *convergente.*

2°. Dans le cas contraire, c'est-à-dire *quand la somme* des n premiers termes de la série *peut croître* (en valeur absolue) *au delà de toute limite,* on dit que la série est *divergente.*

3°. Enfin, s'il arrive que *la somme* S_n, sans croître au delà de toute limite, *n'ait pas de limite déterminée,* la série n'est *ni convergente ni divergente* (*).

D'après ces définitions, *une progression par quotient, illimitée et décroissante, est une série convergente ; une progression par quotient, illimitée et croissante, est une série divergente ;* enfin, la série

$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1, \quad +1, \ldots,$$

dont le terme général est $(-1)^{n-1}$, n'est ni convergente ni divergente ; car S_n égale 0 ou 1, suivant que n est pair ou impair.

Les séries convergentes sont les seules qu'il soit utile de considérer. En conséquence, nous allons indiquer quelques-uns des caractères au moyen desquels on peut, *dans certains cas,* reconnaître qu'une série proposée est ou n'est pas convergente.

Théorèmes sur la convergence.

90. Théorème I. — *Dans toute série convergente, le terme général a pour limite zéro.*

Considérons une série convergente

$$u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_{n-1}, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \ldots,$$

et désignons par S la limite vers laquelle tend la somme S_n des n

---

(*) La plupart des auteurs font rentrer cette troisième espèce de série dans la catégorie des *séries divergentes.* Cette classification nous paraît contraire à l'étymologie et à la signification habituelle du mot *divergent.*

premiers termes; en sorte que

$$S = \lim S_n. \quad (1)$$

Changeant n en $n-1$, nous aurons pareillement

$$S = \lim S_{n-1}; \quad (2)$$

car S_{n-1}, aussi bien que S_n, est la somme *d'un nombre quelconque de termes,* pris à partir du premier.

La comparaison des égalités (1) et (2) donne

$$0 = \lim S_n - \lim S_{n-1} = \lim (S_n - S_{n-1}) = \lim u_n \ (*).$$

91. Théorème II. — *Dans toute série convergente, la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs a pour limite zéro.*

En conservant les notations du numéro précédent, et en représentant par S_{n+p} la somme des $n+p$ premiers termes, nous aurons

$$S = \lim S_n, \quad S = \lim S_{n+p};$$

donc $$0 = \lim (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}).$$

92. *Remarques.* — I. L'énoncé et la démonstration du dernier théorème supposent que *le nombre p* des termes consécutifs considérés *est constant :* il peut d'ailleurs être aussi grand qu'on le veut.

II. Les deux théorèmes précédents expriment deux conditions auxquelles satisfont toutes les séries convergentes. Conséquemment, *toute série qui n'y satisfait pas ne saurait être convergente.* Ajoutons que ces deux conditions, *nécessaires,* sont loin d'être *suffisantes :* on verra tout à l'heure qu'une série dont tous les termes, supposés de même signe, décroissent indéfiniment, peut être divergente.

III. Le second théorème est une conséquence nécessaire du premier; car *si des quantités, en nombre limité, tendent chacune*

(*) Il est bon de remarquer, à propos de cette proposition fondamentale, que *la convergence ne dépend jamais des premiers termes :* la série

$$1 - \frac{10}{1} + \frac{100}{1.2} - \frac{1000}{1.2.3} + \frac{10000}{1.2.3.4} - \ldots,$$

dont les 10 premiers termes augmentent rapidement en valeur absolue, est convergente.

vers zéro, leur somme a pour limite zéro. Il résulte de là que *si les termes d'une série, convergente ou divergente, ont zéro pour limite, on peut toujours trouver p termes consécutifs dont la somme soit inférieure à un nombre donné δ.*

En effet, pour satisfaire à l'inégalité

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}<\delta,$$

dans laquelle on suppose

$$u_{n+1}>u_{n+2}>u_{n+3}>\ldots>u_{n+p}>0,$$

il suffit de prendre $u_{n+1} \overset{=}{<} \frac{\delta}{p}$.

IV. Il y a cette différence entre les séries convergentes et les séries divergentes, que, *dans toute série convergente, la somme de p termes consécutifs tend vers une limite quand le nombre p augmente indéfiniment,* et que, *dans les séries divergentes, cette même somme croît indéfiniment avec p, quel que soit le rang du premier des termes considérés.* Ces deux propriétés, que l'on pourrait regarder comme évidentes, résultent très-simplement des principes ci-dessus. En effet, si la série est convergente, nous aurons, en supposant *n constant* et *p variable*,

$$\lim S_{n+p}=S;$$

d'où

$$\lim(S_{n+p}-S_n)=S-S_n.$$

Si, au contraire, la série est divergente, la somme S_{n+p} peut dépasser toute limite, et il en est évidemment de même pour $S_{n+p}-S_n$.

De la série harmonique.

93. Cette série a pour termes les inverses des nombres naturels, c'est-à-dire

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ldots.$$

On lui donne le nom de *série harmonique,* parce que trois termes consécutifs quelconques, ou, plus généralement, trois termes équidistants quelconques sont en *proportion harmonique* (*).

(*) *Trois nombres a, b, c sont en proportion harmonique, quand l'excès*

Il est très-facile de prouver que cette série, dont les termes diminuent indéfiniment, est divergente. En effet, groupons ces termes, à partir du troisième, de la manière suivante :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},\quad \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16},\ldots$$

....

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k},$$

nous aurons

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8},\ldots,$$

....

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}>\frac{2^{k-1}}{2^k};$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2},\ldots,$$

....

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2}.$$

Donc, en supposant $n = 2^k$,

$$S_n > 1+\frac{k}{2}. \quad (1)$$

---

du premier sur le deuxième est à l'excès du deuxième sur le troisième, comme le premier est au troisième, c'est-à-dire lorsque $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$.

Il est aisé de reconnaître que les fractions $\frac{1}{n-k}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+k}$ satisfont à cette relation.

La dénomination de *proportion harmonique* se rattache à un phénomène d'acoustique : quand on veut faire rendre à une corde les sons composant l'*accord parfait majeur*, on fait vibrer la corde entière, puis ses $\frac{4}{5}$, puis ses $\frac{2}{3}$. Or $\dfrac{1-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$.

L'expression $\frac{k}{2}$ pouvant croître au delà de toute limite, il en est de même, à plus forte raison, pour S_n.

94. La série dont nous nous occupons est excessivement *peu divergente ;* c'est-à-dire que la somme S_n croît très-lentement avec n. Pour le faire voir, groupons ainsi les 2^k premiers termes :

$$1,\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3},\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7},\ldots,$$

$$\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k-1},\quad \frac{1}{2^k};$$

nous aurons

$$S_n < 1+\frac{2}{2}+\frac{4}{4}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k},$$

ou

$$S_n < k+\frac{1}{2^k};$$

et même, dès que l'exposant k surpasse 2 (*),

$$S_n < k. \quad (2)$$

Ainsi, *la somme des n premiers termes de la série harmonique est inférieure à l'exposant de la puissance de 2 égale à n.*

Si, par exemple, $k = 12$, on aura $n = 4096$,

$$S_{4096} < 12,$$

et, en même temps,

$$S_{4096} > 7;$$

de sorte que la somme des 4096 premiers termes est comprise entre 7 et 12 (**).

Suite des théorèmes sur la convergence.

95. THÉORÈME III. — *Dans toute série convergente, composée de termes positifs, le produit du terme général par le rang de ce terme a pour limite zéro.*

(*) $k > 2$ donne $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^k} < 1$.

(**) Par d'autres considérations, on trouve $S_{4096} = 8,89\ldots$

Si, à partir d'une certaine valeur de n, on avait constamment

$$nu_n > \alpha,$$

α étant une constante positive, on aurait aussi

$$u_{n+1} > \frac{\alpha}{n+1}, \quad u_{n+2} > \frac{\alpha}{n+2}, \quad u_{n+p} > \frac{\alpha}{n+p},$$

puis

$$S_{n+p} - S_n > \alpha\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right).$$

La quantité entre parenthèses est la somme de p termes consécutifs de la série harmonique; en prenant p suffisamment grand, on rendra cette somme, ou son produit par α, plus grand qu'un nombre donné quelconque. La série considérée serait donc divergente.

96. **Théorème IV.** — *Une série composée de termes positifs est convergente si, à partir d'un certain rang, le rapport d'un terme au terme précédent est constamment inférieur à un nombre donné moindre que l'unité.*

Supposons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \alpha, \ldots, \quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < \alpha,$$

α étant une constante positive, moindre que l'unité. Les inégalités précédentes donnent

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad u_{n+2} < \alpha^2 u_n, \ldots, \quad u_{n+p} < \alpha^p u_n.$$

Ainsi les termes

$$u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad u_{n+3}, \ldots, \quad u_{n+p}$$

sont respectivement moindres que les termes de la progression par quotient décroissante

$$\alpha u_n, \quad \alpha^2 u_n, \quad \alpha^3 u_n, \ldots, \quad \alpha^p u_n;$$

et comme cette progression, prolongée indéfiniment, est une série convergente, il en est de même, à plus forte raison, pour la série proposée.

97. *Remarques.* — I. Le théorème précédent peut être énoncé ainsi : *Une série composée de termes positifs est convergente, si le rapport d'un terme au terme précédent a une limite moindre que l'unité.*

II. *Si le rapport d'un terme au terme précédent, constamment inférieur à l'unité, a pour limite l'unité, la série peut être divergente.* C'est ce qui a lieu pour la série harmonique.

III. On peut compléter la démonstration du dernier théorème en montrant que *la somme*

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}=\mathrm{S}_{n+p}-\mathrm{S}_n$$

tend vers une limite, quand le nombre p augmente indéfiniment (92, IV). En effet, par ce qui précède,

$$\mathrm{S}_{n+p}-\mathrm{S}_n<\alpha u_n(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{p-1}),$$

ou

$$\mathrm{S}_{n+p}-\mathrm{S}_n<\alpha u_n\frac{1-\alpha^p}{1-\alpha},$$

ou, à plus forte raison,

$$\mathrm{S}_{n+p}-\mathrm{S}_n<u_n\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

La somme $\mathrm{S}_{n+p}-\mathrm{S}_n$, qui croît avec p, étant constamment inférieure à $u_n\frac{\alpha}{1-\alpha}$, a donc une limite.

98. Théorème V. — *Si les termes d'une série décroissent indéfiniment, et qu'ils soient alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.*

Considérons la série

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+u_{n-1}-u_n+u_{n+1}-\ldots,$$

dans laquelle nous supposons

$$u_1>u_2>u_3>\ldots>u_{n-1}>u_n>u_{n+1}>\ldots>0\ (*),$$

et dans laquelle, en outre,

$$\lim u_n=0.$$

(*) Si les premiers termes de la série ne satisfaisaient pas à ces conditions, on représenterait par u_1 le terme à partir duquel, *la série devenant régulière,* elles sont vérifiées. Par exemple, pour la série

$$1-\frac{1}{10}+\frac{10^2}{1.2}-\frac{10^3}{1.2.3}+\frac{10^4}{1.2.3.4}-\ldots.$$

citée dans le n° 90, on ferait

$$u_1=\frac{10^{10}}{1.2.3\ldots10},\quad u_2=\frac{10^{11}}{1.2.3\ldots10.11}=\frac{10}{11}u_1,\quad u_3=\frac{10^2}{11.12}u_1,\ldots.$$

Si nous continuons à représenter par S_n la somme des n premiers termes, nous aurons, en supposant n pair, pour fixer les idées,

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 - u_2,$$
$$S_3 = (u_1 - u_2) + u_3 = u_1 - (u_2 - u_3),$$
$$S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) = u_1 - (u_2 - u_4) - u_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{n-1} - u_n)$$
$$= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{n-2} - u_{n-1}) - u_n;$$

donc $$S_1 > S_3 > S_5 > \ldots > S_{n-1},$$

et $$S_2 < S_4 < S_6 < \ldots < S_n.$$

Ainsi, les sommes de rang impair vont en diminuant et les autres vont en augmentant. D'ailleurs la différence $S_n - S_{n-1} = u_n$ a pour limite zéro; donc *ces diverses sommes ont une limite commune* S, *comprise entre deux sommes consécutives quelconques* (23) (*).

99. Théorème VI. — *Les mêmes choses étant posées que dans le théorème* V, *l'erreur* ε *commise en prenant la somme* S_n *au lieu de sa limite* S, *est inférieure au terme* u_{n+1} *qui suit celui auquel on s'arrête.*

En effet, si n est pair,

$$S_n < S < S_{n+1}, \quad \text{d'où} \quad S - S_n < S_{n+1} - S_n,$$

ou $$\varepsilon < u_{n+1};$$

(*) Si les termes, alternativement positifs et négatifs, et décroissants, avaient une limite a différente de zéro, la série ne serait ni convergente, ni divergente. En effet, les sommes $S_1, S_3, S_5, \ldots, S_{n-1}$ iraient encore en diminuant, et les sommes $S_2, S_4, S_6, \ldots, S_n$, *respectivement moindres que les premières,* iraient encore en augmentant, en sorte que les unes et les autres auraient des limites; mais, à cause de

$$\lim u_n = \lim (S_{n-1} - S_n) = a,$$

on aurait

$$\lim S_{n-1} - \lim S_n = a.$$

Ainsi, *la limite des sommes de rang pair serait égale à la limite des sommes de rang impair, diminuée de* a.

et, si n est impair,

$$S_n > S > S_{n+1},\quad S_n - S < S_n - S_{n+1},$$

ou

$$\varepsilon < u_{n+1}.$$

100. *Remarque.* — La différence $\varepsilon = S - S_n$, entre la somme S_n des n premiers termes d'une série convergente et la limite S de cette somme, est ce qu'on appelle le *reste* de la série. La limite S est quelquefois appelée, par abréviation, *somme* de la série. Dans le cas d'une série non convergente, les expressions *somme* et *reste* n'ont aucun sens, et on doit se garder de les employer.

Exemples de séries.

101. Considérons d'abord la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \ldots,$$

qui a pour terme général

$$u_n = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\ (*).$$

Elle est convergente; car $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{1}{n} = 0$ (97, I). On désigne ordinairement par la lettre e la limite de la somme de ses termes; en sorte que

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots.$$

102. 1°. *Le nombre e est compris entre* 2 et 3. La première partie de la proposition est évidente. Pour démontrer la seconde, observons que les fractions

$$\frac{1}{1.2},\quad \frac{1}{1.2.3},\quad \frac{1}{1.2.3.4},\ldots,\quad \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)},\ldots$$

sont (la première exceptée) respectivement moindres que les termes de la progression

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{2^3},\ldots,\quad \frac{1}{2^{n-2}}\ldots.$$

(*) Le premier terme échappe à cette loi.

La limite de la somme des termes de cette progression est l'unité; donc $e < 3$.

2°. *Le nombre e est incommensurable.* — S'il était égal à une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, on aurait, en mettant en évidence le terme dont le dénominateur se termine par le facteur q:

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots q} + \frac{1}{1.2.3\ldots q(q+1)} + \ldots;$$

puis, en multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots q$:

$$E = E' + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots,$$

E et E' désignant des nombres entiers.

Cette dernière égalité est impossible; car elle donne

$$E < E' + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots,$$

ou

$$E < E' + \frac{1}{q}:$$

ce qui est absurde.

103. *Calcul de e. Limite de l'erreur commise.* — La méthode au moyen de laquelle nous venons de prouver l'incommensurabilité du nombre e donne aussi la limite de l'erreur ε que l'on commet quand on limite le développement de e à ses n premiers termes. En effet, de

$$\varepsilon = \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)} + \ldots,$$

on conclut, par le calcul précédent,

$$\varepsilon < \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right],$$

ou

$$\varepsilon < \frac{n+1}{1.2.3\ldots(n-1)n^2},$$

ou encore

$$\varepsilon < \frac{n+1}{n^2} u_n.$$

En faisant usage de cette formule, et en observant que les termes de la série se déduisent les uns des autres par des divisions suc-

cessives très-simples, on peut calculer rapidement, avec une grande approximation, la valeur de e. Par exemple, si l'on se borne à 9 décimales, on aura

$$
\begin{aligned}
1+1 &= 2\\
\frac{1}{2} &= 0,500\,000\,000\\
\frac{1}{2.3} &= 0,166\,666\,666\\
\frac{1}{2.3.4} &= 0,041\,666\,666\\
\frac{1}{2.3.4.5} &= 0,008\,333\,333\\
\frac{1}{2.3\ldots6} &= 0,001\,388\,888\\
\frac{1}{2.3\ldots7} &= 0,000\,198\,412\\
\frac{1}{2.3\ldots8} &= 0,000\,024\,801\\
\frac{1}{2.3\ldots9} &= 0,000\,002\,755\\
\frac{1}{2.3\ldots10} &= 0,000\,000\,275\\
\frac{1}{2.3\ldots11} &= 0,000\,000\,025\\
\frac{1}{2.3\ldots12} &= 0,000\,000\,002\\
\hline
& \ 2,718\,281\,823
\end{aligned}
$$

Si nous n'avions pas négligé les décimales qui devraient suivre la neuvième, nous aurions, d'après la formule précédente,

$$\varepsilon < 0,000\,000\,002 \cdot \frac{14}{13^2};$$

et, à plus forte raison, $\varepsilon < 0,000\,000\,000.2$. Ainsi les neuf décimales obtenues seraient exactes. Pour tenir compte des retenues, calculons une décimale de plus : en la prenant par défaut, nous

devrons ajouter, au résultat précédent,

$6+6+3+8+6+5+7+5+0+0+1$ unités du 10[e] ordre décimal,

ou
$$0,000\,000\,004\,7.$$

En prenant par excès la 10[e] décimale, on aura, pour nouvelle somme,

$$0,000\,000\,005\,8.$$

Par suite, la valeur de e est comprise entre

$$2,718\,281\,827\,7 \quad \text{et} \quad 2,718\,281\,828\,9.$$

En effet,

$$e = 2,718\,281\,828\,459\,045\ldots \; (*).$$

104. Les détails dans lesquels nous venons d'entrer à propos de l'incommensurable e sont justifiés par l'importance de ce nombre, que l'on rencontre dans une foule de recherches; nous verrons bientôt qu'il sert de base au système des logarithmes *népériens*.

105. Comme second exemple, nous prendrons la série

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

dans laquelle

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Il est évident que $\lim u_n = 0$ et que $\lim nu_n = 0$. Ainsi, la série est *peut-être* convergente.

Pour reconnaître si elle l'est réellement, cherchons la limite du rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$.

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}, \qquad \text{donc} \qquad \lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1.$$

D'après l'une des remarques du n° 97, on ne peut encore rien conclure sur la convergence ou la divergence de la série proposée. Mais, si l'on fait attention que

$$\frac{1}{1.2} = 1-\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \ldots,$$

(*) On peut remarquer qu'en écrivant 1828 deux fois de suite à la droite de 27, on a la valeur de e avec 9 décimales.

on aura, pour la somme des n premiers termes,

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

ou

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1};$$

et, conséquemment, $\lim S_n = S = 1$.

La série proposée est donc convergente, et la somme de ses n premiers termes, égale à $1 - \frac{1}{n+1}$, a pour limite l'unité.

106. *Remarque.* — Le procédé que nous venons d'employer est souvent applicable.

EXERCICES.

I. La série $\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots$ est convergente, quand m surpasse l'unité.

II. La série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, dans laquelle les termes sont positifs, est convergente si $\sqrt[n]{u_n}$ a une limite moindre que l'unité.

III. La série $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots$ est convergente, quel que soit x.

IV. En représentant par m un nombre plus grand que l'unité, on a

$$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1.2}{(m+1)(m+2)} + \frac{1.2.3}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \ldots$$
$$= \frac{m}{m-1}.$$

V. Les séries

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots,$$

déduites de la série convergente

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

sont-elles convergentes? Si elles le sont, ont-elles même *somme* que cette dernière série?

VI. Sommer la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{n^2 - n + 1}{n(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

VII. *Théorème de Goldbach.* — La somme des fractions de la forme $\frac{1}{(m+1)^{p+1}}$, a pour limite l'unité.

CHAPITRE VII.

ARRANGEMENTS ET COMBINAISONS.

Définitions.

107. 1°. On appelle *arrangements de n lettres p à p, les mots composés de p lettres prises parmi les n lettres données* (*).

D'après cette définition, *deux arrangements* quelconques *diffèrent, soit par les lettres* qui y entrent, *soit par l'ordre* de ces lettres.

Ainsi les arrangements trois à trois des cinq lettres a, b, c, d, e, sont

$$abc,\quad bac,\quad bca,\quad bde,\quad eda,\quad dbe\ldots.$$

2°. *Les permutations de n lettres sont les arrangements formés avec ces lettres prises toutes ensemble* (**). Par exemple, les lettres a, b, c donnent les six permutations

$$abc,\quad acb,\quad bac,\quad bca,\quad cab,\quad cba.$$

(*) Cette définition, assez différente des définitions ordinaires, nous a semblé propre à empêcher les élèves de confondre les arrangements et les combinaisons. Il est peut-être superflu d'ajouter que les *assemblages* de lettres, auxquels nous donnons le nom de *mots*, peuvent n'avoir aucune signification; ils peuvent même n'être pas *prononçables*.

(**) Les permutations sont donc un cas particulier des arrangements.

3°. Enfin, on appelle *combinaisons, les arrangements dont la composition est différente,* c'est-à-dire les arrangements tels, que deux quelconques d'entre eux diffèrent au moins par une lettre.

Les combinaisons des lettres a, b, c, d, e, prises trois à trois, sont donc

abc, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*.

108. *Remarques.* — I. L'ordre des lettres, dans une combinaison donnée, est complétement indifférent; pour plus de simplicité, on choisit ordinairement, comme nous venons de le faire, l'ordre alphabétique.

II. Tant de lettres que l'on voudra, prises toutes ensemble, donnent lieu à une seule combinaison.

III. Pour *effectuer* les arrangements p à p de n lettres, on peut combiner d'abord ces lettres p à p, et permuter ensuite les p lettres entrant dans chaque combinaison. Il est évident, en effet, que si l'on opère ainsi, il n'y aura *ni arrangement omis, ni arrangement répété.*

Les combinaisons écrites ci-dessus donneraient, de cette manière, les 60 arrangements trois à trois des cinq lettres a, b, c, d, e; savoir :

abc,	*abd*,	*abe*,	.....	*cde*,
acb,	*adb*,	*aeb*,	.....	*ced*,
bac,	*bad*,	*bae*,	.....	*dce*,
bca,	*bda*,	*bea*,	.....	*dec*,
cab,	*dab*,	*eab*,	.....	*ecd*,
cba,	*dba*,	*eba*,	.....	*edc*.

Problèmes principaux.

109. Problème I. — *Trouver le nombre des arrangements de n lettres p à p.* Soit $A_{n,p}$ ce nombre. Pour le déterminer, remarquons que si l'on connaissait les arrangements $p-1$ à $p-1$ des n lettres données, arrangements dont le nombre sera désigné par $A_{n,p-1}$, il serait très-facile de former les arrangements des mêmes lettres prises p à p. En effet, *à la droite de chacun des arrangements composés de $p-1$ lettres, inscrivons successivement chacune des $n-(p-1)$ lettres qui n'y entrent pas;* nous obtiendrons, *sans omission et sans répétition*, les arrangements cher-

chés. D'ailleurs, chaque arrangement de $p-1$ lettres a donné $n-p+1$ arrangements de p lettres ; donc

$$A_{n,p} = (n-p+1)A_{n,p-1}. \quad (1)$$

Cette relation générale donne, par le changement de p en $p-1, p-2, \ldots, 3, 2$:

$$\left.\begin{array}{l} A_{n,p-1} = (n-p+2)A_{n,p-2}, \\ A_{n,p-2} = (n-p+3)A_{n,p-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n,3} = (n-2)A_{n,2}, \\ A_{n,2} = (n-1)A_{n,1}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

D'ailleurs, $A_{n,1}$, ou le nombre des arrangements de n lettres prises 1 à 1, est évidemment n. Par suite,

$$A_{n,p} = n(n-1)\ldots(n-p+1). \quad (A)$$

Telle est la formule cherchée. Elle exprime que *le nombre des arrangements de n lettres p à p, est égal au produit de p nombres entiers, consécutifs et décroissants, dont le premier est n.*

110. Problème II. — *Trouver le nombre* P_n *des permutations de n lettres.*

Si, dans la formule (A), on suppose $p = n$, on trouve

$$A_{n,n} = n(n-1)\ldots 1,$$

ou

$$P_n = 1.2.3\ldots n. \quad (B)$$

Ainsi, *le nombre des permutations de n lettres est égal au produit des n premiers nombres naturels.*

111. Problème III. — *Trouver le nombre des combinaisons de n lettres, p à p.* D'après la remarque III (108), chacune de ces combinaisons donne autant d'arrangements que l'indique le nombre P_p des permutations de p lettres; donc *le nombre* $A_{n,p}$ *des arrangements de n lettres p à p, est égal au nombre* $C_{n,p}$ *des combinaisons de ces n lettres, multiplié par le nombre* P_p *des permutations de p lettres ;* donc aussi

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p}. \quad (C)$$

112. La formule (C) peut être écrite de différentes manières. D'abord, si l'on remplace le numérateur et le dénominateur par

quelles se trouvent α fois la lettre a, β fois la lettre b, ..., θ fois la lettre t?

Pour *effectuer* ces permutations, il suffirait de faire occuper, par les n lettres, n places données. De ces n places, α peuvent être occupées par les α lettres a, d'autant de manières que l'indique le nombre $C_{n,\alpha}$ des combinaisons de n lettres α à α. De même, β des $n-\alpha$ places restantes, peuvent être remplies par les β lettres b, d'un nombre de manières égal à $C_{n-\alpha,\beta}$, etc. Enfin, quand toutes les lettres autres que t auront été employées, il restera θ places, dont la répartition entre les θ lettres t se fera d'une seule manière, ou d'un nombre de manières égal à $C_{\theta,\theta}$. Par suite,

$$N = C_{n,\alpha}.C_{n-\alpha,\beta}.C_{n-\alpha-\beta,\gamma}\ldots C_{\theta,\theta},$$

ou $$N = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots\alpha \times 1.2.3\ldots\beta \times\ldots\times 1.2.3\ldots\theta}. \quad (\text{H})$$

116. *Remarques.* — I. La formule (H) est la généralisation de la formule (F). Elle montre que *si un nombre entier n est égal à la somme des nombres entiers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$, le produit $1.2.3\ldots n$ est divisible par le produit $1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots1.2\ldots\theta$.*

117. *Application.* — De combien de manières peut-on permuter les 21 lettres du mot *constitutionnellement*?

Ce mot contient 2 fois la lettre o, 4 fois la lettre n, etc.; donc

$$N = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9\ldots21}{1.2.1.2.3.4.1.2.3.4.1.2.1.2.3.1.2}$$
$$= 5.7.9.10.11.7.15.16.17.18.19.20.21,$$

ou $$N = 142\,146\,718\,560\,000 \ (*).$$

Triangle arithmétique.

118. La formule

$$C_{n,p} = \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\ldots\frac{n-p+1}{p} \quad (\text{F})$$

(*) Quand une permutation offre un sens, elle prend le nom d'*anagramme*. Quelques anagrammes sont célèbres : dans *frère Jacques Clément*, on trouva : *c'est l'enfer qui m'a créé*.

peut être écrite ainsi :

$$C_{n,p} = C_{n,p-1}\cdot\frac{n-p+1}{p} = \frac{n+1}{p}C_{n,p-1} - C_{n,p-1}.$$

Mais,
$$\frac{n+1}{p}C_{n,p-1} = C_{n+1,p};$$

donc
$$C_{n+1,p} = C_{n,p-1} + C_{n,p},$$

ou, en remplaçant n par $n-1$,

$$C_{n,p} = C_{n-1,p-1} + C_{n-1,p}. \quad (I).$$

Ainsi, *le nombre des combinaisons de n lettres, p à p, est égal à la somme du nombre des combinaisons de $n-1$ lettres, $p-1$ à $p-1$, et du nombre des combinaisons de $n-1$ lettres, p à p.*

Ce théorème, qui permet évidemment d'obtenir les nombres de combinaisons, par des additions successives, paraît en défaut dans le cas de $p=1$. Mais comme la relation $C_{n,p} = C_{n,n-p}$ devient, si l'on suppose $p=0$, $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$, *on peut convenir que l'expression $C_{n,0}$ égale l'unité.*

Cela posé, si l'on part de $C_{1,0} = 1$ et de $C_{1,1} = 1$, et que l'on applique la formule (I), on formera le tableau suivant, connu sous le nom de *Triangle arithmétique de Pascal*. Dans ce tableau, le $p^{ième}$ terme d'une ligne horizontale de rang n, égal à $C_{n,p}$ *s'obtient en ajoutant le terme de même rang dans la ligne précédente avec le terme qui précède celui-ci.*

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
....

119. *Remarques.* — D'après la manière dont le triangle arithmétique est formé :

1°. Dans une ligne horizontale quelconque, les termes à égale distance des extrêmes sont égaux ; et, conséquemment, la somme des termes de rang pair est égale à la somme des termes de rang impair ;

2°. Chacune de ces sommes égale la somme des termes contenus dans la colonne précédente;

3°. La somme des termes de la $n^{ième}$ colonne est 2^n.

4°. *Le $p^{ième}$ terme de la $n^{ième}$ colonne est égal à la somme des termes de rang $p-1$ dans toutes les colonnes précédentes;*

5°. D'après cela, *la somme des nombres de combinaisons p à p de p lettres, de $p+1$ lettres,..., de n lettres, égale le nombre des combinaisons de $n+1$ lettres, $p+1$ à $p+1$* (*).

Par exemple,

$$C_{9,4} = C_{8,3} + C_{7,3} + C_{6,3} + C_{5,3} + C_{4,3} + C_{3,3},$$

ou

$$\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = \frac{8.7.6}{1.2.3} + \frac{7.6.5}{1.2.3} + \frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{5.4}{1.2} + 4 + 1,$$

ou

$$126 = 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1.$$

EXERCICES.

I. Quelle serait la hauteur occupée par le papier nécessaire pour écrire toutes les permutations des lettres composant ce vers:

Qui n'a pas ce qu'il veut, doit vouloir ce qu'il a?

L'épaisseur des rames empilées les unes sur les autres est de 5 centimètres; chaque rame contient 600 feuilles; chaque feuille 4 pages; chaque page, 45 lignes; et chaque ligne, deux permutations.

Réponse : 10 549 548 739 409 315 303 116 800 mètres (**).

II. Combien y a-t-il de parties de domino essentiellement différentes? Le jeu se compose de 28 dés, et chacun des deux joueurs en prend 7.

Réponse : 137 680 171 200.

III. Combien y a-t-il de parties d'écarté essentiellement différentes?

Réponse : 354 883 858 560.

(*) Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ces propriétés intéressantes.

(**) *La colonne de papier irait* 68 930 120 433 250 *fois aussi loin que le soleil!*

IV. Combien y a-t-il de mots formés de trois voyelles et de six consonnes?

Réponse : 98 456 601 600.

V. Les deux faces d'un jeton de forme hexagonale sont partagées chacune, par trois diamètres, en six triangles équilatéraux égaux entre eux. On applique, sur chaque triangle, une des sept couleurs primitives, de manière que deux triangles appartenant à la même face ne soient pas de la même couleur. Combien pourra-t-on former de jetons essentiellement inégaux satisfaisant à ces conditions?

Réponse : 2 116 800.

VI. De combien de manière peut-on appliquer quatre des sept couleurs primitives sur les quatre faces d'un tétraèdre régulier?

Réponse : 70.

VII. Ayant pris sur un plan n points $a, b, c, \ldots$, tels, que trois d'entre eux ne soient pas en ligne droite, on les joint deux à deux par des droites ab, ac, $bc, \ldots$, qui se coupent en de nouveaux points A, B, C,.... Quel est le nombre N de ces points?

Réponse : $N = \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3)$.

CHAPITRE VIII.

FORMULE DU BINOME.

120. Pour trouver la formule qui donne le développement de la puissance $m^{ième}$ d'un binôme $x+a$, m étant supposé entier et positif, cherchons d'abord à ordonner, suivant les puissances descendantes de x, le produit P des m binômes

$$x+a,\ x+b,\ x+c,\ldots,\ x+k,\ x+l.$$

A cet effet, observons que si l'on multipliait $x+a$ par $x+b$, puis le produit par $x+c$, etc., et *qu'on ne fît aucune réduction, un terme quelconque de* P *serait égal au produit de m facteurs, pris respectivement dans les m binômes donnés.*

Conséquemment :

1°. Le premier terme de P est x^m;

2°. Pour obtenir un terme contenant x^{m-1}, on doit, dans $m-1$

des binômes, prendre le premier terme x; et, dans le binôme restant, prendre le second terme : le coefficient de x^{m-1} sera donc la somme S_1 des seconds termes des binômes;

3°. Pour obtenir un terme contenant x^{m-2}, on doit, dans $m-2$ des binômes, prendre le premier terme x; et, dans les deux binômes restants, prendre le second terme : le coefficient de x^{m-2} sera donc la somme S_2 des produits deux à deux des seconds termes des binômes; etc.

4°. En général, *le coefficient de x^{m-p} est égal à la somme S_p des produits p à p des seconds termes;*

5°. Enfin, le dernier terme de P égale le produit $abc\ldots kl$ des seconds termes, produit que nous représenterons par S_m.

On a donc

$$\left.\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)(x+l)\\&=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots+S_px^{m-p}+\ldots+S_m.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

121. Dans la formule (1), supposons $b=c=\ldots=k=l=a$: le premier membre deviendra $(x+a)^m$. En même temps :

1°. $S_1=a+b+c+\ldots+k+l$ se réduit au produit de a par le nombre m des seconds termes : $S_1=\frac{m}{1}a$;

2°. $S_2=ab+ac+\ldots+bc+\ldots+kl$ se réduit au produit de a^2 par le nombre des produits deux à deux ou des combinaisons deux à deux des lettres $a, b, c, \ldots, k, l$: $S_2=\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$; etc.

3°. En général, S_p se réduit au produit de a^p par le nombre des produits p à p ou des combinaisons p à p des lettres $a, b, c, \ldots, k, l$: $S_p=C_{m,p}.a^p$;

4°. Enfin, $S_m=a^m$.

Par suite :

$$(x+a)^m=x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\ldots+C_{m,p}a^px^{m-p}+\ldots+a^m.\quad(2)$$

Telle est la *formule du binôme,* due à Newton.

122. *Remarques.* — I. Le développement de $(x+a)^m$ est homogène et du degré m : ce résultat est dû à ce que le binôme $(x+a)$ est homogène (*).

(*) Il n'y a pas lieu d'ajouter, comme on le fait quelquefois, que *les*

II. Le développement contient $m+1$ termes.

III. *Le terme qui en a p avant lui*, que l'on appelle *terme général*, a pour expression

$$T_{p+1} = C_{m,p} a^p x^{m-p} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} a^p x^{m-p}. \quad (2)$$

IV. *Les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux.*

Le nombre des termes étant $m+1$, *le terme qui en a p après lui en a m — p avant lui;* son coefficient a donc pour valeur $C_{m,m-p}$. Or, $C_{m,m-p} = C_{m,p}$.

V. Pour les applications, il est commode de rendre le premier terme du binôme égal à l'unité. Or

$$(x+a)^m = x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m = x^m(1+z)^m,$$

pourvu que $z = \frac{a}{x}$.

D'ailleurs, comme une puissance quelconque de l'unité est égale à l'unité,

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \ldots \quad (\text{K})$$

Cette nouvelle formule subsiste quel que soit m, pourvu que la variable z soit comprise entre +1 et —1. Cette proposition, dont nous devons omettre la démonstration, doit être entendue ainsi :

Le second membre de l'équation (K), composé d'un nombre limité de termes quand m est entier positif, devient une série dans tous les autres cas. Si z est compris entre $+1$ et -1, cette série est convergente et a pour somme $(1+z)^m$.

123. *Formation des termes.* — La formule (2) donne

$$T_{p+2} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{1.2.3\ldots(p+1)} a^{p+1} x^{m-p-1} = T_{p+1}\frac{m-p}{p+1}\frac{a}{x}. \quad (3)$$

Par conséquent, *pour passer d'un terme au terme suivant, on multiplie le coefficient par l'exposant de x; on le divise par l'ex-*

---

exposants de x vont en diminuant, et ceux de a, en augmentant; car on s'était proposé de développer $(x+a)^m$ suivant les puissances décroissantes de x.

posant de a augmenté d'une unité; on augmente d'une unité l'exposant de a et l'on diminue d'une unité l'exposant de x.

Appliquons cette règle au développement de $(x+a)^9$. Nous aurons, successivement,

$$x^9,\quad \frac{9}{1}ax^8,\quad 9\cdot\frac{8}{2}a^2x^7 = 36a^2x^7,\quad 36\cdot\frac{7}{3}a^3x^6 = 84a^3x^6,$$

$$84\cdot\frac{6}{4}a^4x^5 = 126a^4x^5,\ \text{etc.};$$

et enfin,

$$(x+a)^9 = x^9 + 9ax^8 + 36a^2x^7 + 84a^3x^6 + 126a^4x^5$$
$$+ 126a^5x^4 + 84a^6x^3 + 36a^7x^2 + 9a^8x + a^9.$$

124. *Rang du terme qui a le plus grand coefficient.* — Représentons par C_{p+1} le coefficient du terme de rang $p+1$; nous aurons, à cause de la formule (3),

$$C_{p+2} = \frac{m-p}{p+1}C_{p+1}. \quad (4)$$

Pour de petites valeurs de p, la fraction $\frac{m-p}{p+1}$ surpassera l'unité; donc $C_{p+2} > C_{p+1}$: *les coefficients vont d'abord en augmentant.* Cette augmentation cesse dès que le facteur $\frac{m-p}{p+1}$ devient égal ou inférieur à l'unité. Par conséquent, *le rang du plus grand coefficient est égal à la plus petite valeur de* $p+1$ *qui vérifie la relation* $\frac{m-p}{p+1} \overset{=}{<} 1$.

Elle donne $$p+1 \overset{=}{>} \frac{m+1}{2}.$$

Donc, 1° *si m est impair, le rang du plus grand coefficient sera*

$$p+1 = \frac{m+1}{2};$$

2° *si m est pair, le rang du plus grand coefficient sera*

$$p+1 = \frac{m}{2}+1.$$

Dans le premier cas, le développement a un nombre pair de

termes; et, comme $p+1=\frac{m+1}{2}$ donne $\frac{m-p}{p+1}=1$, *il y a deux termes du milieu, dont les coefficients, plus grands que tous les autres, sont égaux entre eux.*

Dans le second cas, *le terme du milieu,* de rang $p+1=\frac{m}{2}+1$, *a le plus grand coefficient.*

125. *Développement de* $(x-a)^m$. — Si, dans la formule (1), on change a en $-a$, on obtient

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1}+\ldots+(-1)^p C_{m,p}a^p x^{m-p}+\ldots\\ +(-a)^m.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

126. *Remarques.* — I. Dans les formules (1) et (5), faisons $x=a=1$; nous aurons

$$2^m = 1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\ldots+C_{m,p}+\ldots+1,$$

$$0=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\ldots+(-1)^p C_{m,p}+(-1)^m.$$

Par conséquent,

1°. *La somme des coefficients du développement de* $(x+a)^m$ *égale* 2^m;

2°. *La somme des coefficients de rang pair est égale à la somme des coefficients de rang impair* (*).

II. Si l'on représente par P *la somme des nombres de combinaisons de m lettres prises en nombre pair,* et par I *la somme des nombres de combinaisons de ces m lettres prises en nombre impair,* on aura, en se rappelant que $C_{m,0}=1$ n'est pas un nombre de combinaisons,

$$P+I=2^m-1,\quad I-P=1,$$
$$I=2^{m-1},\quad P=2^{m-1}-1 \ (**).$$

127. *Développement de* $\left(a+b\sqrt{-1}\right)^m$. — Les puissances suc-

(*) Le triangle arithmétique conduit aux mêmes conséquences.

(**) Ces dernières valeurs donnent lieu à une remarque assez curieuse: *au jeu de pair ou non, il y a avantage à parier pour impair.*

sives de $\sqrt{-1}$ sont $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$, $+1$; donc

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b\sqrt{-1} - \frac{m}{1}\frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2$$
$$- \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3 \sqrt{-1}$$
$$+ \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{m-3}{4} a^{m-4} b^4 + \ldots.$$

De même,

$$(a-b\sqrt{-1})^m = a^m - \frac{m}{1} a^{m-1} b\sqrt{-1} - \frac{m}{1}\frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2$$
$$+ \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3 \sqrt{-1} + \ldots.$$

Par conséquent si l'on pose, pour abréger,

$$A = a^m - C_{m,2}\, a^{m-2} b^2 + C_{m,4}\, a^{m-4} b^4 - \ldots,$$
$$B = C_{m,1}\, a^{m-1} b - C_{m,3}\, a^{m-3} b^3 + C_{m,5}\, a^{m-5} b^5 - \ldots,$$

on aura

$$(a+b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1},$$
$$(a-b\sqrt{-1})^m = A - B\sqrt{-1}.$$

128. *Remarque.* — En multipliant membre à membre les deux dernières égalités, on obtient

$$(a^2+b^2)^m = A^2 + B^2;$$

de là, ce théorème d'arithmétique :

Les puissances successives d'un nombre égal à la somme de deux carrés sont égales, chacune, à la somme de deux carrés (p. 38).

Par exemple,

$$(4+9)^3 = 46^2 + 9^2.$$

EXERCICES.

I. Quelle est l'expression du coefficient de x^k dans le développement de $(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})^p$? En conclure le nombre de manières de *former une somme s, par le jet de p dés à m faces.* (On admettra la formule du binôme pour le cas de l'exposant entier négatif.)

II. Quel est le nombre des solutions entières positives de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 37 ?$$

Réponse : 377 992.

III. Démontrer la formule

$$C_{m+m'+n-1,n} = \sum_0^n (C_{m+i-1,i} \times C_{m'+n-i-1,i-1}),$$

dans laquelle i est une variable qui reçoit les valeurs 0, 1, 2, 3,..., n (*).

IV. Démontrer la double inégalité

$$\frac{1}{(p-1)(a-1)^{p-1}} > \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(a+1)^p} + \frac{1}{(a+2)^p} + \ldots > \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}.$$

V. Quel est le 25ᵉ terme du développement de $(1-x)^{\frac{2}{3}}$?

VI. Développer, en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, la fonction

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \ldots.$$

Quel sera le coefficient de x^n? La série sera-t-elle convergente? $(1 > x > 0)$.

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS DE LA FORMULE DU BINOME.

Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

129. Si, dans l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, on fait croître indéfiniment le nombre m, la quantité $1+\frac{1}{m}$ diminue et tend vers l'unité. On ne peut donc, à priori, savoir si sa puissance $m^{ième}$ augmente ou diminue. Nous allons voir que *cette puissance*, c'est-à-dire $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, *a pour limite le nombre incommensurable* e (101).

En supposant d'abord m entier positif, nous aurons, par la

(*) La lettre Σ indique une somme.

formule du binôme (**121**),

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\,\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1}{m^2}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\,\frac{1}{m^p}+\ldots+\frac{1}{m^m},$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m = 1+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1-\dfrac{1}{m}}{1.2}+\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\left(1-\dfrac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots \\ \quad +\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\left(1-\dfrac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\dfrac{p-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots p}+\ldots+\dfrac{1}{m^m}.\end{array}\right\} \quad (1)$$

Faisons grandir m indéfiniment: les facteurs $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, ... tendront vers 1; en même temps, le *dernier terme* $\frac{1}{m^m}$ convergera vers zéro et s'éloignera indéfiniment du premier terme de *la série;* donc, en admettant pour un instant que

$$\lim\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)=1, \quad (2)$$

nous aurons

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots p}+\ldots,$$

ou

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

130. L'égalité (2), que nous venons d'admettre pour ne pas scinder la démonstration, exige quelques explications :

1°. Si l'on suppose le nombre entier p assez petit, la fraction $\frac{p-1}{m}$ aura évidemment pour limite zéro, et la limite du produit $\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)$ sera l'unité.

2°. Si le nombre p est *très-grand,* mais *constant,* la fraction $\frac{p-1}{m}$ aura encore pour limite zéro. En effet, on peut toujours assigner une valeur de m vérifiant l'inégalité $\frac{p-1}{m} < \delta$.

3°. Les facteurs $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, ..., $1-\frac{p-1}{m}$ ayant tous pour limite l'unité, on pourrait admettre que leur produit tend également vers cette limite, en vertu de ce principe : *la limite d'un produit est égale au produit des limites des facteurs.* Mais la démonstration sera plus satisfaisante et plus complète si nous résolvons le problème suivant :

Assigner une valeur de m qui vérifie l'inégalité

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{m}\right) > 1-\alpha, \quad (3)$$

dans laquelle p est un nombre entier donné et α une quantité donnée, positive et très-petite (*).

Il est facile de voir que l'on peut remplacer la condition (3) par les inégalités suivantes :

$$\left(1-\frac{p}{m}\right)^p > 1-\alpha,$$

$$1-\frac{p}{m} > \sqrt[p]{1-\alpha},$$

$$m > \frac{p}{1-\sqrt[p]{1-\alpha}}. \quad (4)$$

Si l'on connaissait *une fraction* ε *supérieure à* $\sqrt[p]{1-\alpha}$, on pourrait encore remplacer la dernière inégalité par

$$m > \frac{p}{1-\varepsilon}, \quad (5)$$

en sorte que la question serait résolue.

Or la formule du binôme donne

$$\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)^p > 1-\alpha \ (^{**}), \quad \text{ou} \quad 1-\frac{\alpha}{p} > \sqrt[p]{1-\alpha}.$$

(*) Pour plus de régularité, on a écrit p au lieu de $p-1$.

(**) $$\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)^p = 1-\alpha+\frac{p(p-1)}{1.2}\frac{\alpha^2}{p^2}\left(1-\frac{p-2}{p}\frac{\alpha}{3}\right)$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}\frac{\alpha^4}{p^4}\left(1-\frac{p-4}{p}\frac{\alpha}{5}\right)+\ldots;$$

donc $$\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)^p > 1-\alpha.$$

On peut donc prendre $\varepsilon = 1 - \frac{\alpha}{p}$; et, par suite,

$$m \overset{=}{>} \frac{p^2}{\alpha}.$$

Par exemple, pour rendre le produit des 1000 facteurs $1 - \frac{1}{m}$, $1 - \frac{2}{m}, \ldots, 1 - \frac{1000}{m}$, plus grand que 0,999, on fera $m = 1000^3$.

Puisqu'on peut toujours assigner une valeur de m qui rende la différence entre l'unité et le produit

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{p}{m}\right)$$

inférieure à une quantité donnée quelconque, *ce produit a pour limite l'unité*. C'est ce qu'il fallait démontrer.

131. Les termes du développement de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, évidemment inférieurs à ceux qui leur correspondent dans le développement de e, ont donc pour limites respectives ces derniers termes.

En admettant cette proposition, nous avons conclu, immédiatement,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

La démonstration que nous avons employée pouvant donner lieu à quelques objections, nous la compléterons comme il suit.

Représentons par S_{p+1} la somme des $p + 1$ premiers termes de e, et par R le *reste*. De même, soit S'_{p+1} la somme des $p + 1$ premiers termes de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, R′ étant le reste. Nous aurons

$$e = S_{p+1} + R, \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = S'_{p+1} + R',$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e, \quad S'_{p+1} < S_{p+1}, \quad R' < R;$$

puis, par la démonstration ci-dessus (**129**),

$$\lim S'_{p+1} = S_{p+1}.$$

Ces diverses relations donnent

$$e - \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = R - \lim R'.$$

Dans cette nouvelle égalité, qui a son second membre *indépendant de m*, faisons croître p. Le reste R diminuera indéfiniment, et il en sera de même, à plus forte raison, pour la quantité $\lim R'$, qui ne peut surpasser R. D'ailleurs, le premier membre est une constante; donc cette constante est nulle, etc. (*).

132. Dans ce qui précède, nous avons supposé *m entier positif*. Si ce nombre est *fractionnaire positif*, il sera compris entre deux entiers consécutifs n, $n+1$; et l'on aura

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ou

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Mais,

$$\lim \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = e,$$

$$\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e;$$

donc

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Enfin, si $m = -m'$, m' étant *positif, entier ou fractionnaire*,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{m'}\right)^{-m'} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{m'}\right)^{m'}}$$

$$= \left(\frac{m'}{m'-1}\right)^{m'} = \left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'}, \text{ etc.}$$

(*) THÉORÈME. — *L'égalité* $A - B = \alpha - \beta$, *dans laquelle* A, B *sont des constantes, et* α, β *des variables ayant pour limite zéro, se décompose en* $A = B$ *et* $\alpha = \beta$.

Sommation des puissances semblables des termes d'une progression par différence.

133. Soient n nombres en progression par différence:

$$a,\ b,\ c,\ldots,\ k,\ l.$$

En désignant par δ la *raison*, on aura

$$b^{p+1} = (a+\delta)^{p+1} = a^{p+1} + \frac{p+1}{1} a^p \delta + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} a^{p-1}\delta^2 + \ldots + \frac{p+1}{1} a\delta^p + \delta^{p+1},$$

$$c^{p+1} = (b+\delta)^{p+1} = b^{p+1} + \frac{p+1}{1} b^p \delta + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} b^{p-1}\delta^2 + \ldots + \frac{p+1}{1} b\delta^p + \delta^{p+1},$$

....

$$l^{p+1} = (k+\delta)^{p+1} = k^{p+1} + \frac{p+1}{1} k^p \delta + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} k^{p-1}\delta^2 + \ldots + \frac{p+1}{1} k\delta^p + \delta^{p+1},$$

$$(l+\delta)^{p+1} = l^{p+1} + \frac{p+1}{1} l^p \delta + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} l^{p-1}\delta^2 + \ldots + \frac{p+1}{1} l\delta^p + \delta^{p+1};$$

puis, en faisant la somme des seconds membres et ayant égard à quelques réductions,

$$(l+\delta)^{p+1} = a^{p+1} + \frac{p+1}{1} S_p\delta + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} S_{p-1}\delta^2 + \ldots + \frac{p+1}{1} S_1\delta^p + n\delta^{p+1}. \qquad (1)$$

Dans cette relation générale, S_p représente la somme des puissances p des termes de la progression. De même, S_{p-1} est la somme des puissances $p-1$ de ces termes, etc. Il est évident que la formule donne S_p quand on connaît S_{p-1}, S_{p-2}, ..., S_1.

134. Considérons le cas particulier où les termes de la progression sont les nombres naturels 1, 2, 3, ..., n. Alors la relation (1)

se réduit à

$$(n+1)[(n+1)^p - 1] = \frac{p+1}{1} S_p + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} S_{p-1} + \ldots + \frac{p+1}{1} S_1. \quad (2)$$

Si l'on suppose successivement $p = 1, 2, 3, 4$, on trouve

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (3)$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (4)$$

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad (5)$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \; (*).$$

135. *Remarques.* — I. La formule (3), qui donne la somme des n premiers nombres entiers, est connue par les éléments d'algèbre (*B.*, *Alg.*, 157).

II. Dans la formule (4), qui donne *la somme des carrés des nombres naturels, le troisième facteur est égal à la somme des deux premiers.*

III. La formule (5) nous apprend que *la somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces nombres.*

Sommation des piles de boulets.

136. *Pile à base carrée.* — Cette pile a la forme d'une *pyramide quadrangulaire régulière.* La *base* de la pyramide, ou la première *couche* de la pile, est formée par des boulets rangés en carré. Si n est le nombre des boulets formant le côté du carré, cette première

(*) Les calculs se compliquent si rapidement, qu'il est déjà difficile de déterminer, par cette voie, la valeur de S_4. Par d'autres considérations, on trouve la formule générale

$$S_p = \frac{1}{p+1} A_{n+1,\,p+1} + \frac{B_p}{p} A_{n+1,\,p} + \frac{C_p}{p-1} A_{n+1,\,p-1} + \ldots + \frac{L_p}{3} A_{n+1,\,3} + \frac{1}{2} A_{n+1,\,2},$$

dans laquelle B_p, C_p, ..., L_p sont des coefficients qui suivent une loi fort simple. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, juin 1856.)

couche contiendra n^2 boulets. Il est facile de voir que les couches suivantes renferment $(n-1)^2$ boulets, $(n-2)^2$ boulets, etc. Enfin, le sommet de la pyramide est formé par un seul boulet. Conséquemment, le nombre des boulets contenus dans la pile est

$$N = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

137. *Pile triangulaire.* — Sa forme est celle d'un *tétraèdre régulier.* Les couches successives sont des triangles *équilatéraux* dont les côtés renferment n boulets, $n-1$ boulets,..., et enfin un seul boulet. Cela posé, le nombre des boulets contenus dans la première couche étant

$$n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n+1)n}{1.2},$$

le nombre des boulets de la pile sera

$$N = \frac{(n+1)n}{1.2} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + \frac{3.2}{1.2} + \frac{2.1}{1.2},$$

or, d'après le théorème du n° 119 (5°),

$$N = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

138. *Remarque.* — On peut arriver à ce résultat au moyen des formules trouvées tout à l'heure (134). Remarquons d'abord que l'on peut écrire

$$N = \sum_1^{n+1} \frac{i(i-1)}{1.2},$$

le signe Σ désignant une somme, et i recevant les valeurs $1, 2, 3 \ldots (n+1)$. D'un autre côté, *pour obtenir la somme de plusieurs polynômes, on peut ajouter les termes de même degré, et réunir les sommes partielles;* donc

$$N = \frac{1}{2}\sum_1^{n+1} i^2 - \frac{1}{2}\sum_1^{n+1} i$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{(n+1)(n+2)}{4}\right],$$

ou, en réduisant,

$$N = \frac{n(n+1)(n-2)}{6}.$$

139. *Pile à base rectangulaire.* — Les couches de cette pile, qui a la forme *d'un comble à quatre pentes,* sont formées par des boulets rangés en rectangle. Si n et $n+p$ sont les nombres des boulets contenus dans les côtés de la base, le nombre total des boulets qui la composent sera $n(n+p)$. La deuxième couche renfermera $(n-1)(n-1+p)$ boulets; et ainsi de suite. Enfin, la $n^{ième}$ couche sera une simple *file* contenant $p+1$ boulets.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} N &= n(n+p)+(n-1)(n-1+p)+\ldots+1(1+p) \\ &= n^2+(n-1)^2+\ldots+1^2+p[n+(n-1)+\ldots+1], \end{aligned}$$

ou enfin
$$N = \frac{n(n+1)}{6}[2n+3p+1].$$

140. *Remarques.* — I. Cette dernière formule résulte immédiatement de ce que *la pile proposée est décomposable en une pile à base carrée et en un prisme triangulaire.*

II. La méthode employée dans le n° 138 est applicable à beaucoup de cas. Proposons-nous, par exemple, de *trouver la somme* S *des valeurs de la fonction* $i(i-1)(2i+1)$, *i devenant successivement* 1, 2, 3, ..., n. Nous aurons

$$S = \sum_1^n i(i-1)(2i+1) = 2\sum_1^n i^3 - \sum_1^n i^2 - \sum_1^n i,$$

ou, par les formules ci-dessus (134),

$$S = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2},$$

ou encore
$$S = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(3n+4).$$

III. En observant que

$$i(i-1)(2i+1) = 2(i+1)i(i-1) - i(i-1) = 12\,C_{i+1,3} - 2\,C_{i,2},$$

on aurait, plus rapidement,

$$\begin{aligned} S &= 12\sum_1^n C_{i+1,3} - 2\sum_1^n C_{i,2} \\ &= 12\,\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4} - 2\,\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

EXERCICES.

I. Quelle est la somme S des produits que l'on obtient en multipliant terme à terme les deux progressions

$$a,\ a+\delta,\ a+2\delta,\ \ldots,\ a+(n-1)\delta,$$
$$a',\ a'+\delta',\ a'+2\delta',\ldots,\ a'+(n-1)\delta'.\ ?$$

II. A quoi se réduit cette somme, lorsque les deux progressions sont

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,\quad n,$$
$$n,\quad n-1,\quad n-2,\ldots,\quad 1?$$

Réponse : $S = \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}.$

III. Trouver la somme des produits deux à deux et la somme des produits trois à trois des n premiers nombres naturels.

IV. En admettant la formule du binôme pour le cas d'un exposant quelconque, démontrer la *série exponentielle*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

V. Calculer, au moyen de cette série, la valeur de e^{-5}, à moins de 0,01.

VI. A quoi est égal le terme général u_n de la *série récurrente*

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\quad 13,\ldots,$$

dans laquelle

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\ ?$$

Réponse :

$$u_n = \frac{n+1}{2^n}\left[1 + 5\,\frac{n(n-1)}{2.3} + 5^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4.5} + \ldots\right].$$

VII. Même question pour la série

$$2,\quad 5,\quad 11,\quad 23,\quad 47,\ldots,$$

dans laquelle

$$u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}.$$

Réponse : $u_n = 3.2^{n-1} - 1.$

CHAPITRE X.

THÉORIE DES LOGARITHMES.

Des fonctions.

141. Si deux quantités x, y sont liées par une équation, la première, à laquelle on donne des valeurs arbitraires, est appelée *variable indépendante:* l'autre variable y est dite *fonction de x*. Cette fonction est *explicite* ou *implicite,* suivant que l'équation donnée a la forme $y = f(x)$ ou la forme $F(x, y) = 0$, c'est-à-dire suivant que cette équation est ou n'est pas résolue par rapport à y.

142. On donne le nom de fonction *algébrique* à toute fonction explicite dans laquelle les opérations à effectuer sur la variable x sont des *additions, soustractions, multiplications, divisions, élévations à des puissances* et *extractions de racines,* en nombre *limité*. Par exemple,

$$y = 2x - x^3 + \frac{2}{x} - \sqrt[3]{x}$$

est une fonction algébrique.

143. Toute fonction explicite qui n'est pas algébrique, est *transcendante*. Les fonctions transcendantes les plus simples sont les fonctions *trigonométriques* ou *circulaires,* et la fonction *exponentielle a^x*.

144. Une variable x est *continue* lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque α à une autre valeur quelconque β sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction y est *continue depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \beta$*, quand elle est *réelle et finie* pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, et que, dans cet intervalle, *elle peut varier par degrés aussi petits qu'on le veut* (*).

(*) S'il est possible de rendre l'accroissement de x assez petit pour que l'accroissement correspondant de y soit, en valeur absolue, inférieur à une quantité quelconque δ, y passera par toutes les valeurs intermédiaires entre celles qui répondent aux valeurs extrêmes de x : la seconde définition ne diffère donc pas essentiellement de la première.

Discussion de la fonction exponentielle.

145. Dans *l'équation exponentielle* $y = a^x$, supposons d'abord la *constante* a plus grande que 1; faisons varier x de $-\infty$ à $+\infty$, et cherchons comment variera y.

1°. En donnant à x les valeurs entières 0, 1, 2, 3, ..., nous pourrons former le tableau suivant :

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \ldots, \quad x = +\infty,$$
$$y = 1, \quad y = a, \quad y = a^2, \quad y = a^3, \ldots, \quad y = +\infty.$$

En effet, $a^0 = 1$ (81), et *les puissances successives d'un nombre supérieur à l'unité peuvent dépasser toute limite.*

2°. *A toute valeur de x correspond une valeur de y.* Il suffit de considérer le cas où x est de la forme $\frac{p}{q}$. Or $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ *a une valeur réelle et positive* (61): cette valeur est ce que nous appelons y.

3°. *Quand x augmente, y augmente.* Soient α, $\alpha + h$ deux valeurs attribuées à x, α et h étant des quantités positives; on aura

$$a^{\alpha + h} > a^{\alpha}.$$

En effet, cette inégalité équivaut à $a^h > 1$, relation évidente en vertu de ce principe : *les puissances et les racines d'un nombre plus grand que 1 sont plus grandes que 1.*

4°. *La fonction a^x est continue.* Pour le faire voir, il suffit, en conservant les notations précédentes, d'assigner une valeur de h vérifiant l'inégalité

$$a^{\alpha + h} - a^{\alpha} < \delta. \quad (1)$$

L'accroissement h étant nécessairement fort petit, si, comme on le suppose, δ est une fraction, on peut le représenter par $\frac{1}{n}$, n étant un nombre entier inconnu. De cette manière, l'inégalité (1) deviendra, successivement,

$$a^{\alpha}(\sqrt[n]{a} - 1) < \delta,$$
$$\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{\delta}{a^{\alpha}},$$
$$\left(1 + \frac{\delta}{a^{\alpha}}\right)^n > a.$$

Or, pour satisfaire à cette dernière relation, il suffit (*B.*, *Alg.*, 169) de prendre

$$n \geqq \frac{(a-1)a^{\alpha}}{\delta};$$

d'où

$$h \leqq \frac{\delta}{(a-1)a^{\alpha}} \quad (*).$$

5°. Il résulte, de cette discussion, que *x variant d'une manière continue, de* o *à* $+\infty$, *$y = a^x$ varie d'une manière continue,* de 1 à $+\infty$.

146. Donnons maintenant à x des valeurs négatives, et soit, à cet effet, $x = -x'$, la nouvelle variable x' étant positive. Nous aurons $y = a^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}}$. D'après ce qui précède, cette fraction varie d'une manière continue entre o et $+1$, quand x' varie d'une manière continue entre $+\infty$ et o. D'ailleurs, les valeurs de x correspondant aux valeurs extrêmes de x' sont $-\infty$ et o. Nous pouvons donc former ce nouveau tableau, contenant les valeurs principales de x et de y :

$$x = -\infty,\quad x = 0,\quad x = 1,\quad x = +\infty,$$
$$y = 0,\quad y = 1,\quad y = a,\quad y = +\infty.$$

147. En résumé, la constante a étant plus grande que 1, *la fonction a^x croît, d'une manière continue, de* o *à* $+\infty$, *quand la variable x croît, d'une manière continue, de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

148. Si, dans $y = a^x$, on suppose la constante *a positive et moindre que l'unité*, on pourra la représenter par $\frac{1}{a'}$. Alors, la fonction y étant *l'inverse* de a'^x, cette fonction passera, d'une manière continue, de $+\infty$ à o, quand on fera varier x entre $-\infty$ et $+\infty$.

149. On arrive à des résultats complétement différents de ceux

(*) Soient, par exemple, $a = 10$, $\alpha = 2$, $\delta = 0,001$. On pourra prendre $h = \frac{1}{900\,000}$. Par conséquent, $100\sqrt[900000]{10} - 100 < 0,001$. Les Tables de logarithmes donneraient $h = \frac{1}{23\,026}$, valeur beaucoup plus satisfaisante que la précédente.

qui précèdent, si l'on discute l'équation $y = (-a)^x$, a étant positive. Le lecteur reconnaîtra sans peine que $(-a)^x$ *est une fonction complétement discontinue* (*). On peut attribuer à x des valeurs se succédant par degrés très-rapprochés, et pour lesquelles, néanmoins, les valeurs correspondantes de y sont alternativement *positives*, *négatives* et *imaginaires* (**).

Définition algébrique des logarithmes.

150. Dans l'équation $y = a^x$, x peut être regardée comme une fonction de y : on dit alors que *x est le logarithme du nombre y*, dans le *système* dont la *base* est a. Autrement dit, *le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle on doit élever une quantité constante, appelée base, pour reproduire le nombre donné.* Nous verrons tout à l'heure que cette définition s'accorde avec celle que l'on donne dans les éléments.

151. Supposons, comme on le fait ordinairement, la base plus grande que 1. Alors nous conclurons, du tableau ci-dessus (**146**) :

$$\log 0 = -\infty, \quad \log 1 = 0, \quad \log a = 1, \quad \log(+\infty) = +\infty.$$

Ainsi, *dans tout système de logarithmes dont la base surpasse l'unité :*

1° *Le logarithme de l'unité est zéro;* 2° *le logarithme de la base est l'unité;* 3° *le logarithme de zéro est l'infini négatif;* 4° *le logarithme de l'infini positif est l'infini positif* (***).

(*) Divers géomètres, se fondant sur une difficulté à laquelle donne lieu la *définition* de $(-a)^x$, ont contesté cette proposition.

(**) On verra, dans la *Géométrie analytique*, que l'équation

$$y = (-a)^x$$

représente *une infinité de points isolés.*

(***) On ne doit pas oublier que ces dénominations d'*infini positif* et d'*infini négatif* sont employées seulement pour éviter des périphrases. Par exemple, la quatrième remarque pourrait être énoncée ainsi : *on peut toujours trouver un nombre dont le logarithme surpasse une quantité donnée quelconque.* On se tromperait étrangement si, de ce que *le logarithme de l'infini positif est l'infini positif,* on concluait que le logarithme tend à devenir égal au nombre. En effet, *le rapport d'un logarithme au nombre correspondant diminue indéfiniment quand le nombre augmente, et a pour limite zéro.*

En outre :

5° *Les fractions proprement dites ont pour logarithmes des quantités négatives;* 6° *les quantités négatives n'ont pas de logarithmes réels.*

152. *Remarque.* — Cette dernière propriété résulte de ce que la fonction a^x reste positive quel que soit x. Elle subsiste pour toutes les valeurs *positives* de la base a. Il n'y a pas lieu d'examiner le cas où cette constante serait négative, parce qu'alors la fonction a^x deviendrait discontinue (149).

Propriétés des logarithmes.

153. Ces propriétés résultent immédiatement de la définition ci-dessus, jointe aux règles du calcul des exposants (86). En effet, soient x, x', x'',... les logarithmes des nombres y, y', y'',... dans le système dont la base est a, de sorte que

$$y = a^x, \quad y' = a^{x'}, \quad y'' = a^{x''}.....$$

1°. En multipliant membre à membre ces diverses égalités, nous aurons

$$yy'y''... = a^{x+x'+x''+...};$$

ou
$$\log(yy'y''...) = x + x' + x'' + ...,$$

ou encore

$$\log(yy'y''...) = \log y + \log y' + \log y'' + ...$$

Ainsi, *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

2°. La division de y par y' donne

$$\frac{y}{y'} = a^{x-x'},$$

ou
$$\log\frac{y}{y'} = x - x' = \log y - \log y'.$$

Donc, *le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur* (*).

3°. Elevons à une puissance quelconque n, entière ou fraction-

(*) Cette propriété est comprise dans la première, attendu que *diviser par un nombre équivaut à multiplier par son inverse.*

naire, les deux membres de l'égalité $y = a^x$; nous obtiendrons

$$y^n = a^{nx};$$

d'où
$$\log(y^n) = n\log(y).$$

Par conséquent, *le logarithme d'une puissance est égal au logarithme du nombre, multiplié par l'exposant de la puissance; le logarithme d'une racine est égal au logarithme du nombre, divisé par l'indice de la racine.*

Concordance des deux définitions des logarithmes.

154. Dans les éléments, on définit les logarithmes : *les termes d'une progression arithmétique commençant par zéro, correspondant aux termes d'une progression géométrique commençant par l'unité* (*B., Alg.*, 176). Cette définition arithmétique des logarithmes s'accorde avec la définition *algébrique* donnée ci-dessus.

Pour le faire voir, considérons d'abord l'équation exponentielle $y = a^x$, et donnons à x les valeurs

$$0,\quad \delta,\quad 2\delta,\quad 3\delta,\ldots,\quad n\delta,\ldots;$$

nous aurons, pour les valeurs correspondantes de y,

$$1,\quad (a^\delta),\quad (a^\delta)^2,\quad (a^\delta)^3,\ldots,\quad (a^\delta)^n\ldots,$$

ou
$$1,\quad a^\delta,\quad a^{2\delta},\quad a^{3\delta},\ldots,\quad a^{n\delta},\ldots.$$

Par conséquent, *lorsque les logarithmes sont en progression par différence, les nombres correspondants sont en progression par quotient.*

En second lieu, considérons les deux progressions

$$0,\quad \delta,\quad 2\delta,\quad 3\delta,\ldots,\quad n\delta,\ldots,$$
$$1,\quad q,\quad q^2,\quad q^3,\ldots,\quad q^n,\ldots,$$

et soit N un nombre donné, compris entre deux termes consécutifs de la seconde progression, ou égal à l'un d'eux (*).

Entre deux termes consécutifs de chacune des progressions, in-

(*) Le premier cas étant plus général que le second, nous négligerons celui-ci.

sérons m moyens, m étant très-grand; et soient

$$\delta' = \frac{\delta}{m+1}, \quad q' = \sqrt[m+1]{q} = q^{\frac{1}{m+1}}$$

les raisons des progressions

$$\begin{array}{llllll} 0, & \delta', & 2\delta', & 3\delta',\ldots, & n'\delta',\ldots, \\ 1, & q', & q'^2, & q'^3,\ldots, & q'^n,\ldots, \end{array}$$

qui remplacent les premières.

Nous pouvons toujours disposer du nombre entier m, de manière que l'unité soit un terme de la nouvelle progression par différence; car *l'équation*

$$i\frac{\delta}{m+1} = 1$$

admet une infinité de solutions entières (*).

Soit $q'^i = q^{\frac{1}{\delta'}} = a$ le terme de la progression par quotient qui correspond à $i\delta' = 1$: a sera la *base* du système de logarithmes. Soient, en outre, q'^l et q'^{l+1} les deux puissances consécutives de q' comprenant entre elles le nombre donné N : leurs logarithmes seront $l\delta'$ et $(l+1)\delta'$. Mais $q' = a^{\delta'}$; donc

$$\log\left(a^{l\delta'}\right) = l\delta', \quad \log\left(a^{(l+1)\delta'}\right) = (l+1)\delta'; \text{ etc.}$$

Comment on passe d'un système à un autre.

155. Soient x, x' les logarithmes d'un même nombre y, dans deux systèmes dont les bases sont a, b. Par définition,

$$y = a^x, \quad y = b^{x'}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de la seconde égalité, dans le premier système; nous aurons

$$\log_a y = x' \log_a b,$$

ou

$$x = x' \log_a b,$$

ou encore

$$x' = x\frac{1}{\log_a b}.$$

(*) Ceci suppose, bien entendu, que δ est commensurable.

Ainsi, *pour passer d'un système dont la base est a, à un autre système dont la base est b, on multiplie tous les logarithmes, calculés dans le premier système, par l'inverse du logarithme de la seconde base, ce logarithme étant pris dans le premier système.*

Définition du module.

156. Quand on passe du système *népérien*, c'est-à-dire du système dont la base est le nombre e, à un autre système ayant b pour base, le facteur constant $\frac{1}{\log_a b}$ devient $\frac{1}{\log_e b}$, ou, plus simplement, $\frac{1}{lb}$. Ce facteur constant, égal à *l'inverse du logarithme népérien de la base b*, est le *module* du système dont la base est b.

157. *Remarque.* — Le module, égal à $\frac{1}{lb}$, est égal aussi à $\log_b e$. En effet, de même que $x' = x\frac{1}{\log_a b}$, $x = x'\frac{1}{\log_b a}$; donc

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a;$$

et, en particulier,

$$\frac{1}{lb} = \log_b e.$$

Des logarithmes vulgaires.

158. Les *logarithmes vulgaires*, ou *logarithmes de Briggs* (*), sont ceux que l'on a obtenus en partant des deux progressions

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ldots,$$
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots:$$

la base de ce système de logarithmes est égale à 10. Indépendamment des propriétés générales, ces logarithmes possèdent celles-ci, qu'il suffit d'énoncer :

1°. *Le logarithme d'un nombre entier quelconque a pour partie*

(*) Henri Briggs calcula les logarithmes des nombres compris entre 1 et 20 000, et les logarithmes des nombres compris entre 90 000 et 100 000. Son ouvrage, intitulé *Arithmetica logarithmica*, parut à Londres en 1624.

entière (*) *un nombre formé d'autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans ce nombre entier;*

2°. *Pour multiplier un nombre par* 10, 100, 1000,..., *il suffit d'ajouter* 1, 2, 3,..., *unités à la caractéristique de son logarithme;*

3°. *Si deux nombres décimaux ne diffèrent que par le rang de la virgule, leurs logarithmes ne diffèrent que par la caractéristique.*

159. *Logarithmes des fractions.* — L'identité $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, donne

$$\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{a} = 0,$$

ou

$$\log \frac{a}{b} = -\log \frac{b}{a}.$$

Ainsi, *le logarithme d'une fraction proprement dite est égal au logarithme de la fraction renversée, pris en signe contraire* (151, 5°).

Il résulte de là que les fractions 0,1, 0,01, 0,001,..., ont pour logarithmes, respectivement, -1, -2, -3,.... De même, $\log\left(\frac{1}{N}\right) = -\log N$.

160. Réciproquement, *le nombre correspondant à un logarithme négatif est de la forme* $\frac{1}{N}$, N *étant le nombre correspondant au logarithme donné, pris positivement.*

161. *Logarithmes à caractéristique négative et à partie décimale positive.* — Les fractions de la forme $\frac{1}{N}$ étant peu commodes, surtout quand le dénominateur N est accompagné de décimales, on fait, sur les logarithmes *entièrement négatifs*, une transformation qui équivaut à la réduction de $\frac{1}{N}$ en décimales.

Soit, pour fixer les idées,

$$x = \frac{237}{87\,852}.$$

(*) On sait que cette partie entière est appelée *caractéristique*. Les géomètres allemands donnent, à la partie décimale d'un logarithme, le nom de *mantisse*.

On trouve, dans la *Table de Callet* (*),

$$\begin{aligned} \log 237 &= 2{,}3747484 \\ \log 87\,852 &= \underline{4{,}9437517} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\log x = -\,2{,}5690033$$

Ajoutons, à $\log x$, le nombre entier immédiatement supérieur à $-\log x$, et retranchons ce nombre entier; nous aurons

$$\log x = 3 - 2{,}5690033 - 3 = 0{,}4309967 - 3.$$

Pour abréger, apportons la partie négative -3 à la place de la caractéristique o, et, pour éviter toute ambiguïté, plaçons le signe — au-dessus du chiffre 3; nous aurons

$$\log x = \bar{3}{,}4309967.$$

En comparant ce nouveau logarithme à celui qui est écrit plus haut, nous obtiendrons cette règle générale :

Pour transformer un logarithme entièrement négatif en un logarithme à caractéristique négative et à partie décimale positive, placez le signe — au-dessus de la caractéristique, après l'avoir augmentée d'une unité, et écrivez, à la suite de cette caractéristique négative, le complément (**) *de la partie décimale du logarithme donné.*

162. Nous avons dit que cette transformation équivaut à une réduction de fraction ordinaire en fraction décimale. Pour le faire voir, reprenons la fraction $\frac{237}{87852}$. Si nous la multiplions par une puissance de 10 qui la rende plus grande que 1 et plus petite que 10, nous aurons, en divisant en même temps par cette puissance,

$$x = \frac{\dfrac{237\,000}{87\,852}}{10^3};$$

d'où

$$\log x = \log\frac{237\,000}{87\,852} - 3.$$

(*) Pour la disposition des Tables de Callet, la *proportion logarithmique*, etc., *voyez* le *Manuel du Baccalauréat, Alg.*, n° **20**.

(**) Le *complément* d'une fraction décimale proprement dite est ce qu'il faut y ajouter pour obtenir l'unité.

Mais,
$$\log \frac{237\,000}{87\,852} = \log 237 + 3 - \log 87\,852$$
$$= 3 - (\log 87\,852 - \log 237);$$

donc $\log x = 3 - 2{,}5690033 - 3 = 0{,}4309967 - 3,$

ou
$$\log x = \bar{3}{,}4309967,$$

comme ci-dessus.

163. *Remarque.* — Le logarithme $\bar{3}{,}4309967$ correspond à la *fraction décimale* $\frac{\frac{237\,000}{87\,852}}{10^3}$, laquelle, d'après ce qui précède, est comprise entre 0,001 et 0,010. Il résulte, de cette observation, que *le nombre correspondant à un logarithme dont la caractéristique seule est négative, est une fraction décimale proprement dite, dans laquelle le premier chiffre significatif occupe, à partir de la virgule, un rang marqué par cette caractéristique.*

Usage des Tables de Callet.

164. PROBLÈME I. — *Un nombre étant donné, trouver son logarithme.*

Premier cas. — *Le nombre est entier, et plus petit que* 108 000.

Le logarithme est inscrit dans la Table, sauf la caractéristique, qui est connue à l'avance (158, 1°).

Deuxième cas. — *Le nombre est entier, et plus grand que* 108 000.

Soit le nombre $x = 2\,647\,853$. Séparons assez de chiffres, sur la droite de ce nombre, pour que la partie restant à gauche soit comprise entre 10 000 et 108 000; nous aurons

$$\frac{x}{100} = 26\,478{,}53,$$

et la partie décimale du logarithme de ce dernier nombre sera égale à celle du logarithme de x. Or on trouve dans la Table,

$$\log 26\,478 = 4{,}4228852.$$

Il ne s'agit donc plus que de calculer la différence δ entre ce dernier logarithme et celui de 26 478,53. Pour cela, posons la proportion

$$\frac{26\,479 - 26\,478}{26\,478{,}53 - 26\,478} = \frac{\log 26\,479 - \log 26\,478}{\log 26\,478{,}53 - \log 26\,478},$$

ou
$$\frac{1}{0{,}53} = \frac{\text{diff. tab.}}{\delta}.$$

Elle donne

$$\delta = \text{diff. tab.} \times 0,53 = 164 \times 0,53.$$

Pour épargner au calculateur la peine d'effectuer la petite multiplication que nous rencontrons ici, on a inscrit, dans la Table, les produits de 164 par 0,1, 0,2, etc., *ces produits étant toujours exprimés en unités du septième ordre décimal.* D'après cela, nous aurons

$$\delta = 164 \times (0,5 + 0,03) = 164 \times 0,5 + \frac{164 \times 0,3}{10}$$
$$= 82 + \frac{49}{10} = 82 + 5 = 87.$$

Puis, en ajoutant cette différence au logarithme de 26 478,

$$\log 26\,748,53 = 4,4228939,$$

et enfin

$$\log 2\,674\,853 = 6,4228939.$$

Voici la disposition du calcul :

log 26 478	=	6,4228852 (*)
pour 0,5 ...		82
pour 0,03 ...		5
log 2 647 853	=	6,4228939

Troisième cas. — *Le nombre contient des décimales.*

On fait abstraction de la virgule, et l'on retombe sur les cas précédents.

Quatrième cas. — *Le nombre donné est une fraction.*

On a vu ci-dessus comment le logarithme d'une fraction se déduit des logarithmes de ses deux termes.

165. Problème II. — *Un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant.*

Premier cas. — *Le logarithme se trouve dans la Table.*

Nous supposons que le lecteur connaît la disposition des Tables : ce premier cas n'exige donc aucune explication.

Deuxième cas. — *Le logarithme donné tombe entre deux logarithmes consécutifs de la Table.*

Soit $\log x = 3,67742 37$.

(*) Il n'est pas nécessaire de modifier la caractéristique : on écrit tout de suite sa valeur définitive.

En cherchant dans la Table, on trouve que le logarithme qui approche le plus du $\log x$, *par défaut*, est 6 774 153 (*); le nombre correspondant à ce dernier logarithme est 47 579; donc

$$x = 47\,579 + \delta,$$

δ étant inférieur à l'unité.

Pour évaluer δ, on suppose encore les différences entre les nombres proportionnelles aux différences entre les logarithmes, c'est-à-dire que l'on écrit

$$\frac{\delta}{1} = \frac{6\,774\,237 - 6\,774\,153}{\text{diff. tab.}},$$

ou

$$\delta = \frac{84}{91}.$$

Si l'on réduisait cette fraction en décimales, on trouverait $\delta = 0{,}92$; mais les Tables de Callet permettent encore d'éviter ce calcul. En effet, en parcourant la petite colonne des différences, on lit 9 en regard de 82; donc δ se compose d'abord de 0,9. Ensuite, si l'on place un zéro à la droite de $84 - 82 = 2$, on a 20 pour produit. Or, dans la même petite Table, 18 répond à 2 dixièmes; donc 20 correspond, à fort peu près, à 2 centièmes. La seconde partie de δ est donc cette dernière fraction, en sorte que $\delta = 0{,}92$, comme ci-dessus.

En revenant à la recherche qui nous occupe, nous aurons $x = 47\,579{,}92$. Mais la caractéristique donnée était 3; donc enfin,

$$x = 4\,757{,}992, \text{ à moins de } 0{,}001.$$

Voici le type du calcul :

$$\begin{array}{rrrr}
\log x = & 3{,}6774237 & & \\
\log 47\,579 = & {,}6774153 & & \\
\hline
 & 84 & & \\
\textit{pour} & 82 & 9 & \\
\textit{pour} & 2 & & 2 \\
x = & 4\,757{,}992. & &
\end{array}$$

(*) Dans la recherche du nombre correspondant à un logarithme donné, on ne fait attention à la caractéristique que pour déterminer, en dernier lieu, la place de la virgule.

Troisième cas. — *Le logarithme donné est entièrement négatif.*

Soit $\log x = -\ 4,7248374$.

Posons $\log N = 4,7248374$; nous trouverons $N = 53068,57$ donc (160)

$$x = \frac{1}{53068,57}.$$

Quatrième cas. — *La caractéristique seule est négative.*

On a vu ci-dessus (163) ce qu'il faut faire pour obtenir le nombre.

EXERCICES.

I. Discuter les fonctions

$$y = x^{\frac{1}{x}},\quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,\quad y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x,\quad y = x\,l\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ (^*).$$

II. Satisfaire aux inégalités

$$\frac{a^x}{x} > N,\quad \frac{a^x}{x^m} > N,\quad \frac{x}{\log x} > N,\quad \frac{x^k}{\log x} > N.$$

(On suppose $a > 1$, $m > 1$, $k > 0$, $N > 1$.)

III. La série

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \ldots + \frac{1}{n\log n} + \ldots$$

est divergente.

(*) La discussion *complète* exige la théorie des dérivées.

CHAPITRE XI.

APPLICATIONS DES LOGARITHMES.

Calculs numériques.

166. Premier exemple :

$$x = \frac{\sqrt[3]{52\,678,47}}{\sqrt[4]{923\,744,18}}.$$

$$\log x = \frac{1}{3}\log 52\,678,47 - \frac{1}{4}\log 923\,744,18$$

$\log 52\,678$	$= 4,7216293$
$0,4$	33
$0,07$	6
$\log 52\,678,47$	$= 4,7216332$
$\frac{1}{3}$	$= 1,5738777 +$
$\log 923\,740$	$= 5,9655497$
$4\ldots.$	19
$0,1$	0
$0,18$	0
$\log 923\,744,18$	$= 5,9655516$
$\frac{1}{4}$	$= 1,4913879 -$
$\log x$	$= 0,0824898$
nombre corresp. 12091.....	4622
0,7 *pour*.....	276
	253
0,06 *pour*.....	23
x	$= 1,209176.$

167. Deuxième exemple :

$$x = \frac{\sqrt[5]{0{,}000\,384\,74\sqrt[3]{\dfrac{89\,748}{124\,723}}}}{\sqrt[4]{724\,674\sqrt[3]{0{,}000\,674\,237\,5}}}.$$

$$\log x = \frac{1}{5}\left[\log 0{,}000\,384\,74 + \frac{1}{3}\log\frac{89\,748}{124\,725}\right]$$
$$-\frac{1}{4}\left[\log 724\,674 + \frac{1}{3}\log 0{,}000\,674\,237\,5\right].$$

$$\log 89\,748 = 4{,}9530248$$
$$\log 124\,723 = 5{,}0959466$$
$$\log\frac{89\,748}{124\,723} = \bar{1}{,}8570782$$
$$\frac{1}{3}(*) = \bar{1}{,}9523594 +$$
$$\log 0{,}000\,384\,74 = \bar{4}{,}5851673 +$$
$$\bar{4}{,}5375267$$
$$\frac{1}{5} = \bar{1}{,}3075053 +$$
$$\log 0{,}000\,674\,237\,5 = \bar{4}{,}8288130$$
$$\frac{1}{3} = \bar{2}{,}9429377 +$$
$$\log 724\,674 = 5{,}8601427 +$$
$$4{,}8030804$$
$$\frac{1}{4} = 1{,}2007701 -$$
$$\log x = \bar{2}{,}1067352;$$
$$x = 0{,}012\,786\,0.$$

(*) Pour prendre le $\frac{1}{3}$ de $\bar{1}{,}8570782$, on observe que ce logarithme $= -1 + 0{,}8570782 = -3 + 2{,}8570782$, *en rendant la caractéristique divisible par* 3. Par suite,

$$\frac{1}{3}(\bar{1}{,}8570782) = -1 + \frac{1}{3}\,2{,}8570782 = \bar{1}{,}9523594.$$

On opère de même dans tous les cas analogues à celui-là.

168. Troisième exemple :

$$x = \sqrt[157]{\left(\frac{829}{828}\right)^{361}}.$$

$$\log x = \frac{361}{157} \log \frac{829}{828}$$

$$\log 829 = 2{,}91855453$$
$$\log 828 = 2{,}91803034$$

$$\log \frac{829}{828} = 0{,}00052419$$

$$\log x = \frac{361}{157} \times 0{,}000\,524\,17.$$

Pour éviter la multiplication $\frac{361}{157}$, prenons les logarithmes des deux membres ; nous aurons

$$\log \log x = \log \frac{361}{157} + \log 0{,}000\,524\,19.$$

$$\log 361 = 2{,}5575072 +$$
$$\log 157 = 2{,}1958996 -$$
$$\log 0{,}000\,524\,19 = \bar{4}{,}7194887 +$$

$$\log \log x = \bar{3}{,}0810963$$
$$\log x = 0{,}0012053;$$
$$x = 1{,}002\,78.$$

169. Quatrième exemple : *Quelle est la plus petite valeur entière de n satisfaisant à l'inégalité* $\left(\frac{100}{99}\right)^n > \frac{200\,000}{3}$?

$$n > \frac{\log \frac{200\,000}{3}}{\log \frac{100}{99}}.$$

$$\log n > \log \log \frac{200\,000}{3} - \log \log \frac{100}{99}.$$

$$\begin{aligned}
\log 200\,000 &= 5{,}30103000 \\
\log 3 &= 0{,}47712125 \\
\hline
\log \frac{200\,000}{3} &= 4{,}82390875 \\
\log\log \frac{200\,000}{3} &= 0{,}6833991 + \\
\log 100 &= 2, \\
\log 99 &= 1{,}99563519 \\
\hline
\log \frac{100}{99} &= 0{,}00436481 \\
\log\log \frac{100}{99} &= \bar{3}{,}6399653 - \\
\hline
\log n &> 3{,}0434338; \\
n &> 1105{,}1.
\end{aligned}$$

170. Cinquième exemple : *Résoudre l'inégalité*

$$\left(\frac{100}{99}\right)^n > \frac{2\,000}{3}\left[1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{150}\right].$$

Commençons par calculer, approximativement,

$$1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{150}.$$

$$\begin{aligned}
\log 99 &= \quad 1{,}99563519 \\
150 \log 99 &= 299{,}3452785 + \\
150 \log 100 &= 300 \qquad\qquad - \\
\hline
\log \left(\frac{99}{100}\right)^{150} &= \quad \bar{1}{,}3452785. \\
\left(\frac{99}{100}\right)^{150} &> \quad 0{,}22145. \\
1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{150} &< \quad 0{,}77855.
\end{aligned}$$

Ce dernier nombre étant un peu supérieur à $1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{150}$, il s'ensuit que l'on vérifiera l'inégalité proposée, si l'on satisfait à celle-ci :

$$\left(\frac{100}{99}\right)^n > \frac{2\,000}{3} \cdot 0{,}77855.$$

On tire, de cette dernière,

$$n > \frac{\log 2\,000 + \log 0{,}778\,55 - \log 3}{\log 100 - \log 99}.$$

$$\begin{aligned} \log 2\,000 &= 3{,}3010300 + \\ \log 0{,}778\,55 &= \bar{1}{,}8912865 + \\ \log 3 &= 0{,}4771212 - \\ & \overline{2{,}7151953 +} \\ \log 100 &= 2 \\ \log 99 &= 1{,}9956352 \\ & \overline{0{,}0043648 -} \end{aligned}$$

Donc $$n > \frac{27\,151\,953}{43\,468},$$

ou $$n > 624{,}64.$$

Résolution des équations exponentielles.

171. On appelle *équation exponentielle* une équation de la forme

$$a^x = b,$$

x étant l'inconnue. Lorsque, comme on le suppose habituellement, a et b sont des quantités positives, cette équation admet toujours une racine réelle (**147**). Pour la déterminer, il suffit de prendre les logarithmes des deux membres, dans un système quelconque. En effet, on obtient ainsi

$$x \log a = \log b,$$

ou $$x = \frac{\log b}{\log a}\ (^*).$$

172. *Remarque.* — Quand les constantes a et b sont toutes deux plus grandes ou toutes deux plus petites que l'unité, la valeur de x est positive; elle est négative dans le cas contraire.

(*) Les inégalités proposées dans les nos **169** et **170** ont été résolues par ce procédé.

Des intérêts composés et des annuités.

173. Une somme est placée à *intérêt composé* quand le prêteur, au lieu de recevoir, à la fin de chaque année, l'*intérêt simple* qui lui est dû, le laisse à la disposition de l'emprunteur, de manière à augmenter le capital.

L'intérêt composé, tel qu'il vient d'être défini, donne lieu aux problèmes suivants :

174. Problème I. — *Quelle sera, au bout de n années, la valeur* A *d'un capital a placé à intérêt composé, le taux étant de r pour franc par an?*

r étant l'intérêt de 1 franc, ou, plus exactement, r étant le rapport entre cet intérêt et 1 franc, il s'ensuit que 1 franc vaut, à la fin de l'année, $1^f \times (1+r)$. Par suite, un capital quelconque a vaut, au bout d'un an, $a(1+r) = a'$.

Si, à la fin de l'année, l'emprunteur ne paye aucun intérêt au prêteur, il jouit, pendant l'année suivante, de cet intérêt et du capital a : les choses se passent comme si, au lieu d'avoir reçu primitivement la somme a, l'emprunteur avait reçu la somme a' au commencement de la deuxième année. Conséquemment, et d'après la formule précédente, le capital a vaut, au bout de deux ans, $a'(1+r) = a(1+r)^2$.

En répétant le même raisonnement, on trouve

$$A = a(1+r)^n. \quad (1)$$

175. Problème II. — *Au bout de combien d'années un capital a, placé à intérêt composé, aura-t-il acquis la valeur* A?

Il est clair qu'il s'agit de résoudre l'équation (1), par rapport à n. Cette résolution se fait commodément par le moyen des logarithmes; elle donne (171)

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}. \quad (2)$$

176. Problème III. — *Quelle valeur produira-t-on au bout de n années, si on place, au commencement de chacune d'elles, un même capital a, et qu'on accumule, avec toutes ces sommes, leurs intérêts composés?*

D'après la formule (1), cette valeur est, évidemment, la somme s des termes de la progression par quotient :

$$a(1+r)^n,\ a(1+r)^{n-1}, \ldots,\ a(1+r);$$

donc $$s = a(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \quad (3)$$

177. **Problème IV.** — *Quelle somme b doit-on payer annuellement, pour amortir, au bout de n années, un capital a et ses intérêts composés?*

Cette somme b est ce qu'on appelle une *annuité*. Pour la déterminer, il suffit d'exprimer que la valeur du capital a, à la fin de la $n^{ième}$ année, est égale à la somme des valeurs des n annuités, au bout de ce même temps. On obtient ainsi, en appelant r l'intérêt de 1 franc,

$$a(1+r)^n = b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + \ldots + b(1+r) + b,$$

ou $$a(1+r)^n = b\frac{(1+r)^n - 1}{r}. \quad (4)$$

Cette formule générale donne la solution de diverses questions relatives aux annuités.

Si, par exemple, on veut *déterminer combien il faut d'années pour amortir un capital a au moyen d'annuités égales à b,* on devra résoudre l'équation (4) par rapport à n. Or, en faisant passer $(1+r)^n$ dans le premier membre, on obtient d'abord

$$(1+r)^n(b - ar) = b;$$

puis, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$n = \frac{\log b - \log(b - ar)}{\log(1+r)}. \quad (5)$$

178. *Discussion.* — 1°. Si l'on suppose $b > ar$, c'est-à-dire *si l'annuité surpasse l'intérêt simple du capital,* la formule (5) donnera pour n une *valeur finie et positive.* Cette valeur sera très-grande, quand l'excès de b sur ar sera très-petit.

2°. Si $b = ar$, $n = \dfrac{\log b - \log 0}{\log(1-r)}$. Or, $\log 0 = -\infty$; donc $n = +\infty$. Il est facile d'interpréter ce résultat : quand l'emprunteur ne paye, à la fin de chaque année, que l'intérêt simple du capital, il ne cesse pas de devoir ce capital; on ne peut donc demander à quelle époque la dette sera éteinte.

Ce cas est celui des *rentes perpétuelles.*

3°. Enfin, si l'on suppose $b < ar$, c'est-à-dire *si l'annuité est inférieure à l'intérêt simple du capital*, le second membre de la formule contient le *logarithme d'une quantité négative;* donc cette formule ne donne aucune valeur réelle pour n (151, 6°). C'est ce qu'il est encore facile d'expliquer.

En effet, nous venons de voir que la *dette est constante* quand l'annuité est égale à l'intérêt simple; donc, quand cette annuité est inférieure à l'intérêt simple, *la dette, au lieu de diminuer, augmente sans cesse*. Ce résultat, qui peut paraître étrange, est une conséquence toute naturelle du principe de l'intérêt proportionnel au temps.

EXERCICES.

I. Pendant combien d'années doit-on laisser un capital placé à $4\frac{1}{2}$ pour 100, pour que la valeur en soit décuplée?

Réponse : Pendant un peu plus de 52 ans.

II. *Thomas Parr* vécut 152 ans (*). Si, à partir de sa vingt-cinquième année, il avait placé tous les ans, au taux de 6 pour 100, une somme de 10 livres sterling, combien ses héritiers auraient-ils dû recevoir à sa mort?

Réponse : 28 900 livres.

III. Au bout de combien d'années aura-t-on amorti un capital de 100 francs, emprunté à 5 pour 100, si l'on paye, annuellement, $5^f,10$?

Réponse : Au bout d'environ 80 ans.

IV. Combien aurait valu, à la fin de 1852, une somme de 1 franc placée à 5 pour 100 au commencement de l'an 800?

Réponse : 20 574 000 000 000 000 000 000 francs.

V. Quelle est la plus petite valeur entière de x satisfaisant à l'inégalité

$$(1,01)^x > 10x?$$

Réponse : $x = 917$.

VI. Une personne emprunte pour un an, *à intérêt composé*, un *capital a*. Elle convient de se libérer au moyen de n payements égaux, effectués à des intervalles de temps égaux entre eux : le premier payement sera fait $\frac{1}{n}$ d'année après le moment de l'em-

(*) Il mourut en 1634.

prunt. Le taux de l'intérêt est de $\frac{r}{n}$ *pour franc, pour* $\frac{1}{n}$ *d'année.* On demande :

1°. La valeur b de chacun des payements;

2°. Vers quelle limite tend le rapport $\frac{nb}{a}$, lorsque n augmente indéfiniment?

3°. Comment varie cette limite lorsque r diminue?

4°. Quelle est la valeur de cette limite pour $r = 0$?

VII. On veut *amortir*, en n années, un capital a et ses intérêts composés, au moyen d'annuités décroissant comme les nombres $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$. Le taux de l'intérêt est r pour franc. Quelle sera la valeur du premier payement?

Réponse : $\frac{nr^2(1+r)^2}{(nr-1)(1+r)^n+1}a.$

CHAPITRE XII.

THÉORIE DES DÉRIVÉES.

Des fonctions dérivées.

179. Si, dans l'équation à deux variables

$$y = f(x), \quad (1)$$

on attribue à x un accroissement h (*), y prendra un accroissement correspondant k, déterminé par

$$y + k = f(x+h). \quad (2)$$

La valeur de cet accroissement sera donc

$$k = f(x+h) - f(x).$$

Par suite, *le rapport entre l'accroissement de la fonction et l'accroissement de la variable* aura pour expression

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3)$$

(*) L'accroissement h peut être positif ou négatif : ordinairement, on le suppose positif.

Cela posé, si h diminue indéfiniment, il en sera de même pour k. Mais, comme à chaque instant le rapport $\frac{k}{h}$ a une valeur déterminée, on conçoit que cette valeur tend vers une certaine limite, qu'elle atteint seulement lorsque h, et par suite k, sont devenus égaux à zéro. Cette limite, qui dépend évidemment de la nature de la fonction $f(x)$, est dite la *dérivée* de cette fonction. Par conséquent,

On appelle dérivée d'une fonction la limite vers laquelle tend le rapport entre l'accroissement de cette fonction et l'accroissement de la variable, lorsque ce dernier accroissement tend vers zéro.

180. *Remarque.* — Si, dans l'équation (3), on suppose $h = 0$, le second membre prend la forme $\frac{0}{0}$. Par suite, pour obtenir directement la dérivée d'une fonction, il faudra, dans la plupart des cas, mettre le rapport $\frac{k}{h}$ sous une forme telle, que la limite de ce rapport, c'est-à-dire la dérivée, ne semble plus indéterminée.

181. Soit, par exemple,

$$y = f(x) = x^3 - 2x + 7;$$

on aura
$$y + k = (x + h)^3 - 2(x + h) + 7,$$

puis
$$\frac{k}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h}{h}.$$

Si l'on faisait tout de suite $h = 0$, le numérateur s'annulerait en même temps que le dénominateur; mais, h étant facteur commun à tous les termes, on a

$$\frac{k}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 2.$$

Actuellement, si h tend vers zéro, les termes $3xh$ et h^2 diminuent indéfiniment, tandis que les autres sont *constants*. Donc

$$\lim \frac{k}{h} = f'(x) = 3x^2 - 2.$$

Nous venons de vérifier, dans un cas très-simple, l'*existence*

de la dérivée ; cette vérification a été faite sur toutes les fonctions que considère l'analyse.

182. *Remarque.* — Le rapport $\frac{k}{h}$ ayant pour limite $f'(x)$, on peut le représenter par $f'(x)+\varepsilon$, *ε étant une quantité qui s'annule avec h.* Ainsi,

$$\frac{k}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

ou

$$k=h[f'(x)+\varepsilon]\ (*).$$

183. *Dérivée de la variable indépendante.* — Si l'équation (1) se réduit à $y=x$, l'accroissement k devient égal à l'accroissement h. Donc $\frac{k}{h}=1$ et $\lim\frac{k}{h}=y'=1$: *la dérivée de la variable indépendante est égale à l'unité.*

184. *Dérivée d'une constante.* — Elle est évidemment *zéro.*

Dérivée d'une somme, d'un produit, etc.

185. *Dérivée d'une somme.* — Soient u, v, w,... des fonctions de x, dont les dérivées u', v', w',... sont supposées connues, et soit y la fonction formée avec les premières, par voie d'addition ou de soustraction, de sorte que

$$y=u+v-w+\dots\quad(1)$$

Donnons à x un accroissement quelconque Δx (**) : u, v, w,..., y prendront des accroissements correspondants Δu, Δv, Δw,..., Δy; et nous aurons

$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-w-\Delta w+\dots;\quad(2)$$

(*) On peut prouver, directement ou par la géométrie, que si $f(x)$ et $f'(x)$ *restent finies et continues entre x et $x+h$,*

$$\frac{k}{h}=f'(x+\theta h),$$

θ étant une fraction proprement dite.

(**) La *caractéristique* Δ indique la *différence* qui existe entre deux valeurs d'une variable, ou l'*accroissement* qu'elle subit en passant de la première valeur à la seconde.

puis, en retranchant membre à membre,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w + \ldots \text{ (*)}. \quad (3)$$

Divisant tous les termes par Δx, et *passant à la limite*, nous obtiendrons

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim \frac{\Delta w}{\Delta x} + \ldots,$$

ou enfin, en désignant par y' la dérivée de y,

$$y' = u' + v' - w' + \ldots. \quad (A)$$

Ainsi, *la dérivée d'une somme ou d'une différence de fonctions est égale à la somme ou à la différence des dérivées de ces fonctions.*

186. *Dérivée d'un produit de deux facteurs.* — Soit

$$y = uv, \quad (1)$$

u et v étant des fonctions d'une variable indépendante x. En opérant comme dans le numéro précédent, on trouve, successivement,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$

$$y' = uv' + vu' + \lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right).$$

Le facteur $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers la quantité finie u', tandis que le facteur Δv a pour limite zéro; donc

$$\lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = 0,$$

et

$$y' = uv' + vu'. \quad (B)$$

Ce résultat s'énonce ainsi : *La dérivée d'un produit de deux facteurs est égale au premier facteur multiplié par la dérivée*

(*) Cette relation exprime que l'*accroissement d'une somme est égal à la somme des accroissements des parties*, ce qui est assez évident.

du second, plus au second facteur multiplié par la dérivée du premier.

187. *Remarques.* — I. Si l'un des deux facteurs est constant, c'est-à-dire si le produit est de la forme $y = av$, on a simplement

$$y' = av'.$$

II. En divisant membre à membre les égalités (B) et (1), on obtient

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Par conséquent, *le rapport entre la dérivée d'un produit et ce produit, est égal à la somme que l'on obtient en divisant la dérivée de chaque facteur par ce facteur.*

188. *Dérivée d'un produit de plusieurs facteurs.* — Nous commencerons par faire voir que si la dernière proposition est vraie pour le cas de $n - 1$ facteurs, elle subsiste dans celui de n facteurs : ce lemme étant démontré, la proposition sera générale, puisqu'elle a lieu dans le cas de deux facteurs.

Soit $\quad y = u_1 . u_2 . u_3 \ldots u_{n-1} . u_n,$

ou $\quad y = \mathrm{P} u_n,$

en posant $\quad \mathrm{P} = u_1 . u_2 . u_3 \ldots u_{n-1}.$

Par hypothèse,

$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \ldots + \frac{u'_{n-1}}{u_{n-1}};$$

d'ailleurs $\quad \dfrac{y'}{y} = \dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} + \dfrac{u'_n}{u_n};$

donc $\quad \dfrac{y'}{y} = \dfrac{u'_1}{u_1} + \dfrac{u'_2}{u_2} + \ldots + \dfrac{u'_{n-1}}{u_{n-1}} + \dfrac{u'_n}{u_n};$ etc.

Actuellement, multiplions par $y = u_1 u_2 \ldots u_n$ les deux membres de la dernière égalité, nous aurons

$$y' = u_2 u_3 \ldots u_n u'_1 + u_1 u_3 \ldots u_n u'_2 + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_{n-1} u'_n. \quad \text{(C)}$$

Ainsi, *la dérivée d'un produit est égale à la somme des résultats que l'on obtient en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit des autres facteurs.*

189. *Dérivée d'un quotient.* — De

$$y = \frac{u}{v},$$

on conclut $$vy = u;$$

puis, en appliquant la remarque ci-dessus,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$$

et enfin $$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \quad \text{(D)}$$

Donc, *la dérivée d'une fraction est égale au dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur* (*).

190. *Remarque.* — Si la fraction a la forme $y = \frac{a}{v}$, a étant une constante, $a' = 0$ (184), et

$$y' = -\frac{a}{v^2}.$$

191. *Dérivée d'une puissance.* — Soit $y = u^n$, l'exposant étant d'abord supposé entier et positif. Cette fonction est le produit de n facteurs égaux à u; donc, par la formule (C),

$$y' = nu^{n-1}u'. \quad \text{(E)}$$

Ainsi, *pour obtenir la dérivée d'une puissance de fonction, on la multiplie par son exposant, on diminue cet exposant d'une unité, et on multiplie le résultat par la dérivée de la fonction.*

192. On va voir que cette règle subsiste, quelle que soit la forme de l'exposant n.

1°. Si $n = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers positifs,

$$y^q = u^p,$$

puis $$qy^{q-1}y' = pu^{p-1}u' \text{ (**)};$$

(*) La notation algébrique est, on le voit, plus commode que le langage ordinaire.

(**) En effet, si, dans $y^q = u^p$, on remplaçait y et u par leurs valeurs, on obtiendrait *deux fonctions identiques*, dont les dérivées seraient identiques.

mais $$y^{q-1} = \frac{y^q}{y} = u^{p-\frac{p}{q}};$$

donc $$y' = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} u'.$$

2°. Soit $n = -p$, p étant entier ou fractionnaire, mais positif. Alors $y = \frac{1}{u^p}$; puis (190)

$$y' = -\frac{pu^{p-1}u'}{u^{2p}} = -pu^{-p-1}u',$$

ou, simplement, $$y' = nu^{n-1}u'.$$

193. *Dérivée d'une racine carrée.* — Dans le cas particulier de $y = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u}$, on a

$$y' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Donc, *la dérivée d'une racine carrée est égale à la dérivée de la fonction placée sous le radical, divisée par le double du radical.*

Dérivées des fonctions algébriques.

194. Au moyen des règles précédentes, on trouvera très-aisément la dérivée d'une fonction *algébrique et explicite* quelconque. Voici quelques exemples simples :

I. Soit

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

un polynôme entier par rapport à x. On aura, par l'application des règles (A), (B), etc.,

$$y' = m A_0 x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + (m-2) A_2 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}.$$

II. Plus généralement, soit

$$y = A x^m + B x^n + C x^p + D x^q + \ldots,$$

les exposants étant quelconques; la dérivée sera

$$y' = m A x^{m-1} + n B x^{n-1} + p C x^{p-1} + q D x^{q-1} \ldots.$$

Ainsi, *la dérivée d'un polynôme, fonction d'une lettre x, est*

égale à la somme des résultats que l'on obtient en multipliant chaque terme par l'exposant de x, et diminuant cet exposant d'une unité.

III. $$y = (x^3 - 3x - 5)^2 (x^2 + 2x - 1)^3.$$

Ici la fonction y est le produit de deux facteurs, lesquels sont des puissances de polynômes. Donc (186),

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 - 3x + 5)^2\, 3\,(x^2 + 2x - 1)^2 (2x + 2) \\ &\quad + (x^2 + 2x - 1)^3\, 2\,(x^3 - 3x + 5)(3x^2 - 3) \\ &= 6(x^3 - 3x + 5)(x^2 + 2x - 1)^2 (x + 1) \\ &\quad \times [x^3 - 3x + 5 + (x^2 + 2x - 1)(x - 1)], \end{aligned}$$

ou enfin

$$y' = 6(x^3 - 3x + 5)(x^2 + 2x - 1)^2 (x + 1)(2x^3 + x^2 - 6x + 6).$$

IV. $$y = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x} + \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}.$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right) - \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2} \\ &\quad + \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) - \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^2}; \end{aligned}$$

ou, après quelques réductions,

$$y' = 8x \ (*).$$

Dérivées des fonctions de fonctions.

195. Soient $y = f(u)$ et $u = F(x)$: y est *fonction d'une fonction* de la variable indépendante x; et il s'agit d'exprimer la

(*) On arrive plus rapidement à ce résultat, si l'on commence par mettre la fonction y sous la forme

$$y = 2(2x^2 + 1).$$

dérivée de y, relative à cette variable, au moyen des dérivées $f'(u)$ et $F'(x)$, et sans qu'il soit nécessaire de remplacer u par sa valeur dans $f(u)$.

Pour cela, donnons à x l'accroissement Δx : y et u prendront des accroissements correspondants, Δy et Δu, et nous aurons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (*),$$

puis, en passant à la limite, et en désignant par y' la dérivée de y par rapport à x,

$$y' = f'(u) . F'(x),$$

ou encore

$$y' = f'(u) . u'.$$

196. Si l'on avait $y = f(u)$, $u = F(v)$ et $v = \varphi(x)$, on trouverait

$$y' = f'(u) . F'(v) . \varphi'(x);$$

et ainsi de suite. Donc, en général,

La dérivée d'une fonction de fonctions est égale au produit des dérivées des fonctions qui la composent, chacune de ces dérivées étant prise par rapport à la variable dont la fonction dépend immédiatement.

197. *Remarque.* — La règle qui nous a donné la dérivée de u^n (191) peut être regardée comme une application de ce théorème.

Dérivées des fonctions logarithmiques et exponentielles.

198. *Dérivée de* $\log x$. — La base du système de logarithmes étant quelconque, on aura successivement

$$y = \log x, \quad y + k = \log(x + h),$$

$$\frac{k}{h} = \frac{\log(x + h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Si l'on supposait $h = 0$, le second membre deviendrait $\frac{0}{0}$, ainsi

(*) En général, A, B, C *étant trois grandeurs de même espèce, le rapport de la première grandeur à la deuxième, multiplié par le rapport de la deuxième à la troisième, donne le rapport de la première à la troisième.* (B., *Arith.*, **208**.)

qu'on pouvait s'y attendre (180). Pour faire cesser l'indétermination, on remplace $\frac{h}{x}$ par $\frac{1}{n}$, n étant un nombre que l'on fera croître indéfiniment, et l'on a, par les propriétés des logarithmes,

$$\frac{k}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \frac{1}{x}\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Lorsque n croît, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tend vers le nombre e (129). En faisant attention que

$$\lim \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \log\left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \quad (*),$$

on aura donc $$\lim\frac{k}{h} = y' = \frac{1}{x}\log e;$$

ou, en désignant par M le module, égal à $\log e$ (157),

$$y' = \frac{M}{x}.$$

S'il s'agit des logarithmes népériens, $M = 1$; donc la dérivée de

$$y = lx,$$

est $$y' = \frac{1}{x}.$$

199. *Remarque.* — D'après le théorème ci-dessus (195), la fonction de fonction $y = lu$ a pour dérivée

$$y' = \frac{u'}{u}.$$

200. *Dérivée de a^x.* — Soit $y = a^x$,

ou $$x = \log_a y.$$

Prenant les dérivées des deux membres, et appliquant le même

(*) Généralement, si une variable x tend vers une limite a, et que f désigne une fonction continue,

$$\lim f(x) = f(a), \quad \text{ou} \quad \lim f(x) = f(\lim x).$$

théorème, nous aurons

$$1 = \frac{M}{y} y'.$$

Par suite,

$$y' = \frac{y}{M} = \frac{a^x}{M}.$$

D'ailleurs, le module M est égal à $\frac{1}{la}$ (156); donc enfin

$$y' = a^x \, la :$$

la dérivée de l'exponentielle a^x est le produit de cette exponentielle par le logarithme népérien de a.

201. Si $y = e^x$, on aura

$$y' = e^x = y :$$

la dérivée de la fonction e^x est égale à cette fonction.

202. *Remarque.* — Le théorème relatif aux fonctions de fonction donne encore, pour la dérivée de $y = e^u$,

$$y' = e^u u'.$$

Dérivées des fonctions circulaires.

203. *Dérivée de sin x.* — De $y = \sin x$ on déduit, en suivant la marche ordinaire,

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h};$$

ou (*)

$$\frac{k}{h} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} h \cos\left(x + \frac{1}{2} h\right)}{h} = \frac{\sin \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} \cos\left(x + \frac{1}{2} h\right).$$

Le rapport $\frac{\sin \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h}$ a pour limite l'unité (**); donc

$$\lim \frac{k}{h} = y' = \cos x.$$

Ainsi, *la dérivée du sinus est égale au cosinus.*

(*) (*B.*, *Trig.*, **24**).

(**) (*B.*, *Trig.*, **30**).

204. *Dérivée de cos x.* — Pour obtenir la dérivée de $y = \cos x$, remplaçons cette fonction par $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; nous aurons, par le théorème relatif aux fonctions de fonctions, et en observant que $\frac{\pi}{2} - x$ a pour dérivée (-1),

$$y' = -\sin x.$$

205. *Dérivée de tang x.* — De $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on conclut (189) $y' = \frac{\cos x . \cos x + \sin x . \sin x}{\cos^2 x}$,

ou
$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dérivées des fonctions circulaires inverses.

206. *Dérivée de arc sin x.* — Si la valeur de x, tirée d'une équation $y = f(x)$, est $x = F(y)$, les deux fonctions f et F sont dites *inverses* l'une de l'autre. Par exemple, la fonction inverse de $x = \sin y$ est $y = \operatorname{arc} \sin x$ (*).

Cela posé, pour trouver la dérivée de cette dernière fonction, servons-nous de l'équation

$$x = \sin y.$$

En prenant les dérivées des deux membres, par rapport à x, nous aurons

$$1 = \cos y . y'.$$

Mais
$$\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y} = +\sqrt{1 - x^2} \text{ (**)};$$

donc
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

207. *Dérivée de arc cos x.* — Un calcul semblable au précédent donne, pour la dérivée de $y = \operatorname{arc} \cos x$,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(*) Cette notation signifie que y *est l'arc dont le sinus est* x. Autrefois, on écrivait $y = \operatorname{arc}(\sin = x)$.

(**) On suppose l'arc y compris dans le premier quadrant.

208. *Dérivée de arc tang x.* — De $y = \text{arc tang}\, x$, on déduit

$$x = \text{tang}\, y;$$

puis, en prenant les dérivées,

$$1 = \frac{y'}{\cos^2 y} = y'(1 + x^2),$$

ou

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} \quad (*).$$

209. *Remarque.* — Les dérivées des fonctions *transcendantes* arc sin x, arc cos x, arc tang x sont *algébriques ;* la troisième fonction a même une dérivée *rationnelle.*

Dérivées des fonctions composées.

210. Soit $y = F(u, v)$, u et v étant des fonctions de la variable indépendante x : il s'agit, comme dans le cas d'une fonction de fonctions, d'obtenir la dérivée de y relative à x, sans remplacer u et v par leurs valeurs $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Donnons à x un accroissement Δx; mais, afin de mieux apercevoir la partie de la variation de y qui dépend de u et celle qui dépend de v, supposons, pour un instant, que u soit une constante, v étant variable : y deviendra $F(u, v + \Delta v)$; et nous aurons, pour son accroissement *partiel,* $F(u, v + \Delta v) - F(u, v)$.

En second lieu, dans $F(u, v + \Delta v)$, regardons $v + \Delta v$ comme une constante, et faisons varier u; nous aurons, pour la valeur *finale* de y,

$$F(u + \Delta u, v + \Delta v) \quad (**),$$

et, pour le second accroissement partiel,

$$F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v).$$

(*) Nous engageons le lecteur à chercher, *directement*, les dérivées des fonctions a^x, cos x, tang x, arc sin x, arc cos x, arc tang x.

(**) Il est assez visible qu'au lieu de substituer $x + \Delta x$ dans u et dans v en même temps, on peut faire cette substitution *en deux fois*. Par exemple, si $y = u + v$, on obtiendra d'abord, en supposant u *constante,*

$$u + v + \Delta v;$$

puis, en faisant varier u dans ce premier résultat,

$$u + \Delta u + v + \Delta v.$$

Du reste, la somme de ces deux accroissements partiels ou *virtuels* est égale à l'accroissement total ou réel Δy; car

$$\left.\begin{aligned}\Delta y &= F(u+\Delta u,\ v+\Delta v) - F(u,\ v)\\ &= [F(u+\Delta u,\ v+\Delta v) - F(u,\ v+\Delta v)]\\ &+ [F(u,\ v+\Delta v) - F(u,\ v)].\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Actuellement, d'après la remarque du n° 182,

$$F(u,\ v+\Delta v) - F(u,\ v) = [F'_v(u,\ v)+\beta]\Delta v,$$
$$F(u+\Delta u,\ v+\Delta v) - F(u,\ v+\Delta v) = [F'_u(u,\ v+\Delta v)+\alpha]\Delta u,$$
$$F'_u(u,\ v+\Delta v) = F'_u(u,\ v)+\gamma:$$

β, α et γ sont des quantités qui s'annulent avec Δv, Δu et Δv; les *indices* désignent la lettre par rapport à laquelle on prend la dérivée.

Si l'on substitue dans (1), on obtient

$$\Delta y = [F'_u(u,\ v)+\gamma+\alpha]\Delta u + [F'_v(u,\ v)+\beta]\Delta v,$$

puis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [F'_u(u,\ v)+\gamma+\alpha]\frac{\Delta u}{\Delta x} + [F'_v(u,\ v)+\beta]\frac{\Delta v}{\Delta x};$$

puis, en passant à la limite,

$$y' = F'_u(u,\ v).u' + F'_v(u,\ v).v'.$$

Or, $F'_u(u,\ v).u'$ est la valeur qu'on trouverait pour y' si, supposant v constante, on appliquait la règle relative aux fonctions de fonctions (195) : c'est la *dérivée partielle* de y considérée comme une fonction de la fonction u. De même $F'_v(u,\ v).v'$ est la seconde dérivée partielle de y. Par conséquent, *la dérivée complète d'une fonction composée est égale à la somme de ses dérivées partielles, obtenues en appliquant le principe des fonctions de fonctions* (*).

(*) Si, comme on le fait quelquefois, on réserve le nom de *dérivées partielles* aux fonctions $F'_u(u,v)$, $F'_v(u,v)$, lesquelles, évidemment, sont les dérivées que l'on obtiendrait en regardant u et v comme deux *variables indépendantes*, l'énoncé précédent doit être modifié ainsi :

La dérivée d'une fonction y, composée de plusieurs fonctions d'une variable indépendante x, est égale à la somme des dérivées partielles de y, respectivement multipliées par les dérivées de ces fonctions.

211. *Remarque.* — Les règles relatives à la dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient, sont, comme on pouvait s'y attendre, des conséquences du dernier théorème.

212. *Applications.* — I. $y = u^v$. En supposant v constante, y est une puissance dont la dérivée a pour valeur (191) $vu^{v-1}u'$. De même, si u était constante, la dérivée de l'*exponentielle* u^v serait (200) $u^v v' lu$. La somme de ces deux dérivées partielles donne

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' lu.$$

II. $y = x^x$. La formule précédente devient, si l'on y fait $u = v = x$,

$$y' = x^x(1 + lx).$$

III. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$. La même formule donne, en supposant $u = x + \frac{1}{x}$, $v = x$,

$$y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{x-1}\left[x - \frac{1}{x} + \left(x + \frac{1}{x}\right) l\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \text{ (*)}.$$

IV. $y = (1 + x^2)^{e^{\text{arc tang } x}}$. En posant $u = 1 + x^2$, $v = e^{\text{arc tang } x}$, on obtient, encore par la même formule,

$$y' = e^{\text{arc tang } x}(1 + x^2)^{e^{\text{arc tang } x}} \frac{2x}{1 + x^2}$$
$$+ (1 + x^2)^{e^{\text{arc tang } x}} e^{\text{arc tang } x} \frac{l(1 + x^2)}{1 + x^2};$$

ou
$$y' = \frac{2x + l(1 + x^2)}{1 + x^2} e^{\text{arc tang } x}(1 + x^2)^{e^{\text{arc tang } x}}.$$

(*) On arrive plus simplement à ces derniers résultats, en cherchant la dérivée de ly. Par exemple, de $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$, on conclut

$$ly = xl\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

puis
$$\frac{y}{y'} = \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} + l\left(x + \frac{1}{x}\right); \text{ etc.}$$

Dérivées des fonctions implicites.

213. Les regles précédentes donnent le moyen de former la dérivée d'une fonction *explicite* quelconque, algébrique ou transcendante, quelle que soit sa complication. Avant de passer au cas des fonctions *implicites,* supposons que l'on donne

$$z = F(x, y), \quad y = \varphi(x),$$

et que l'on demande la dérivée de z par rapport à la variable indépendante x. On aura, en regardant z comme une *fonction composée* (**210**), et en écrivant F'_x et F'_y, au lieu de $F'_y(x, y)$ et de $F'_y(x, y)$,

$$z' = F'_x + y' F'_y \ (*).$$

214. Soit actuellement

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

une équation donnée, non résoluble par rapport à y. En représentant par z son premier membre, nous aurons, comme tout à l'heure,

$$z' = F'_x + y' F'_y.$$

Mais ici la valeur de $y = \varphi(x)$ est de telle nature, que z est constamment zéro. Donc $z' = 0$, et

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (2)$$

215. *Application.* — De l'équation

$$x^y + y^x - 1 = 0,$$

qui n'est résoluble ni par rapport à y, ni par rapport à x, on conclut

$$y' = -\frac{yx^{y-1} + y^x \, ly}{xy^{x-1} + x^y \, lx}.$$

(*) On voit qu'une même fonction z peut avoir deux dérivées relatives à une même variable indépendante x, savoir : une *dérivée partielle* F'_x, et la *dérivée totale* z'. Pour éviter toute ambiguïté, on désigne quelquefois la première sous le nom de *dérivée par rapport à la lettre* x. Du reste, un peu d'attention rend inutile cette dénomination.

Dérivées successives.

216. La dérivée y' d'une fonction y, étant elle-même une fonction de la variable indépendante x, aura aussi sa dérivée, que l'on obtiendra, comme y', par l'application des règles précédentes. Cette *dérivée de la dérivée* est dite la *deuxième dérivée* de y : on la représente par y''. De même, la dérivée de y'', ou la *troisième dérivée* de y, est désignée par y'''. Et ainsi de suite.

217. *Dérivées successives d'un polynôme entier.* — Soit

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

on aura

$$y' = m A_0 x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1},$$
$$y'' = m(m-1) A_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2) A_1 x^{m-3} + \ldots + 1.2 A_{m-2},$$
....
$$y^{(m)} = m(m-1)\ldots 3.2.1 A_0,$$
$$y^{(m+1)} = 0.$$

Ainsi, *les $m-1$ premières dérivées d'un polynôme entier, du degré m, sont des polynômes entiers, des degrés $(m-1)$, $(m-2), \ldots, 1$; la dérivée $m^{ième}$ est une constante; et les dérivées suivantes sont nulles.*

218. *Dérivées successives de lx, e^x,* $\sin x$, $\cos x$. — Si l'on prend

$$y = lx, \qquad y = e^x, \qquad y = \sin x, \qquad y = \cos x,$$

on aura ces valeurs simples et remarquables :

$$\begin{array}{llll}
y' = x^{-1}, & y' = e^x, & y' = \cos x, & y' = -\sin x. \\
y'' = -1.x^{-2}, & y'' = e^x, & y'' = -\sin x, & y'' = -\cos x, \\
y''' = 1.2x^{-3}, & y''' = e^x, & y''' = -\cos x, & y''' = \sin x, \\
y^{\text{IV}} = -1.2.3x^{-4}, & y^{\text{IV}} = e^x, & y^{\text{IV}} = \sin x, & y^{\text{IV}} = \cos x.
\end{array}$$
....

Dérivées successives des fonctions implicites.

219. Soit, pour fixer les idées, l'équation très-simple

$$y^3 + x^3 - 3xy = 0 : \quad (1)$$

on demande d'en déduire les valeurs des dérivées successives de y, comme si elle était résolue par rapport à y.

On aura d'abord (214)

$$(y^2 - x)y' + x^2 - y = 0. \quad (2)$$

Puis, en regardant y et y' comme des fonctions de x, et en étendant la règle relative aux dérivées des fonctions composées,

$$(y^2 - x)y'' + (2yy' - 1)y' + 2x - y' = 0,$$

ou

$$(y^2 - x)y'' + 2(yy'^2 - y' + x) = 0. \quad (3)$$

Dans cette nouvelle équation, y, y', y'' sont fonctions de x ; donc, en appliquant encore la même règle,

$$(y^2 - x)y''' + (2yy' - 1)y'' + 2(y'^3 + 2yy'y'' - y'' + 1) = 0,$$

ou

$$(y^2 - x)y''' + 3(2yy' - 1)y'' + 2(y'^3 + 1) = 0. \quad (4)$$

Et ainsi de suite. Au moyen de ces relations on obtiendra, successivement,

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}, \quad y'' = -\frac{2(y^3 + x^3 - 3xy + 1)xy}{(y^2 - x)^3} = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3} \ (*),$$

$$y''' = \frac{4(2y^2 - 3x^2y + x)xy - 2(y^2 - x)[(y - x^2)^3 + (y^2 - x)^3]}{(y^2 - x)^5}, \text{ etc.}$$

220. *Remarque.* — Après que l'on a tiré, de l'équation (1),

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x},$$

on peut obtenir les valeurs des autres dérivées, en appliquant la règle relative aux fractions. En effet,

$$y'' = \frac{(y^2 - x)(y' - 2x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2}, \text{ etc. } (**)$$

Théorème de Taylor.

221. On donne ce nom à la formule suivante, qui permet de développer une fonction quelconque de $x + h$, suivant les puis-

(*) A cause de l'équation (1).

(**) La généralisation de la théorie dont nous venons de donner l'idée, ne peut être exposée commodément qu'au moyen du calcul différentiel.

sances entières et positives de l'accroissement h :

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots \quad (1)$$

Dans le cas d'une fonction entière, le seul dont nous ayons à nous occuper ici, le second membre se termine par

$$\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}f^m(x),$$

m étant le degré de $f(x)$: en effet, $f^m(x)$ est une constante (**217**).

Pour démontrer cette formule, remarquons d'abord que, si $f(x)$ se réduit à $A_0 x^m$, elle devient, après la suppression du facteur commun A_0,

$$(x+h)^m = x^m + \frac{h}{1}mx^{m-1}+\frac{h^2}{1.2}m(m-1)x^{m-2}+\ldots$$
$$+\frac{h^m}{1.2.3.m}\cdot m(m-1)\ldots 3.2.1;$$

c'est-à-dire qu'elle ne diffère pas de la formule du binôme (**121**).

En second lieu, il est facile de voir que si le théorème de Taylor a été vérifié pour deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, il subsistera pour la fonction $F(x)$ formée par la somme de ces fonctions. Soient, en effet,

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+\frac{h}{1}\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\ldots, \quad (2)$$

$$\psi(x+h)=\psi(x)+\frac{h}{1}\psi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\psi''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}\psi'''(x)+\ldots, \quad (3)$$

$$F(x)=\varphi(x)+\psi(x). \quad (4)$$

Ajoutant membre à membre les égalités (2) et (3), et ayant égard au théorème sur la dérivée d'une somme (**185**), on aura, à cause de l'équation (4),

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}F'''(x)+\ldots.$$

Cela posé, la formule (1) est vraie dans le cas où $f(x)$ se réduit à A_0x^m ou à A_1x^{m-1}; donc elle subsiste pour le cas de

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}.$$

De même, étant démontrée pour ce dernier cas et pour celui de

$f(x) = A_2 x^{m-2}$, elle le sera pour $f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2}$. Et ainsi de suite.

En résumé, si

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

le développement de $f(x+h)$ sera

$$f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots A_0 h^m.$$

222. *Remarques.* — I. Si le polynôme $f(x)$ a ses coefficients entiers, il en sera de même pour les fonctions $\frac{f'(x)}{1}$, $\frac{f''(x)}{1.2}$, $\frac{f'''(x)}{1.2.3}$, ... En effet, ces fonctions sont les coefficients des puissances de h dans $f(x+h)$.

II. $\frac{f''(x)}{1.2}$ est la moitié de la dérivée de $\frac{f'(x)}{1}$. De même

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = \frac{1}{3}\left(\frac{f''(x)}{1.2}\right)'; \text{ etc.}$$

223. *Application.* — Soit

$$f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 7x + 1.$$

On aura

$$\frac{f'(x)}{1} = 20x^3 + 6x^2 - 7, \quad \frac{f''(x)}{1.2} = 30x^2 + 6x,$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = 20x + 2, \qquad \frac{f^{\text{IV}}(x)}{1.2.3.4} = 5,$$

puis

$$f(x+h) = 5x^4 + 2x^3 - 7x + 1 + (20x^3 + 6x^2 - 7)h$$
$$+ (30x^2 + 6x)h^2 + (20x + 2)h^3 + 5h^4.$$

EXERCICES (*).

I. Former les dérivées des fonctions

$$y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}, \quad y = l\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),$$
$$y = x\sqrt{1 + x^2} + l\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right), \quad y = llx,$$
$$y = lllx, \quad y = l^n x \; (^{**}), \quad y = \text{arc tang}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^3.$$

Résultats :

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2}}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad y' = 2\sqrt{1 + x^2},$$
$$y' = \frac{1}{xlx}, \quad y' = \frac{1}{xlx\,llx}, \quad y' = \frac{1}{xlxl^2x \ldots l^{n-1}x},$$
$$y' = 6\,\frac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^6 + (x + 1)^6}.$$

II. Même recherche pour les fonctions

$$y = l\,\frac{1 - \cos mx}{1 + \cos mx}, \quad y = \cos(\sin x), \quad y = \text{arc sin}\,\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$
$$y = \text{arc cos}\,\frac{a + b\cos x}{b + a\cos x}, \quad y = \text{arc tang}\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right),$$
$$y = \text{arc sin}\,\frac{\sqrt{1 - e^2}\sin x}{1 - e\cos x}, \quad y = l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \text{arc cos}\,\frac{a}{x},$$
$$y = l\,\frac{\sqrt{1 + x^4} + x\sqrt{2}}{1 - x^2} - \text{arc sin}\,\frac{x\sqrt{2}}{1 + x^2}.$$

Résultats :

$$y' = \frac{2m}{\sin mx}, \qquad y' = -\cos x\sin(\sin x), \quad y' = \frac{1}{1 + x^2},$$
$$y' = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b + a\cos x}, \quad y' = -\frac{1}{2(1 + x^2)}, \qquad y' = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos x},$$
$$y' = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x + a}{x - a}}, \quad y' = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4}.$$

(*) Quelques-uns de ces exemples sont tirés d'un intéressant recueil de M. *Léonce Clarke.*

(**) Cette expression, qui ne représente pas une puissance, est définie par les deux équations

$$z = l^{n-1}x, \quad y = lz.$$

III. Appliquer aux équations suivantes le théorème sur les dérivées des fonctions implicites :

$$\sin y = y \sin x, \quad \operatorname{tang} y = 1 + x \sin y, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} y = \sqrt{\frac{1-m}{1+m}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x, \quad x\sqrt{1+y} = y\sqrt{1+x},$$

$$\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\sin y = c.$$

Résultats :

$$y' = \frac{y\cos x}{\cos y - \sin x}, \quad y' = \frac{\sin y \cos^2 y}{1 - x\cos^2 y}, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-m^2}}{1+m\cos x}, \quad y' = \frac{y^2(2+x)}{x^2(2+y)}, \quad y' = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}.$$

IV. Au moyen des deux équations

$$r = a(1 - e\cos u), \quad u - e\sin u = nt,$$

exprimer, en fonction de r et des *constantes* a, e, n, la dérivée de r relative à t.

Résultat :

$$r' = \frac{an}{r}\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}.$$

V. Étant données les équations

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega}, \quad \omega' = \frac{c}{r^2}, \quad x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega,$$

dans lesquelles a, e, c sont des constantes, et r, ω, x, y des fonctions d'une variable indépendante t, exprimer, en fonction de r et des constantes, les quantités

$$x', \ y', \ x'', \ y'', \ x'^2 + y'^2, \ x''^2 + y''^2 \ (*).$$

Résultats :

$$x' = -\frac{c\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}}{are\sqrt{1-e^2}}, \quad y' = \frac{c(a-r)}{are},$$

(*) Les accents désignent des dérivées relatives à t.

$$x'' = -\frac{c^2}{ar^3 e(1-e^2)}[a(1-e^2)-r],$$

$$y'' = -\frac{c^2}{ar^3 e}\frac{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$x'^2+y'^2 = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right), \quad x''^2+y''^2 = \frac{c^4}{a^2r^4(1-e^2)^2}.$$

VI. Trouver les $n^{ièmes}$ dérivées des fonctions

$$y = e^{x\cos a}\cos(x\sin a),$$
$$y = e^x \cos x,$$
$$y = \text{arc tang}\, x,$$
$$y = uv.$$

Résultats :

$$y^n(*) = e^{x\cos a}\cos(x\sin a + na),$$

$$y^n = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x+\frac{n}{4}\pi\right),$$

$$y^n = 1.2.3\ldots(n-1)\cos^n y\cos\left(ny+\frac{n-1}{2}\pi\right),$$

$$y^n = uv^n + \frac{n}{1}u'v^{n-1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}u''v^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1}u^{n-1}v' + u^n v \;(**).$$

VII. En admettant la généralité du *théorème de Taylor* (221), développer, suivant les puissances ascendantes de x, e^x, $l(1+x)$, $\sin x$ et $\cos x$, et trouver les conditions de convergence des séries obtenues.

VIII. Soient $t = f(x, y)$, $u = F(x, y)$, d'où $x = \varphi(t, u)$, $y = \psi(t, u)$. On a

$$(f'_x F'_y - f'_y F'_x)(\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) = 1.$$

(Théorème de M. Möbius.)

(*) y^n représente ici la dérivée $n^{ième}$ de y.

(**) Dans cette formule, qui est due à Leibnitz, v^n, u^n, $v^{n-1}, \ldots$, représentent également des dérivées.

CHAPITRE XIII.

APPLICATION DES DÉRIVÉES A LA DISCUSSION DES FONCTIONS.

224. Théorème. — *Une fonction est croissante ou décroissante, suivant que sa dérivée est positive ou négative.*

Soit $y = f(x)$ une fonction continue de x. Cette fonction est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que l'accroissement de y, correspondant à un accroissement *positif* de x *suffisamment petit*, est *positif* ou *négatif*. En d'autres termes, si, pour toutes les valeurs de l'accroissement h inférieures à une limite donnée l, on a

$$f(a+h) - f(a) > 0,$$

la fonction proposée est croissante depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + l$: elle serait décroissante si l'on avait constamment

$$f(a+h) - f(a) < 0.$$

Cela posé, le théorème résulte immédiatement de la relation

$$k = h[f'(x) + \varepsilon]$$

trouvée au n° 182. En effet, *pour des valeurs suffisamment petites* de h, le signe de la quantité entre parenthèses est celui de $f'(x)$; donc, etc.

225. *Maximums et minimums.* — Lorsqu'une fonction continue cesse de croître avec la variable pour décroître ensuite, on dit qu'elle atteint un *maximum;* de même, elle atteint un *minimum* quand elle cesse de décroître pour croître ensuite. Autrement dit, $f(a)$ est un maximum ou un minimum de $f(x)$, suivant que l'on a, pour des valeurs positives de h, suffisamment petites,

$$f(a) > f(a \pm h),$$

ou

$$f(a) < f(a \pm h).$$

Ordinairement, les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum, annulent $f'(x)$; et, en outre, $f(a)$ est maximum ou minimum, suivant que $f''(a)$ est *négative* ou *positive* (*).

(*) Ces propositions sont démontrées dans la *Géométrie analytique.*

226. Le théorème qui précède facilite beaucoup la discussion des fonctions; c'est ce dont on pourra juger par les exemples suivants :

I. *Discuter* $y = x^{\frac{1}{x}}$, *la variable x étant positive.*

1°. Quand x est très-petit et de la forme $\frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n^n}$; $\lim y = 0$. Ainsi, pour

$$x = 0, \quad y = 0.$$

2°. La valeur de la dérivée est $y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - lx)$ (**212**). Cette dérivée reste positive tant que l'on a $lx < 1$ ou $x < e$; donc la fonction y *est croissante* depuis $x = 0$ jusqu'à $x = e$. Pour cette dernière valeur de x, y atteint un maximum que l'on calculera aisément par la formule

$$ly = \frac{1}{e}.$$

3°. A partir de $x = e$, la dérivée y' reste négative; donc la fonction y est *décroissante* depuis $x = e$ jusqu'à $x = +\infty$. D'ailleurs, à cause de $ly = \frac{lx}{x}$, il est évident que $\lim ly = 0$, d'où $\lim y = 1$. Ainsi, pour

$$x = +\infty, \quad y = 1 \ (*).$$

II. *Discuter* $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$, *la variable x étant positive.*

1°. On reconnaît d'abord, en remplaçant x par $\frac{1}{n}$, que pour

$$x = 0, \quad y = 1.$$

2°. $$y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + l\left(x + \frac{1}{x}\right)\right].$$

Pour $x = 0$, $y' = +\infty$; donc la fonction y est d'abord *croissante.*

3°. Afin de reconnaître plus aisément si la dérivée y' reste po-

(*) Si l'on se borne aux valeurs entières de x, on a

$$1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}, \quad \text{puis} \quad \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \ldots.$$

Par conséquent, le maximum de $\sqrt[n]{n}$ est $\sqrt[3]{3}$.

sitive quel que soit x, posons

$$z = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + l\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

d'où
$$z' = \frac{x^4 + 4x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2}.$$

La dérivée z', négative pour $x = 0$, s'annule pour

$$x = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}.$$

Cette valeur donne, après quelques réductions,

$$z = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{5} + l(2\sqrt{5} + 2)\right].$$

Cette dernière quantité est positive, donc la dérivée y' ne change pas de signe, et la fonction y croît indéfiniment avec x.

III. *Discuter* $y = xl\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, *la variable* x *étant positive.*

1°. $y' = l\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1}$, $y'' = -\frac{1}{x(x + 1)^2}$.

Cette seconde dérivée est toujours négative, donc y' est une fonction constamment *décroissante*. Cette fonction, infinie pour $x = 0$, s'annule pour $x = +\infty$. Par suite, la fonction proposée est *croissante* depuis $x = 0$ jusqu'à $x = +\infty$.

2°. Si l'on fait $x = 0$, on trouve $y = 0 \times \infty$, résultat indéterminé. Mais, en mettant la valeur générale de y sous la forme $\frac{l\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, et remarquant que $\lim \frac{\log n}{n} = 0$, on obtient

$$y = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

3°. La même indétermination apparente se reproduit quand on suppose x infini. Mais $y = l\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; donc

$$\lim y = l \lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = le = 1.$$

EXERCICES.

I. Discuter les fonctions

$$y = \frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{l\left(1+\frac{2}{x}\right)}, \quad y = \frac{lx}{l\sin x}, \quad y = \frac{l(1+x)}{x},$$

la variable x étant supposée positive.

II. Discuter

$$y = e^x + e^{-x}, \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}, \quad y = e^{\frac{1}{x}}, \quad y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

CHAPITRE XIV.

DES FONCTIONS PRIMITIVES.

Préliminaires.

227. Étant donnée une fonction $\varphi(x)$, on peut se proposer de *trouver une fonction $f(x)$ dont $\varphi(x)$ soit la dérivée*, ou qui soit *telle* que l'on ait

$$f'(x) = \varphi(x).$$

Cette fonction inconnue $f(x)$ est dite la *fonction primitive* de $\varphi(x)$, en sorte que le problème dont il s'agit peut encore s'énoncer ainsi : *remonter de la dérivée à la fonction primitive* (*).

228. Théorème. — *Deux fonctions qui ont des dérivées égales, ne peuvent différer que par une constante.*

Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions ayant même dérivée : la différence $\varphi(x) - \psi(x)$ aura une dérivée nulle. Par conséquent, pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que *toute fonction dont la dérivée est nulle, se réduit à une constante.*

Soit $f(x)$ cette fonction inconnue. Si elle ne se réduit pas à une constante, elle sera croissante ou décroissante dans un cer-

(*) Nous n'examinerons pas si ce problème, ordinairement très-difficile à résoudre, est toujours possible.

tain intervalle. Admettons, pour fixer les idées, qu'elle soit croissante depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

Si, de $f(x)$, nous retranchons la quantité

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

qui devient $f(a)$ pour $x = a$, et $f(b)$ pour $x = b$ (*), nous obtiendrons une fonction

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

dont la dérivée, à cause de $f'(x) = 0$, se réduit à la quantité négative

$$-\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$F(x)$ serait donc *décroissante*, au moins depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Or cette conclusion est inadmissible, car $F(a) = 0$ et $F(b) = 0$. Donc, etc.

229. Il résulte, du théorème précédent, que si l'on a trouvé, *par un procédé quelconque*, une fonction $f(x)$ dont la dérivée soit $\varphi(x)$, toutes les fonctions jouissant de la même propriété seront données par la formule

$$F(x) = f(x) + C,$$

C étant une *constante arbitraire*.

Recherche des fonctions primitives.

230. En renversant les règles de la *dérivation*, on peut, dans quelques cas très-simples, remonter d'une dérivée à la fonction primitive. Par exemple, comme les dérivées de

$$x^m, \quad lx, \quad e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \text{arc}\sin x, \quad \text{arc tang}\, x,$$

sont

$$mx^{m-1}, \quad \frac{1}{x}, \quad e^x, \quad \cos x, \quad -\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{1}{1 + x^2},$$

(*) Pour former cette fonction, il suffit de prendre un binôme $mx + n$ dont les coefficients satisfassent aux deux équations

$$ma + n = f(a), \quad mb + n = f(b).$$

il s'ensuit que si l'on donne

$$y' = x^m, \quad (a) \quad y' = \frac{1}{x}, \quad (b) \quad y' = e^x, \quad (c) \quad y' = \cos x, \quad (d)$$

$$y' = \sin x, \quad (e) \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (f) \quad y' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (g)$$

on aura, pour les fonctions primitives les plus générales,

$$y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c, \quad (A) \quad y = lx + c, \quad (B) \quad y = e^x + c, \quad (C)$$

$$y = \sin x + c, \quad (D) \quad y = -\cos x + c, \quad (E)$$

$$y = \arcsin x + c, \quad (F) \quad y = \operatorname{arc\,tang} x + c. \quad (G)$$

231. *Remarques.* — I. La formule (A) est en défaut dans le cas de $m = -1$, c'est-à-dire lorsque $y' = \frac{1}{x}$. C'est ce qui devait arriver; car cette dernière fonction est la dérivée de lx.

II. *Le logarithme d'une constante est encore une constante.* — On peut donc, au lieu de la formule (B), prendre

$$y = lx + lc,$$

ou encore

$$y = l(cx). \quad (B')$$

232. D'après la règle relative à la dérivée d'une somme, la fonction primitive de

$$y' = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \quad (h)$$

est

$$y = \frac{A_0}{m+1} x^{m+1} + \frac{A_1}{m} x^m + \ldots + A_m x + c. \quad (H)$$

233. Les formules (A), (B),..., (H) sont celles que l'on déduit immédiatement des règles du calcul des dérivées. En voici quelques autres, fréquemment employées, dont la vérification est facile :

si

$$y' = \frac{1}{x+a}, \quad (i) \qquad y' = \frac{x}{x^2+a^2}, \quad (k)$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \quad (l) \qquad y' = \sin ax, \quad (m)$$

$$y' = \frac{1}{(x+a)^2+b^2}, \quad (n) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{a+bx-x^2}}, \quad (p)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a+bx+x^2}}; \quad (q)$$

on aura

$$y = l(x+a)+c, \quad (\text{I}) \qquad y = l\sqrt{x^2+a^2}+c, \quad (\text{K})$$

$$y = \sqrt{x^2+a^2}+c, \quad (\text{L}) \qquad y = -\frac{1}{a}\cos ax + c, \quad (\text{M})$$

$$y = \frac{1}{b}\,\text{arc tang}\,\frac{x+a}{b}+c, \quad (\text{N})$$

$$y = \text{arc sin}\,\frac{x-\frac{1}{2}b}{\sqrt{a+\frac{1}{4}b^2}}+c, \quad (\text{P})$$

$$y = l\left(x+\frac{1}{2}b+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+c \ (^*). \quad (\text{Q})$$

CHAPITRE XV.

SÉRIES LOGARITHMIQUES ET CIRCULAIRES.

Développement de $l(1+x)$.

234. La fonction $l(1+x)$ a pour dérivée $\frac{1}{1+x}\cdot$ Effectuant la division, on trouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x}\cdot$$

Donc, en remontant des dérivées aux fonctions primitives,

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \varphi(x). \quad (1)$$

Dans cette égalité, $\varphi(x)$ *est une fonction inconnue qui s'annule avec* x, *et qui a pour dérivée* $\frac{x^n}{1+x}$ (**).

(*) Ces notions seront complétées plus loin.

(**) La fonction $\varphi(x)$ est la différence entre $l(1+x)$ et le polynôme $x - \frac{x^2}{2} + \ldots \pm \frac{x^n}{n}$; donc *elle existe*. En second lieu, $\varphi(0) = l(1) = 0$.

Il est aisé de voir que si la variable x est comprise entre o et $+1$, *inclusivement*, la valeur de $\varphi(x)$ converge vers zéro quand n augmente. En effet, pour toutes les valeurs positives de x, on a

$$\frac{x^n}{1+x} > 0, \quad \frac{x^n}{1+x} < x^n;$$

c'est-à-dire

$$\varphi'(x) > 0, \quad (2), \qquad \varphi'(x) - x^n < 0. \qquad (3)$$

D'après l'inégalité (2), la fonction $\varphi(x)$ est *croissante* (**224**); et, comme elle s'annule avec x, on a

$$\varphi(x) > 0. \quad (4)$$

D'un autre côté, le premier membre de l'inégalité (3) est la dérivée de $\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1}$; donc cette dernière fonction est *décroissante*. De plus, elle s'annule avec x; donc, pour toutes les valeurs positives de x,

$$\varphi(x) < \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (5)$$

La fraction $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ croîtrait indéfiniment avec n, si x surpassait l'unité; mais si, comme nous l'avons supposé, x est compris entre o et $+1$, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour limite zéro. A cause des inégalités (4) et (5), il en est donc de même pour la fonction $\varphi(x)$.

Par suite, le développement de $l(1+x)$, en série convergente, est

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots \quad (A)$$

235. *Remarque.* — La fonction $\varphi(x)$ représente le *reste* de la série, ou l'erreur que l'on commet en s'arrêtant au terme $\frac{x^n}{n}$.

Enfin,

$$\mp\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - \ldots \pm x^{n-1}) = \mp \frac{x^n}{1+x};$$

donc *la fonction $\varphi(x)$ a pour dérivée $\frac{x^n}{1+x}$.*

D'après l'inégalité (5), cette erreur est inférieure au premier des termes négligés : c'est ce qui a lieu pour toutes les séries convergentes composées de termes alternativement positifs et négatifs (99).

Développement de $l(1-x)$.

236. Une marche toute semblable à celle qui précède donne d'abord

$$-l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant une fonction qui a pour dérivée $\frac{x^n}{1-x}$, et qui s'annule avec x.

En second lieu, si x varie de 0 à $1-\alpha$, α étant une fraction aussi petite qu'on le veut, on aura

$$\frac{x^n}{1-x} > 0, \quad \frac{x^n}{1-x} < \frac{x^n}{1-\alpha},$$

ou

$$\psi'(x) > 0, \quad \psi'(x) - \frac{x^n}{1-\alpha} < 0.$$

Par suite,

$$\psi(x) > 0, \quad \psi(x) < \frac{x^{n+1}}{(1-\alpha)(n+1)}.$$

La variable x étant inférieure à l'unité, la fraction $\frac{x^{n+1}}{(1-\alpha)(n+1)}$ diminue indéfiniment lorsque n augmente. Donc $\psi(x)$ jouit de la même propriété ; et, par conséquent, pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $1-\alpha$, *inclusivement*,

$$-l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \text{ (*)}. \quad \text{(B)}$$

237. Les équations (A) et (B) peuvent servir à calculer les logarithmes *népériens* des nombres compris entre 0 et 2. Par exemple, si l'on suppose $x = 1$ dans (A), on obtient

$$l.2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - ,\ldots;$$

(*) La formule (B), obtenue en supposant $x < 1$, subsiste pour $x = 1$; car cette dernière hypothèse rend infinis les deux membres.

seulement, les séries (A) et (B), même quand elles sont applicables, sont peu convergentes; et, d'un autre côté, il est essentiel d'obtenir des séries qui permettent de calculer les logarithmes des nombres entiers. C'est à quoi l'on parvient par le procédé suivant.

Calcul des logarithmes népériens.

238. Si l'on ajoute membre à membre les égalités (A) et (B), on obtient, à cause de

$$l(1+x) - l(1-x) = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right].$$

Posons
$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+p}{n};$$

nous aurons
$$\frac{2x}{2} = x = \frac{p}{2n+p};$$

puis

$$l\left(\frac{n+p}{n}\right) = 2\left[\frac{p}{2n+p} + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2n+p}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p}{2n+p}\right)^5 + \ldots\right],$$

ou

$$l(n+p) = ln + 2\left[\frac{p}{2n+p} + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2n+p}\right)^3 + \ldots\right]. \quad \text{(C)}$$

Cette nouvelle formule sert à calculer le logarithme népérien d'un nombre entier $n+p$, quand on connaît déjà le logarithme de n. Si l'on suppose $p = 1$, elle se réduit à

$$l(n+1) = ln + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ldots\right]. \quad \text{(D)}$$

239. A cause de $l.1 = 0$, la relation (D) donne, de proche en proche, $l.2$, $l.3$, $l.4$....

Par exemple,

$$l.2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right].$$

240. Il est facile d'obtenir une limite supérieure de l'erreur E que l'on commet en prenant seulement les i premiers termes de

la série D. En effet, on a d'abord

$$E = 2\left[\frac{1}{(2i+1)(2n+1)^{2i+1}} + \frac{1}{(2i+3)(2n+1)^{2i+1}} + \dots\right];$$

et, par conséquent,

$$E < \frac{2}{(2i+1)(2n+1)^{2i+1}}\left[1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots\right],$$

ou

$$E < \frac{2}{(2i+1)(2n+1)^{2i+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}};$$

ou enfin,

$$E < \frac{1}{2n(2n+1)(2i+1)(2n+1)^{2i-1}}.$$

Par exemple, si l'on se borne aux quatre premiers termes dans le développement de $l.2$ indiqué ci-dessus, on commet une erreur moindre que $\frac{1}{78732}$. Pour obtenir ce degré d'approximation au moyen du premier développement (**142**), on devrait employer 78731 termes.

241. Problème. — *Calculer directement le logarithme d'un nombre donné.*

Si, dans la formule

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right],$$

on pose

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n}{1},$$

on aura

$$ln = 2\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 + \dots\right].$$

Par exemple,

$$l.3 = 1 + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.4^2} + \frac{1}{7.4^3} +, \dots,$$

$$l.4 = 2\left[\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5 + \dots\right].$$

Calcul du module.

242. Le *module* M des logarithmes vulgaires a pour valeur $\frac{1}{l.10}$ (156). Pour le calculer, il est donc essentiel de connaître le logarithme népérien de 10. Or, $l.10 = l.2 + l.5$,

$$l.5 = l.4 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \ldots\right],$$

$$l.4 = 2\,l.2 = 4\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots\right];$$

donc

$$l.10 = 6\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots\right] + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \ldots\right],$$

ou encore

$$l.10 = 2\left[1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^3} + \frac{1}{9.9^4} + \ldots\right] + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \frac{1}{7.9^7} + \ldots\right].$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$l.10 = 2,302\,585\,092\,994\,045,\ldots;$$

et, par suite,

$$M = 0,434\,294\,481\,903\,251\ldots.$$

Calcul des logarithmes vulgaires.

243. En multipliant par le module les deux membres de l'égalité (D), on obtient

$$\log(n+1) = \log n + 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ldots\right]. \quad \text{(E)}$$

Cette nouvelle formule est l'une des plus commodes dont on puisse faire usage pour construire une Table de logarithmes de Briggs, analogue à la Table de Callet. La formation d'une pareille Table est bien plus rapide que celle d'une Table de logarithmes népériens. En effet, si l'on a calculé les logarithmes *vulgaires* des nombres compris entre 10^{p-1} et 10^p, on aura immédiatement les

logarithmes de tous les nombres inférieurs à 10^{p-1}. En outre, la convergence de la série (E) augmente si rapidement avec n, qu'on peut souvent réduire cette série à son premier terme. Par exemple, si n surpasse 10 000, on aura (240), à cause de $2M < 1$, et en supposant $i = 1$,

$$E < \frac{1}{1\,200\,000 . 10\,000 . 20\,001};$$

ou, à plus forte raison,

$$E < \frac{1}{240\,000\,000\,000}.$$

244. *Proportion logarithmique.* — On admet ordinairement que, *passé une certaine limite, les différences entre les nombres sont sensiblement proportionnelles aux différences entre les logarithmes de ces nombres* (*B., Alg.,* 199). Cette proposition résulte immédiatement de ce qui précède. En effet, si l'on réduit la série (E) à son premier terme, on a

$$\log(n+1) - \log n = 2M\frac{1}{2n+1}.$$

On aurait de même, en désignant par k une fraction proprement dite,

$$\log(n+k) - \log n = 2M\frac{k}{2n+k}.$$

Par suite, $$\frac{\log(n+k) - \log n}{\log(n+1) - \log n} = k\frac{2n+k}{2n+1}.$$

Mais le nombre n étant très-grand, la fraction $\frac{2n+k}{2n+1}$ est presque égale à l'unité; donc, à fort peu près,

$$\frac{\log(n+k) - \log n}{\log(n+1) - \log n} = \frac{k}{1}.$$

245. *Remarque.* — On a, *rigoureusement*,

$$\begin{aligned}\log(n+k) - \log n - k[\log(n+1) - \log n]\\ = 2M\left[\frac{k}{2n+k} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2n+k}\right)^3 + \ldots\right]\\ - 2M\left[\frac{k}{2n+1} + \frac{k}{3(2n+1)^3} + \ldots\right];\end{aligned}$$

donc l'erreur résultant de la proportion ci-dessus est

$$\varepsilon = 2M\left[\frac{k}{2n+k}+\frac{1}{3}\left(\frac{k}{2n+k}\right)^3+\ldots\right]$$
$$-2M\left[\frac{k}{2n+1}+\frac{k}{3(2n+1)^3}+\ldots\right].$$

Tous les termes de la première série sont, à l'exception du premier, inférieurs à ceux qui leur correspondent. Par conséquent on aura, *presque toujours*,

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon < 2M\frac{k(1-k)}{(2n+k)(2n+1)},$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon < \frac{k(1-k)}{4n^2} \ (*).$$

Développement de arc tang x.

246. La fonction arc tang x a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$. Or

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \pm x^{2n-2} \mp \frac{x^{2n}}{1+x^2};$$

donc, en désignant par $\varphi(x)$ une fonction qui s'annule avec x et qui a pour dérivée $\frac{x^{2n}}{1+x^2}$,

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \mp \varphi(x). \quad (1)$$

On trouve ensuite, en raisonnant comme dans les nos 234 et 236,

$$\varphi(x) > 0, \quad \varphi(x) < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Si donc x est compris entre $+1$ et -1, *inclusivement*, $\lim \varphi(x) = 0$, et

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (\text{A})$$

(*) Le lecteur qui voudra étudier complétement la question relative à l'*erreur provenant de la proportion logarithmique*, pourra consulter une Note insérée par M. *Vincent* dans l'*Algèbre* de M. Bourdon.

Calcul du rapport de la circonférence au diamètre.

247. La série (A) et celles que l'on en déduit servent à calculer, avec une approximation indéfinie, le nombre *incommensurable* π (*).

1°. Si l'on suppose d'abord $x = 1$, on aura

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \quad (1)$$

Cette série, très-peu convergente, est attribuée à Leibnitz.

2°. Soit $\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\, x + \text{arc tang}\, y = \text{arc tang}\, \frac{1 - xy}{x + y}$; on aura, à cause de $\text{tang}\, \frac{\pi}{4} = 1$,

$$1 - xy = x + y.$$

Pour satisfaire à cette équation *indéterminée*, on peut prendre $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$. Par suite,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \dots\right) \\ &+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \dots\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Cette nouvelle formule, qui donne le nombre π par la somme de deux séries, est déjà beaucoup plus commode que la formule (1).

3°. Désignons par α l'arc dont la tangente est $\frac{1}{5}$. Nous aurons

$$\text{tang}\, 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \text{tang}\, 4\alpha = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{144}} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Cette dernière fraction étant fort petite, l'arc 4α surpasse $\frac{\pi}{4}$ d'un très-petit arc β déterminé par

$$\text{tang}\, \beta = \frac{\text{tang}\, 4\alpha - 1}{1 + \text{tang}\, 4\alpha} = \frac{\frac{1}{119}}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

(*) *Lambert* a démontré le premier cette incommensurabilité (*Géométrie de Legendre*, Note IV).

Mais $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arc tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc tang} \frac{1}{239}$;

donc, par la série (A),

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) \\ - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

De cette dernière formule, due au géomètre anglais *Machin*, on a conclu la valeur de π avec 100, 200 et enfin 530 chiffres décimaux (*).

EXERCICES.

I. Démontrer que

$$l.2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \ldots,$$

$$l.2 = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \ldots\right],$$

$$l.2 = \frac{1}{3}\left[\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{8}\right)^4 + \ldots\right],$$

....

II. Démontrer que

$$l.2 = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2.8^2} + \frac{1}{3.8^3} - \ldots\right) + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2.4^2} + \frac{1}{3.4^3} + \ldots\right)$$

III. Développer $l\,\frac{1+x}{1-x+x^2}$ et $l\,\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}$.

IV. Conclure, du premier développement, une valeur de $l.2$.

V. Vérifier les valeurs suivantes :

$$l.10 = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \ldots\right) + \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{3.25} + \frac{1}{5.25^2} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{2}{19}\left(1 + \frac{1}{3.361} + \frac{1}{5.361^2} + \ldots\right),$$

(*) Le dernier calcul, plus pénible qu'utile, a été effectué par M. W. *Shanks*.

$$l\,10 = 2\left(1+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{5.9^2}+\ldots\right)+\frac{1}{17}\left(1+\frac{1}{3.289}+\frac{1}{5.289^2}+\ldots\right)$$
$$+\frac{2}{19}\left(1+\frac{1}{3.361}+\frac{1}{5.361^2}+\ldots\right).$$

VI. Démontrer la formule

$$lx = \frac{1}{2}[l(x+1)+l(x-1)]$$
$$+\left[\frac{1}{2x^2-1}+\frac{1}{3(2x^2-1)^3}+\frac{1}{5(2x^2-1)^5}+\ldots\right].$$

VII. En partant de la relation

$$\text{arc tang}\,\frac{1}{p} = \text{arc tang}\,\frac{1}{p+d}+\text{arc tang}\,\frac{1}{p+d'},$$

dans laquelle $dd' = p^2+1$, vérifier les valeurs suivantes :

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\,\frac{1}{3}+\text{arc tang}\,\frac{1}{5}+\text{arc tang}\,\frac{1}{7}+\text{arc tang}\,\frac{1}{8},$$

$$\frac{\pi}{4} = 5\,\text{arc tang}\,\frac{1}{7}+2\,\text{arc tang}\,\frac{1}{26}-2\,\text{arc tang}\,\frac{1}{2057}.$$

CHAPITRE XVI.

PRINCIPES SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Préliminaires.

248. Après la disparition des dénominateurs et des radicaux, toute équation algébrique, à une seule inconnue, pourra être réduite à la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0:$$

m est un nombre entier; A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_m$ sont des coefficients donnés, que nous supposerons réels ou de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Ordinairement, on divise tous les termes par le coefficient de x^m, ce qui revient à supposer $A_0 = 1$. Pour abréger, nous représenterons dorénavant par $f(x) = 0$ l'équation ainsi simplifiée.

249. Théorème fondamental. — *Toute équation algébrique, $f(x) = 0$, à coefficients réels ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, admet au moins une racine de cette forme* (*).

250. Lemme. — *Le reste de la division d'un polynôme entier $f(x)$, par un binôme $x - a$, est égal à $f(a)$* (11).

251. Corollaire. — *Suivant que a est ou n'est pas racine de $f(x) = 0$, $f(x)$ est ou n'est pas divisible par $x - a$.*

252. Lemme. — *Le premier membre d'une équation algébrique du degré m, dans laquelle le coefficient du premier terme est 1, est égal au produit de m facteurs binômes, de la forme $x - a$, $x - b$, $x - c$, ..., $x - k$, $x - l$.*

Soit
$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$
cette équation. D'après le théorème fondamental, elle admet au moins une racine a. Appelant $f(x)$ le premier membre, nous aurons, par le corollaire précédent,
$$f(x) = (x - a) f_1(x).$$
L'équation $f_1(x) = 0$, du degré $m - 1$, *a au moins une racine* b; donc
$$f_1(x) = (x - b) f_2(x).$$
En continuant de la même manière, on arriverait évidemment à
$$f_{m-2}(x) = (x - k) f_{m-1}(x),$$
et enfin à
$$f_{m-1}(x) = x - l;$$
d'où, en remontant ou en multipliant membre à membre,
$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - k)(x - l).$$

253. Théorème II. — *Toute équation algébrique du degré m admet précisément m racines.* En effet, le produit $f(x)$ s'annule si l'on donne à x une quelconque des valeurs a, b, c, ..., k, l, et il ne s'annule pas si l'on donne à x toute autre valeur (**).

254. *Remarque.* — Si quelques-uns des facteurs $x - a$,

(*) Pour nous conformer à l'*esprit* du Programme, nous admettrons ce théorème, bien qu'il en existe un grand nombre de démonstrations. Les plus remarquables sont celles de Mourey, Gauss et Sturm.

(**) *Pour qu'un produit de facteurs réels ou imaginaires soit nul, il faut et il suffit qu'un de ces facteurs soit nul* (83).

$x-b, \ldots, x-k, x-l$ sont égaux entre eux, on dit que l'équation $f(x)=0$ a des *racines égales* ou des *racines multiples*. Par exemple, l'équation

$$(x-1)^3 (x+1)^2 (x-2)^4 = 0$$

a *trois* racines égales à 1, *deux* racines égales à -1, et *quatre* racines égales à 2.

255. Théorème III. — *Toute équation algébrique, à coefficients réels, qui admet une racine imaginaire* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, *admet aussi la racine conjuguée* $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

Dans le polynôme $f(x)$ remplaçons x par $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; nous aurons (221)

$$\begin{aligned}
&f(\alpha+\beta\sqrt{-1})\\
&= f(\alpha)+\beta\sqrt{-1}f'(\alpha)-\frac{\beta^2}{1.2}f''(\alpha)-\frac{\beta^3}{1.2.3}\sqrt{-1}f'''(\alpha)+\ldots\\
&= \left[f(\alpha)-\frac{\beta^2}{1.2}f''(\alpha)+\frac{\beta^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(\alpha)-\ldots\right]\\
&+\left[f'(\alpha)-\frac{\beta^2}{1.2.3}f'''(\alpha)+\ldots\right]\beta\sqrt{-1};
\end{aligned}$$

ou, en représentant par A et B *des quantités réelles qui ne contiennent aucune puissance impaire de* β,

$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = A+B\beta\sqrt{-1}. \quad (1)$$

Si nous changeons β en $-\beta$, les quantités A et B ne changeront pas; donc

$$f(\alpha-\beta\sqrt{-1}) = A-B\beta\sqrt{-1}. \quad (2)$$

Cela posé, si $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est une racine imaginaire de l'équation $f(x)=0$, on aura séparément, d'après la relation (1),

$$A=0, \quad B=0.$$

Par suite,

$$A-B\beta\sqrt{-1}=0, \quad \text{ou} \quad f(\alpha-\beta\sqrt{-1})=0.$$

256. *Remarque.* — Si $f(x)$ avait des termes imaginaires, les fonctions désignées par A et B cessant d'être réelles, l'équation $f(\alpha+\beta\sqrt{-1})=0$ ne se décomposerait plus en $A=0$ et $B=0$.

Par suite, le théorème ne subsisterait pas *nécessairement* (*).

257. Corollaire. — *Les racines imaginaires d'une équation algébrique à coefficients réels sont en nombre pair.*

258. Théorème IV. — *Le premier membre d'une équation algébrique, à coefficients réels, est égal au produit d'autant de facteurs réels du premier degré que l'équation a de racines réelles, et d'autant de facteurs réels du second degré qu'elle admet de couples de facteurs imaginaires.*

Nous savons que $a, b, c, \ldots, k, l$ étant les racines de l'équation $f(x)=0$,

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)\ (^{**}).$$

Si a et b sont deux racines imaginaires conjuguées, le produit $(x-a)(x-b)$ prend la forme

$$\left(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)\left(x-\alpha+\beta\sqrt{-1}\right),$$

en sorte qu'il se réduit à la quantité réelle $(x-\alpha)^2+\beta^2$; etc.

Composition des coefficients.

259. Théorème. — *Dans toute équation de la forme*

$$x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0:$$

1° le coefficient du deuxième terme est égal à la somme des racines, prise en signe contraire; 2° le coefficient du troisième terme est égal à la somme de leurs produits deux à deux, etc.; 3° enfin, le dernier terme est égal au produit des racines, ou à ce produit pris en signe contraire, suivant que le degré m est pair ou impair.

$a, b, c, \ldots, k, l$ étant les racines, le produit

$$(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l),$$

(*) On aurait tort d'affirmer qu'une équation à coefficients imaginaires n'a pas de racines conjuguées : l'équation

$$x^3+\left(2-\sqrt{-1}\right)x^2-2\left(3-\sqrt{-1}\right)x+2\left(4-\sqrt{-1}\right)=0$$

est vérifiée par $x=1\pm\sqrt{-1}$.

(**) Le coefficient du premier terme est toujours supposé égal à l'unité. Cette observation est faite une fois pour toutes.

ordonné suivant les puissances décroissantes de x, doit être identique avec le premier membre de l'équation. Or, si l'on désigne par S_1 la somme des racines, par S_2 la somme de leurs produits deux à deux, etc., on a (120)

$$(x-a)(x-b)\dots(x-k)(x-l)$$
$$= x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} - S_3 x^{m-3} + \dots \mp S_{m-1} \pm S_m;$$

et, par suite,

$$A_1 = -S_1,\quad A_2 = S_2,\quad A_3 = -S_3,\dots,\ A_{m-1} = \mp S_{m-1},$$
$$A_m = \pm S_m.$$

260. *Remarque.* — Les relations précédentes, étant *symétriques* par rapport aux différentes racines, ne peuvent pas servir à déterminer une de ces racines en particulier. En effet, si l'on pouvait conclure de ces relations une équation donnant a, cette équation ne différerait, que par un changement de lettre, de l'équation qui donnerait b, de celle qui donnerait c, etc. Autrement dit, toutes ces équations seraient, sauf le changement de x en a, b, c,..., l'équation proposée. Un calcul très-simple conduit à la même conséquence. Prenons, pour fixer les idées,

$$a+b+c+d = -A_1,$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = A_2,$$
$$abc+abd+acd+bcd = -A_3,$$
$$abcd = A_4;$$

puis, afin d'éliminer b, c, d, ajoutons ces équations membre à membre après avoir multiplié les trois premières, respectivement, par $-a^3$, $+a^2$, $-a$; nous obtiendrons

$$-a^4 = A_1 a^3 + A_2 a^2 + A_3 a + A_4,$$

ou

$$a^4 + A_1 a^3 + A_2 a^2 + A_3 a + A_4 = 0.$$

Continuité des fonctions entières.

261. Problème I. — *Étant donné un polynôme*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m,$$

trouver une valeur positive de x à partir de laquelle le polynôme ait le signe de son premier terme, et croisse indéfiniment avec x (en valeur absolue).

Représentons par $f(x)$ ce polynôme, et, pour plus de simplicité, supposons que le coefficient A_0 soit positif : s'il était négatif, on appliquerait à $[-f(x)]$ la solution suivante.

Cela posé, il peut se présenter deux cas :

1°. Si $f(x)$ a tous ses termes positifs, chacun d'eux, à l'exception du dernier, croît indéfiniment avec x, à partir de $x = 0$. Cette dernière valeur satisfait donc à la question.

2°. Si $f(x)$ a des coefficients négatifs, appelons $-N$ le plus grand d'entre eux, en valeur absolue, et remplaçons tous les autres, le premier excepté, par $-N$. Nous aurons évidemment, *pour toute valeur positive de x,*

$$f(x) > A_0 x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1).$$

Par conséquent, dans l'énoncé du problème, nous pouvons remplacer le premier polynôme par le second.

Or, l'inégalité

$$A_0 x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1) > 0 \quad (1)$$

équivaut à

$$A_0 x^m - N\frac{x^m - 1}{x - 1} > 0,$$

ou encore, à

$$\frac{x^m[A_0(x-1) - N] + N}{x - 1} > 0. \quad (2)$$

On satisfait évidemment à cette nouvelle relation, en prenant

$$x \geqq 1 + \frac{N}{A_0}. \quad (3)$$

De plus, en mettant le premier membre de l'inégalité (1) sous la forme

$$x^m\left[A_0 - N\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^m}\right)\right],$$

on voit que ce premier membre croît indéfiniment avec x, *au moins* à partir de $x = 1 + \frac{N}{A_0}$. Cette dernière valeur résout donc le problème proposé.

262. *Remarques.* — I. Pour rendre le résultat de la substitution supérieur à un nombre donné P, il suffit de remplacer $f(x)$ par $f(x) - P$, ou $-N$ par $-(N + P)$. Par conséquent,

Étant donné un polynôme $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$, on peut toujours trouver une valeur positive de x assez grande pour que le résultat de la substitution surpasse, en valeur absolue, un nombre donné quelconque.

II. *Un polynôme $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$, de degré pair, prend le signe du coefficient de son premier terme, quand on attribue à la variable des valeurs suffisamment grandes, positives ou négatives. Mais si le polynôme est de degré impair, il prend le signe du coefficient de son premier terme ou un signe contraire, suivant que l'on attribue à x une très-grande valeur positive ou une très-grande valeur négative* (*).

263. En indiquant la solution précédente, nous voulions principalement faire voir qu'il est possible de satisfaire à l'inégalité $f(x) > 0$ par une valeur positive de x. La considération des dérivées permet de résoudre le problème d'une manière beaucoup plus satisfaisante. En effet, *une fonction étant croissante quand sa dérivée est positive* (224), il s'ensuit que *si l'on peut trouver une valeur λ de x qui rende $f(x)$ positive, et à partir de laquelle la dérivée $f'(x)$ reste positive, la fonction $f(x)$ restera positive à partir de $x = \lambda$.* De même, pour trouver une valeur de x à partir de laquelle la première dérivée reste positive, il suffit d'en chercher une à partir de laquelle la deuxième dérivée reste positive. Et ainsi de suite. En résumé, *si un nombre λ, substitué à x, rend positives $f(x)$ et toutes ses dérivées, cette fonction restera positive à partir de $x = \lambda$.*

En outre, *le polynôme $f(x)$ croîtra indéfiniment avec x*, à partir de cette même valeur.

En effet, remplaçons x par $\lambda + h$, h étant positif; nous aurons

$$f(\lambda + h) = f(\lambda) + \frac{h}{1} f'(\lambda) + \frac{h^2}{1.2} f''(\lambda) + \ldots + A.h^m.$$

(*) Ce résultat s'énonce quelquefois par les formules suivantes, dans lesquelles y représente le polynôme:

1°.	$A > 0$,	m pair,	$x = \pm\infty$,	$y = +\infty$,
2°.	$A > 0$,	m impair,	$x = +\infty$,	$y = +\infty$,
			$x = -\infty$,	$y = -\infty$,
3°.	$A < 0$,	m pair,	$x = \pm\infty$,	$y = -\infty$,
4°.	$A < 0$,	m impair,	$x = +\infty$,	$y = -\infty$,
			$x = -\infty$,	$y = +\infty$.

Or, dans le second membre, tous les coefficients sont positifs; donc, etc.

Pour obtenir λ, on part de $f^{m-1}(x)$, et on cherche le plus petit nombre entier qui rende positive cette fonction (*). Si ce nombre, substitué dans $f^{m-1}(x)$, donne un résultat négatif, on l'augmente d'une ou de plusieurs unités. On continue de la même manière, en remontant jusqu'à $f(x)$. Il est évident que *l'on n'a jamais besoin de revenir sur les essais déjà tentés.*

264. *Application.* — Soit

$$f(x) = 6x^5 + 24x^4 - x^3 + 8x^2 - 16x - 60.$$

La première méthode donne $\lambda = \frac{60}{6} + 1 = 11$.

Pour appliquer la seconde, formons les polynômes

$$f'(x) = 30x^4 + 96x^3 - 3x^2 + 16x - 16,$$

$$\frac{f''(x)}{1.2} = 60x^3 + 144x^2 - 3x + 8,$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = 60x^2 + 96x - 1.$$

Ces trois dérivées sont positives pour $x = 1$; mais, si l'on remplace x par 1 dans $f(x)$, on trouve un résultat négatif. Pour $x = 2$, le résultat est positif. On peut donc prendre $\lambda = 2$.

265. Problème II. — *Étant donné un polynôme*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + \ldots + A_p x^{m+p},$$

trouver une valeur positive de x telle, que le résultat de la substitution ait le signe du premier terme, et soit, en valeur absolue, inférieur à un nombre donné δ.

En posant $x = \frac{1}{z}$, on devra satisfaire aux deux inégalités

$$\frac{A_0}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m+1}} + \ldots + \frac{A_p}{z^{m+p}} > 0, \quad (1)$$

$$\frac{A_0}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m+1}} + \ldots + \frac{A_p}{z^{m+p}} < \delta; \quad (2)$$

(*) On peut même prendre pour point de départ la première des dérivées qui présentent une seule variation.

ou, puisque z est positif, à ces deux-ci :

$$A_0 z^p + A_1 z^{p-1} + \ldots + A_p > 0, \quad (3)$$

$$\delta z^{m+p} - (A_0 z^p + A_1 z^{p-1} + \ldots + A_p) > 0; \quad (4)$$

c'est à quoi l'on parviendra, dans chaque cas particulier, en appliquant l'une ou l'autre des solutions du premier problème.

266. *Applications.* — I. *Trouver une valeur positive de x satisfaisant aux deux conditions*

$$x^3 + 8x^4 - 7x^5 - 12x^6 + 24x^7 - 150x^8 > 0,$$

$$x^3 + 8x^4 - 7x^5 - 12x^6 + 24x^7 - 150x^8 < 0{,}01.$$

Les inégalités (3) et (4) deviennent

$$z^5 + 8z^4 - 7z^3 - 12z^2 + 24z - 150 > 0, \quad (a)$$

$$0{,}01 . z^8 - (z^5 + 8z^4 - 7z^3 - 12z^2 + 24z - 150) > 0. \quad (b)$$

On satisfait à la relation (a) par $z \overset{=}{>} 3$, et à la relation (b), par $z \overset{=}{<} 6$. Par conséquent, pour résoudre la question proposée, il suffit de prendre $x \overset{=}{<} \frac{1}{6}$.

II. *Trouver une valeur négative de x qui, substituée dans le polynôme*

$$-2x^4 - 7x^5 + 12x^6 + 4x^7 - 24x^8,$$

donne un résultat négatif inférieur, en valeur absolue, à 0,01.

Changeant x en $-x'$, on devra satisfaire, par une valeur *positive* de x', aux deux inégalités

$$-2x'^4 + 7x'^5 + 12x'^6 - 4x'^7 - 24x'^8 < 0,$$

$$-2x'^4 + 7x'^5 + 12x'^6 - 4x'^7 - 24x'^8 > -0{,}01;$$

ou, ce qui est équivalent, à ces deux-ci :

$$2x'^4 - 7x'^5 - 12x'^6 + 4x'^7 + 24x'^8 > 0,$$

$$2x'^4 - 7x'^5 - 12x'^6 + 4x'^7 + 24x'^8 < 0{,}01.$$

On a ensuite, en remplaçant x' par $\frac{1}{z}$,

$$2z^4 - 7z^3 - 12z^2 + 4z + 24 > 0,$$

$$0{,}01\, z^8 - (2z^4 - 7z^3 - 12z^2 + 4z + 24) > 0.$$

Opérant comme dans l'exemple précédent, on trouve enfin

$$z \overset{=}{>} 5, \quad x' \overset{=}{<} \frac{1}{5}, \quad x \overset{=}{>} -\frac{1}{5}.$$

267. Théorème. — *Toute fonction entière et rationnelle d'une variable x est une fonction continue.*

Soit $\quad y = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m.$

En premier lieu, à toute valeur *réelle* et *finie* de x, correspond une valeur de y, *réelle, finie* et *déterminée.*

D'un autre côté, *on peut toujours attribuer à x un accroissement h assez petit pour que l'accroissement correspondant k de y soit, en valeur absolue, inférieur à un nombre donné.*

En effet,

$$k = f'(x)h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3 + \ldots + A_0 h^m.$$

Mais le second membre est une fonction entière de h, ordonnée suivant les puissances croissantes de cette variable; donc, etc.

268. *Remarque.* — Lorsque l'accroissement h sera suffisamment petit, k prendra le signe de $f'(x)$. Ce résultat est d'accord avec celui que l'on conclut de la théorie des dérivées (182).

Propositions sur l'existence des racines réelles.

269. Lemme. — *Si deux quantités α, β, substituées à x dans $f(x)$, donnent des résultats de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle comprise entre α* et *β.*

Soit, pour fixer les idées, $\alpha < \beta$. Si l'on imagine que x varie d'une manière continue, depuis α jusqu'à β, $f(x)$ variera aussi d'une manière continue. Or, cette fonction était négative pour $x = \alpha$ et positive pour $x = \beta$, ou inversement; donc elle a dû, au moins une fois, passer par zéro (*).

(*) On peut modifier un peu la démonstration, de manière à la rendre encore plus évidente. Supposons $\beta > \alpha > 0$: on ramène aisément les autres cas à celui-là. Supposons en outre, pour fixer les idées, $f(\alpha) < 0$ et $f(\beta) > 0$. Enfin, soient P l'ensemble des termes positifs et — N l'ensemble des termes négatifs de $f(x)$, de manière que $f(x) = P - N$. Si l'on fait croître x d'une manière continue, depuis α jusqu'à β, les polynômes P et N, dont tous les termes sont positifs, *croîtront* d'une ma-

270. *Remarque.* — La démonstration précédente repose u
quement sur la continuité de la fonction considérée. Par con
quent, la proposition subsiste pour toute équation $f(x) = 0$, alg
brique ou *transcendante*, dont le premier membre reste conti
entre α et β.

271. Théorème I. — *Si deux quantités α, β comprennent ent
elles un nombre impair de racines de l'équation $f(x) = 0$, c
deux quantités, substituées à x dans $f(x)$, donnent des résulta
de signes contraires.*

Soient a, b, c,..., g les racines comprises entre α et β; so
$\varphi(x)$ le produit des facteurs du premier degré correspondant au
autres racines (252); on aura

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-g)\varphi(x),$$

puis

$$f(\alpha) = (\alpha-a)(\alpha-b)\ldots(\alpha-g)\varphi(\alpha),$$
$$f(\beta) = (\beta-a)(\beta-b)\ldots(\beta-g)\varphi(\beta).$$

Les deux quantités $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ ont le même signe, sans quoi l'équation $\varphi(x) = 0$ aurait au moins une racine comprise entre α et β (269), et a, b, c,..., g ne seraient pas les seules racines de $f(x) = 0$, comprises entre ces mêmes limites. D'un autre côté, les deux produits

$$(\alpha-a)(\alpha-b)\ldots(\alpha-g),$$
$$(\beta-a)(\beta-b)\ldots(\beta-g),$$

composés chacun d'un nombre impair de facteurs, sont de signes contraires, car les facteurs du premier produit sont positifs, et les autres sont négatifs. Donc, etc.

272. Théorème II. — *Si deux quantités α, β comprennent entre elles un nombre pair de racines de l'équation $f(x) = 0$, ou n'en*

---

nière continue. Or, pour $x = \alpha$, P était moindre que N, et, pour $x = \beta$, P est devenu plus grand que N. Donc, pour une ou plusieurs valeurs de x, comprises entre α et β, on a eu $P = N$, ou $f(x) = 0$. Après avoir fait ce raisonnement, Lagrange ajoute : « Comme deux mobiles qu'on suppose parcourir une même ligne dans le même sens, et qui, partant à la fois de deux points différents, arrivent en même temps à deux autres points, mais de manière que celui qui était d'abord en arrière se trouve ensuite plus avancé que l'autre, doivent nécessairement se rencontrer dans leur chemin. »

comprennent aucune, ces deux quantités, substituées à x dans f(x), donnent des résultats de même signe.

La démonstration est semblable à celle qui précède.

273. Théorème III (réciproque des deux premiers). — 1°. *Si deux quantités* α, β, *substituées à* x *dans* $f(x)$, *donnent des résultats de signes contraires, ces deux quantités comprennent entre elles un nombre impair de racines de l'équation* $f(x) = 0$;

2°. *Si deux quantités* α, β, *substituées à* x *dans* $f(x)$, *donnent des résultats de même signe, ces deux quantités comprennent entre elles un nombre pair de racines de l'équation* $f(x) = 0$, *ou elles n'en comprennent aucune.*

274. Théorème IV. — *Toute équation algébrique, de degré impair, a au moins une racine réelle, de signe contraire à son dernier terme.*

Soit d'abord l'équation

$$f(x) = x^m + Bx^{m-1} + \ldots + Sx - T = 0,$$

dans laquelle le dernier terme est *négatif.*

Si l'on donne à x la valeur *zéro* et une valeur positive λ suffisamment grande, le résultat de la substitution, d'abord égal à $-T$, devient ensuite positif (262). Donc l'équation a au moins une racine comprise entre 0 et λ.

Même démonstration dans le cas où le dernier terme est positif.

275. Théorème V. — *Toute équation algébrique de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.*

La démonstration est toute semblable à celle du théorème précédent.

276. *Remarque.* — *Une équation de degré pair, dont le dernier terme est positif, peut avoir toutes ses racines imaginaires.* Exemple : $x^4 + 1 = 0$.

Théorème de Descartes.

277. Lorsqu'une équation de la forme ordinaire a ses coefficients réels, on nomme *variation* la succession de deux termes de signes contraires, et *permanence* la succession de deux termes de même signe. Par exemple, l'équation $x^5 + x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 3x + 1 = 0$ présente *deux* variations et *trois* permanences. Le théorème connu

sous le nom de *Règle des signes, de Descartes*, consiste en ce que *le nombre des variations est une limite supérieure du nombre des racines positives*. La démonstration de ce théorème résulte, très-simplement, de la proposition suivante :

278. Lemme. — *Quand on multiplie un polynôme entier, ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre x, par un binôme $x - a$, a étant une quantité positive, le produit présente au moins une variation de plus que le multiplicande.*

Supposons que le premier terme du polynôme soit x^m. Ce terme x^m commence un groupe de termes *positifs*, lequel est suivi d'un groupe de termes *négatifs*; celui-ci, à son tour, est suivi d'un groupe de termes *positifs*, etc. Enfin, le polynôme se termine par un groupe de termes tous positifs ou tous négatifs. D'ailleurs, chacun de ces groupes peut avoir un terme seulement.

Cela posé, la multiplication dont il s'agit peut être indiquée comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
x^m \ldots\ldots - P \ldots + Q \ldots - R \ldots \pm S \ldots \pm T \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x - a \\
\hline
x^{m+1} \ldots - P' \ldots + Q' \ldots - R' \ldots \pm S' \ldots \pm T' \\
\ldots\ldots - P'' \ldots + Q'' \ldots - R'' \ldots \pm S'' \ldots\ldots \mp Ta \\
\hline
x^{m+1} \ldots - P''' \ldots + Q''' \ldots - R''' \ldots \pm S''' \ldots\ldots \mp Ta.
\end{array}$$

1°. Dans le multiplicande, la première série de termes *négatifs* commence par $-P$; la deuxième série de termes *positifs* commence par $+Q$, etc. Une dernière série de termes, tous de même signe, commence par $\pm S$ et se termine par $\pm T$: ce dernier terme est supposé indépendant de x.

2°. La multiplication par x donne des produits partiels de même signe que les multiplicandes correspondants. Parmi ces produits partiels, ceux qui proviennent de $-P, +Q, \ldots, \pm S, \pm T$, sont désignés par $-P', +Q', \ldots, \pm S', \pm T'$.

3°. La quantité a étant supposée positive, la multiplication par $-a$ donne des produits partiels de signes contraires aux multiplicandes. D'ailleurs, les degrés de ces produits sont respectivement inférieurs d'une unité aux degrés des premiers produits. Par conséquent, *si le terme qui devrait précéder immédiatement* $(-P)$ *ne manque pas*, ce terme, multiplié par $-a$, donnera un produit

négatif $(-P'')$, de même degré que $(-P')$. Et *si ce terme manque*, $(-P'')$ sera remplacé par zéro. Semblablement, les termes qui devraient précéder $(+Q), (-R), \ldots, (\pm S)$, donneront des produits $(+Q''), (-R''), \ldots, (\pm S'')$, des mêmes degrés que $(+Q'), (-R'), \ldots, (\pm S')$: ces produits pourront d'ailleurs, dans le cas d'un multiplicande *incomplet*, être remplacés par zéro.

4°. Il résulte, de cette discussion, que les termes du produit désignés par $(-P''')$, $(+Q''')$, $(-R''')$, $\ldots$, $(\pm S''')$, ont précisément les signes des termes $(-P)$, $(+Q)$, $(-R)$, $\ldots$, $(\pm S)$ qui leur correspondent dans le multiplicande. Quant aux derniers termes de ces deux polynômes, ils ont évidemment des signes contraires.

5°. Comparons actuellement le multiplicande et le produit : de x^m à $(-P)$, il y a *une seule* variation, et il y en a *au moins une* de x^{m+1} à $(-P''')$; de $(-P)$ à $(+Q)$, il y a *une seule* variation, et il y en a *au moins une* de $(-P''')$ à $(+Q''')$, etc. Enfin, de $(\pm S)$ à $(\pm T)$, il n'y a *pas de variation*, et il y en a *au moins une* de $(\pm S''')$ à $(\mp T a)$.

6°. Le produit présente donc au moins une variation de plus que le multiplicande (*).

279. Théorème de Descartes. — *Dans toute équation complète ou incomplète, le nombre des racines positives ne surpasse pas le nombre des variations.*

Soient a, b, $c, \ldots,$ g les racines positives d'une équation $f(x) = 0$. Représentons pas $\varphi(x)$ *le produit des facteurs correspondant aux racines négatives et aux racines imaginaires :* nous aurons

$$f(x) = \varphi(x)(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-g).$$

D'après le lemme précédent, la multiplication par les facteurs successifs $x-a$, $x-b, \ldots,$ $x-g$ doit introduire, à chaque fois, au moins une variation : par conséquent, lors même que $\varphi(x)$ aurait tous ses termes positifs, *le nombre des variations de* $f(x)$

(*) La démonstration suppose que le groupe qui termine le multiplicande contient au moins *deux* termes : si ce groupe se réduisait à un seul terme, on ferait $T = 0$, et le produit serait terminé par $\pm S''' \mp S a$. Les conclusions précédentes subsistent donc dans ce cas particulier.

serait au moins égal au nombre des racines positives $a, b, c, \ldots, g$.
C'est ce qu'il fallait démontrer.

280. Corollaire. — *Le nombre des racines négatives d'une équation* $f(x) = 0$ *ne surpasse pas le nombre des variations de la transformée en* $(-x)$.

On appelle *transformée en* $(-x)$, l'équation que l'on obtient en changeant x en $(-x)$ dans la proposée. Or, les racines positives de la transformée étant, abstraction faite du signe, égales aux racines négatives de la proposée, le nombre des variations que présente $f(-x)$ ne peut pas surpasser le nombre de ces dernières racines.

281. *Remarque.* — Le théorème de Descartes, appliqué à une équation *incomplète*, indique presque toujours l'existence d'un certain nombre de racines imaginaires (*). Soit, par exemple, l'équation

$$f(x) = x^9 + x^6 + 2x^4 - x + 1 = 0.$$

D'après le nombre des variations de $f(x)$ et de $f(-x)$, on trouve que cette équation a au plus deux racines positives et une racine négative : elle a donc, *au moins*, six racines imaginaires.

282. Corollaire. — *Quand une équation* $f(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles, le nombre* p *des racines positives est égal au nombre* v *des variations, et le nombre* n *des racines négatives est égal au nombre* v' *des variations de la transformée en* $(-x)$.

On peut d'abord remarquer que la somme $v + v'$ de ces deux nombres de variations ne surpasse pas le degré m de l'équation. En effet, si l'équation est complète, c'est-à-dire si $f(x)$ renferme $m + 1$ termes, la somme du nombre des *variations* et du nombre des *permanences* de $f(x)$ est précisément égale à m; mais, quand on change x en $(-x)$, *les variations deviennent des permanences, et réciproquement :* donc, dans ce cas, $v + v' = m$. D'un autre côté, si l'on supprime quelques termes de $f(x)$ les nombres v et v' pourront bien diminuer, mais ils n'augmenteront pas : donc, en général,

$$v + v' \leqq m. \quad (1)$$

Supposons actuellement que toutes les racines soient réelles,

(*) Cependant une équation *incomplète* peut avoir toutes ses racines réelles : l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$ a pour racines $+1, +2, -3$.

auquel cas

$$p + n = m. \quad (2)$$

La comparaison des relations (1) et (2) donne

$$v + v' \overset{=}{<} p + n. \quad (3)$$

Or, p ne surpasse pas v, n ne surpasse pas v'; donc $p = v$, et $n = v'$. *En outre*, $v + v' = m$.

EXERCICES.

I. Dans toute équation complète, qui a toutes ses racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque est plus grand que le produit des deux coefficients voisins (théorème de *De Gua*) (*).

II. Si trois termes consécutifs sont en progression par quotient, l'équation a des racines imaginaires.

III. Si les coefficients de quatre termes consécutifs sont en progression par différence, l'équation a des racines imaginaires (théorème de M. Hermite).

IV. Soient $X = 0$ une équation donnée, et X', X'', ..., $X^{(m)}$ les dérivées successives du premier membre : la différence entre le nombre des variations de la suite X, X', X'', ..., $X^{(m)}$, pour $x = \alpha$, et le nombre des variations de la même suite pour $x = \beta$, n'est pas moindre que le nombre des racines réelles de l'équation comprises entre α et β (théorème de Fourier).

V. Si l'équation $f(x = 0)$ a toutes ses racines réelles et inégales, l'équation obtenue en égalant à zéro la seconde dérivée de $\frac{1}{f(x)}$, a toutes ses racines imaginaires.

CHAPITRE XVII.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS. — LIMITES DES RACINES.

283. En général, *transformer* $f(x) = 0$, c'est *chercher une autre équation*, $F(x) = 0$, *dont les racines aient, avec les racines*

(*) *Académie des Sciences*, 1741.

de la proposée, une relation donnée. Les questions suivantes éclairciront cette définition (*).

284. Problème I. — *Multiplier, par un nombre donné k, les racines d'une équation*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0. \quad (1)$$

Ici, la relation donnée est $y = kx$, ou $x = \frac{y}{k}$. Remplaçant x par cette valeur dans la proposée, on obtient

$$A_0 y^m + A_1 k y^{m-1} + A_2 k^2 y^{m-2} + \ldots + A_{m-1} k^{m-1} y + A_m k^m = 0. \quad (2)$$

On voit que *les coefficients de la transformée sont égaux à ceux de la proposée, multipliés par les puissances successives de k*.

285. Problème II. — *Transformer une équation qui a des coefficients fractionnaires, en une autre dont les coefficients soient entiers, et dont le premier terme ait pour coefficient l'unité.*

En chassant les dénominateurs, on mettra la proposée sous la forme (1), les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant entiers. Cela étant fait, l'équation (2) sera la transformée cherchée, si l'on peut *disposer du nombre entier k de manière à rendre divisibles par A_0 les produits $A_1 k$, $A_2 k^2$, $A_3 k^3, \ldots, A_m k^m$.*

Soit, par exemple,

$$4x^5 - 25x^4 + 28x^3 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{11}{6} = 0,$$

ou

$$24x^5 - 150x^4 + 168x^3 - 32x^2 + 27x + 11 = 0. \quad (1)$$

Posant $x = \frac{y}{k}$, on obtient

$$y^5 - \frac{25k}{4}y^4 + 7k^2y^3 - \frac{4k^3}{3}y^2 + \frac{9k^4}{8}y + \frac{11k^5}{24} = 0. \quad (2)$$

Les fractions $\frac{25}{4}, \frac{4}{3}, \frac{9}{8}, \frac{11}{24}$ étant irréductibles, les coefficients de l'équation (2) seront entiers si les fractions $\frac{k}{4}, \frac{k^3}{3}, \frac{k^4}{8}, \frac{k^5}{24}$ se réduisent à des nombres entiers. On trouve aisément que la plus petite valeur admissible de k est 12. Par suite, la transformée de-

---

(*) On a vu ci-dessus (**280**) un exemple de transformation.

mandée est

$$y^5 - 75y^4 + 1\,008y^3 - 2\,304y^2 + 21\,528y + 114\,048 = 0.$$

286. **Problème III.** — *Diminuer, d'une quantité donnée h, les racines d'une équation $f(x) = 0$.*

Première solution. — De $y = x - h$, on conclut d'abord

$$f(h+y) = 0;$$

puis, par le théorème de Taylor,

$$f(h) + \frac{y}{1} f'(h) + \frac{y^2}{1.2} f''(h) + \ldots + \frac{y^m}{1.2\ldots m} f^m(h) = 0. \quad (1)$$

Telle est la transformée.

Seconde solution. — Divisons $f(x)$ par $x - h$, puis le quotient par $x - h$; et ainsi de suite. Nous aurons

$$f(x) = (x-h)\,Q_1 + R_1,$$
$$Q_1 = (x-h)\,Q_2 + R_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q_{m-1} = (x-h)\,Q_m + R_m:$$

les restes $R_1, R_2, \ldots, R_m$, et le dernier quotient Q_m (*), sont indépendants de x. Pour éliminer $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-1}$, multiplions la deuxième équation par $x - h$, la troisième par $(x-h)^2$, etc., puis ajoutons membre à membre; il vient

$$f(x) =$$
$$R_1 + R_2(x-h) + R_3(x-h)^2 + \ldots + R_m(x-h)^{m-1} + Q_m(x-h)^m;$$

en sorte que la transformée, dont l'inconnue y égale $x - h$, est

$$R_1 + R_2 y + R_3 y^2 + \ldots + R_m y^{m-1} + Q_m y^m = 0. \quad (2)$$

287. *Remarques.* — I. En comparant les développements (1) et (2), on trouve, à cause de $\frac{f^m(h)}{1.2.3\ldots m} = A_0 = Q_m$:

$$f(h) = R_1,\ \frac{f'(h)}{1} = R_2,\ \frac{f''(h)}{1.2} = R_3, \ldots,\ \frac{f^{(m-1)}(h)}{1.2.3\ldots(m-1)} = R_m.$$

(*) Ce dernier quotient est évidemment le coefficient A_0 du premier terme de $f(x)$.

II. Le calcul des restes $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_m$ est très-rapide, si l'on emploie le procédé indiqué dans le nº 13, au moins quand la quantité h est entière. Si elle est fractionnaire, et égale à $\frac{p}{q}$, on pose

$$y = x - \frac{p}{q}, \quad x' = qx, \quad x'' = qy;$$

d'où
$$x = \frac{x'}{q}, \quad x' = x'' + p, \quad x'' = qy.$$

Ainsi : 1° *on multiplie par q les racines de la proposée ;* 2° *on diminue de p les racines de la première transformée ;* 3° *on divise par q les racines de la deuxième transformée.*

288. *Applications.*

I. $$2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0, \quad h = 3.$$

Les divisions successives donnent

$$\begin{array}{lllll} 2 & -1 & -11 & -28 & -85 = R_1, \\ 2 & 5 & 4 & & -16 = R_2, \\ 2 & 11 & & & +37 = R_3, \\ 2 & & & & +17 = R_4. \end{array}$$

La transformée est

$$2y^4 + 17y^3 + 37y^2 - 16y - 85 = 0.$$

II. $$x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0, \quad h = -\frac{2}{3}.$$

Comparant avec les formules ci-dessus, on a

$$x = \frac{x'}{3}, \quad x' = x'' - 2, \quad x'' = 2y.$$

La première transformée est (284)

$$x'^4 + 24x'^3 - 18x'^2 + 162x' - 324 = 0.$$

On obtient la deuxième par les divisions suivantes, dans lesquelles le diviseur est $x' + 2$:

$$\begin{array}{lllll} 1 & +22 & -62 & +286 & -896 = R_1, \\ 1 & +20 & -102 & & +490 = R_2, \\ 1 & +18 & & & -138 = R_3, \\ 1 & & & & +16 = R_4. \end{array}$$

Elle est donc

$$x''^4 + 16x''^3 - 138x''^2 + 490x'' - 896 = 0.$$

Enfin, $x'' = 2y$ donne

$$4y^4 + 32y^3 - 138y + 245y - 224 = 0.$$

289. Problème IV. — *Faire disparaître le deuxième terme d'une équation* $x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots = 0$, c'est-à-dire *transformer cette équation en une autre dont la somme des racines soit nulle.*

Posant $y = x - h$, et désignant par $a, b, c, \ldots$ les racines de la proposée, on aura $(a - h) + (b - h) + (c - h) + \ldots = 0$, ou (259) $- A_1 - mh = 0$.

On tire, de cette équation, $h = -\frac{A_1}{m}$.

Par suite $$y = x + \frac{A_1}{m}.$$

Ainsi, *pour faire disparaître le deuxième terme d'une équation, on augmente les racines d'une quantité égale au coefficient de ce deuxième terme, divisé par le degré de l'équation* (*).

Limites des racines.

290. On appelle *limites des racines* deux quantités entre lesquelles sont comprises toutes les racines réelles d'une équation $f(x) = 0$.

291. *Remarques.* — 1°. Ordinairement, ces deux quantités sont de signes contraires; mais si l'équation n'a pas de racines négatives, zéro est une limite *inférieure*. De même, si l'équation n'avait pas de racines positives, zéro serait une limite *supérieure*.

2°. Dans le cas général, si $(-l')$ est une limite inférieure, $(+l')$ sera une limite supérieure des racines de la transformée en $(-x)$. Par conséquent, la question dont nous nous occupons peut être réduite à la *recherche d'une limite supérieure des racines.*

(*) On arrive au même résultat en remplaçant x par $y + h$ dans les deux premiers termes de la proposée, et en développant suivant les puissances décroissantes de y. Ce second procédé peut servir à *faire disparaître un terme de rang quelconque.*

3°. l étant une limite supérieure des racines, toute quantité plus grande sera également limite supérieure (*).

4°. Si le polynôme $f(x)$ reste positif à partir de $x = \lambda$, la quantité λ est une limite supérieure des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Cette dernière remarque sert de base aux méthodes suivantes :

292. Ire MÉTHODE. — *On obtient une limite supérieure des racines en ajoutant l'unité au plus grand coefficient négatif, pris positivement* (**).

Représentons, comme dans le n° 261, par $(-N)$ le plus grand coefficient négatif de l'équation $f(x) = 0$, et faisons croître x indéfiniment, à partir de $1 + N$: le polynôme $f(x)$, positif pour cette valeur de x, croîtra indéfiniment (261). Donc, etc.

293. IIe MÉTHODE. — *On obtient une limite supérieure des racines en extrayant, du plus grand coefficient négatif pris positivement, une racine dont l'indice égale l'excès du degré de l'équation sur le degré du premier terme négatif, et en ajoutant l'unité à cette racine.*

Soit

$$f(x) = x^m + Bx^{m-1} + \ldots - Px^{m-p} + \ldots - Nx^{m-n} + \ldots + U,$$

$-Px^{m-p}$ étant le premier terme négatif, et $-N$ le plus grand coefficient négatif. Des raisonnements et des calculs analogues à ceux du n° 261 donnent, successivement,

$$f(x) > x^m - N(x^{m-p} + x^{m-p-1} + \ldots + x + 1),$$

$$x^m - N\frac{x^{m-p+1} - 1}{x - 1} > 0,$$

$$\frac{x^{m-p+1}[(x-1)x^p - N] + N}{x - 1} > 0,$$

$$(x-1)^p - N > 0,$$

$$x = \lambda = 1 + \sqrt[p]{N}.$$

(*) On ne doit donc pas dire : LA *limite supérieure des racines*, mais bien : UNE *limite supérieure des racines*.

(**) Il est sous-entendu que le premier terme de l'équation a pour coefficient l'unité.

294. IIIᵉ MÉTHODE. — *On obtient une limite supérieure des racines en décomposant le premier membre de l'équation en plusieurs polynômes présentant chacun au plus une variation, et en cherchant un nombre λ qui les rende tous positifs.*

Soient $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... ces différents polynômes, dont la somme est $f(x)$. Le polynôme $\varphi_1(x)$, supposé ordonné suivant les puissances décroissantes de x, présente une seule variation. Donc, par le théorème de Descartes, s'il est positif pour une valeur positive de x, il restera positif à partir de cette valeur; etc.

295. *Remarque.* — Quelquefois, la décomposition du premier membre peut être effectuée de différentes manières, et alors on obtient différentes valeurs de λ. Il est évident que l'on doit toujours choisir la plus petite.

Si, par exemple,

$$f(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x - 10000,$$

et que l'on prenne

$$\varphi_1(x) = x^5 + x^4 - x^3, \quad \varphi_2(x) = x - 10000,$$

on trouve $\lambda = 10000$. Mais, en groupant les termes ainsi :

$$(x^5 + x^4 - x^3 - 10000) + x,$$

on peut prendre $\lambda = 7$.

296. IVᵉ MÉTHODE (méthode de Newton). — *On obtient une limite supérieure des racines en cherchant un nombre λ qui rende positives $f(x)$ et ses dérivées.*

En effet, le polynôme $f(x)$ reste positif à partir de $x = \lambda$ (263).

297. *Application des méthodes précédentes.* — Soit

$$f(x) = 6x^5 + 24x^4 - x^3 + 8x^2 - 16x - 60.$$

La première méthode donne

$$\lambda = \frac{60}{6} + 1 = 11.$$

La deuxième,

$$\lambda = 1 + \sqrt{10} = 5.$$

Le troisième donne

$$\lambda = 4 \quad \text{ou} \quad \lambda = 2,$$

suivant que l'on décompose $f(x)$ en

$$(6x^5 + 24x^4 - x^3) + (8x^2 - 16x - 60),$$

ou en $$(6x^5 + 24x^4 - x^3 - 60) + 8x^2 - 16x.$$

Pour appliquer la dernière méthode, formons les polynômes

$$f'(x) = 30x^4 + 96x^3 - 3x^2 + 16x - 16,$$

$$\frac{f''(x)}{1.2} = 60x^3 + 144x^2 - 3x + 8,$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = 60x^2 + 96x - 1.$$

Ces trois dérivées sont positives pour $x = 1$; mais si l'on remplace x par 1 dans $f(x)$, on trouve un résultat négatif. On doit donc prendre $\lambda = 2$.

Si l'on change x en $-x$, on trouve, pour limite supérieure des racines de la transformée, $\lambda' = 4$. Donc toutes les racines de l'équation proposée sont comprises entre -4 et $+2$.

EXERCICES.

I. Transformer l'équation

$$8x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 24x^2 - 7x - 11 = 0,$$

en une autre qui soit privée du deuxième terme, et dans laquelle les coefficients soient entiers, le coefficient du premier terme étant l'unité.

Résultat : $y^5 + 14y^3 + 1\,588y^2 - 455y - 47\,084 = 0$.

II. Transformer une équation dont les racines sont comprises entre l et l', en une autre dont les racines soient comprises entre λ et λ'.

III. On obtient une limite supérieure des racines en divisant chaque coefficient négatif, pris positivement, par la somme des coefficients positifs qui le précèdent, et en ajoutant l'unité à la plus grande des fractions ainsi obtenues. (Règle de *Bret.*)

IV. On obtient une limite supérieure des racines de l'équation

$$x^m \ldots - Px^{m-p} \ldots - Qx^{m-q} \ldots - R^{m-r} \ldots = 0,$$

en ajoutant les deux plus grandes des quantités $\sqrt[p]{P}$, $\sqrt[q]{Q}$, $\sqrt[r]{R}$,.... (Règle de Lagrange.)

V. Pour obtenir une limite supérieure des racines, on peut diviser le plus grand coefficient négatif, pris positivement, par le plus grand des coefficients positifs qui précèdent le premier coefficient négatif, extraire du quotient une racine dont l'indice égale l'excès du degré du terme dont le coefficient a servi de diviseur, sur le degré du premier négatif, et ajouter l'unité à cette racine. (Règle de M. Tillot.)

CHAPITRE XVIII.

RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES.

Conditions auxquelles satisfont les racines entières.

298. Théorème. — 1°. *Toute racine entière d'une équation*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \quad (1)$$

à coefficients entiers, divise :

Le dernier terme,

Le coefficient de x augmenté du quotient de la première division,

Le coefficient de x^2 augmenté du quotient de la deuxième division,

....

Le coefficient de x^{m-1} augmenté du quotient de la $(m-1)^{ième}$ division.

2°. *Le quotient de cette dernière division est égal au coefficient du premier terme, pris en signe contraire.*

3°. *Tout nombre entier qui jouit des propriétés précédentes est racine de l'équation.*

Soit a une racine entière de l'équation (1). En représentant par

$$B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-2} x + B_{m-1}$$

le quotient du premier membre par $x - a$, nous aurons (13)

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1 - B_0 a, \quad A_2 = B_2 - B_1 a, \ldots, \\ A_{m-1} = B_{m-1} - B_{m-2} a, \quad A_m = -B_{m-1} a. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Ces diverses égalités, dans lesquelles B_0, B_1, B_2, ..., B_{m-1} sont

évidemment entiers, donnent

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A_m}{a} = -B_{m-1}, \quad \dfrac{A_{m-1} - B_{m-1}}{a} = -B_{m-2}, \ldots, \\ \dfrac{A_1 - B_1}{a} = -B_0, \quad -B_0 = -A_0;\end{array}\right\} \quad (3)$$

en sorte que les deux premières parties du théorème sont démontrées.

D'ailleurs, l'élimination de a, entre les équations (3), conduit à

$$A_m + A_{m-1} a + A_{m-2} a^2 + \ldots + A_1 a^{m-1} + A_0 a^m = 0;$$

donc *tout nombre entier qui satisfait aux conditions énoncées est racine.*

Recherche des racines entières.

299. La détermination des racines entières résulte immédiatement du théorème précédent. En effet, après avoir cherché *une* limite supérieure et une limite inférieure des racines (**290**), on formera tous les diviseurs du dernier terme de l'équation, compris entre ces deux limites, et on rejettera successivement ceux de ces diviseurs qui ne satisfont pas à toutes les conditions indiquées ci-dessus : les diviseurs restants seront les racines entières cherchées (*).

Les exemples suivants montrent suffisamment la marche à suivre.

300. *Applications.* — I. *Trouver les racines entières de l'équation*

$$f(x) = 2x^4 + 4x^3 - 59x^2 - 61x + 30 = 0.$$

On peut prendre pour limites -7 et $+6$. Les diviseurs de 30, compris entre ces deux quantités sont, en excluant $+1$ et -1, 5, 3, 2, -2, -3, -5, -6. Le calcul se dispose ainsi :

(*) On ne soumet pas à ces essais les diviseurs $+1$ et -1 : il est plus court, pour ceux-ci, d'employer la substitution directe.

Diviseurs.	5	3	2	— 2	— 3	— 5	— 6
Quotients.	6	10	15	— 15	— 10	— 6	— 5
Dividendes.	— 55	— 51	— 46	— 76	— 71	— 67	— 66
Quotients.	— 11	— 17	— 23	+ 38	»	»	+ 11
Dividendes.	— 70	— 76	— 82	— 21	»	»	— 48
Quotients.	— 14	»	— 41	»	»	»	+ 8
Dividendes.	— 10	»	»	»	»	»	+ 12
Quotients.	— 2	»	»	»	»	»	— 2

Les racines entières sont + 5 et — 6. Le quotient de $f(x)$ par $x+6$ est, d'après les équations (3) (298),

$$2x^3 - 8x^2 - 11x + 5.$$

De plus, ce polynôme, divisé par $x-5$, donne $2x^2+2x-1$.

Donc $$f(x) = (x+6)(x-5)(2x^2+2x-1).$$

II. *Trouver les racines entières de l'équation*

$$f(x) = x^5 - 4x^4 - 101x^3 + 14x^2 + 504x + 576 = 0.$$

Les racines sont comprises entre -9 et $+13$. En opérant comme dans l'exemple précédent (*), on trouve que les racines entières sont -8 et $+12$. Par suite,

$$f(x) = (x+8)(x-12)(x^3 - 5x - 6).$$

301. *Remarques.* — I. On voit, par le second exemple, que l'on peut avoir à essayer beaucoup de diviseurs. Pour diminuer le nombre des essais, on s'appuie sur la proposition suivante, qu'il est très-aisé de démontrer :

Si a est racine entière d'une équation $f(x) = 0$, à coefficients entiers, $a-1$ divise $f(1)$, et $a+1$ divise $f(-1)$.

Dans le dernier exemple,

$$f(1) = 1 - 4 - 101 + 14 + 504 + 576 = 990,$$
$$f(-1) = -1 - 4 + 101 + 14 - 504 + 576 = 182.$$

(*) *Voir*, à la page 174, le tableau des calculs.

Recherche des racines entières de l'équation

$$x^5 - 4x^4 - 101x^3 + 14x^2 + 504x + 576 = 0\ (*).$$

− 8	− 6	− 4	− 3	− 2	+ 2	+ 3	+ 4	+ 6	+ 8	+ 9	+ 12
− 72	− 96	− 144	− 192	− 288	+ 288	+ 192	+ 144	+ 96	+ 72	+ 64	+ 48
+ 432	+ 408	+ 360	+ 312	+ 216	+ 792	+ 696	+ 648	+ 600	+ 576	+ 568	+ 552
− 54	− 68	− 90	− 104	− 108	+ 396	+ 232	+ 162	+ 100	+ 72	»	+ 46
− 40	− 54	− 76	− 90	− 94	+ 410	+ 246	+ 176	+ 114	+ 86	»	+ 60
+ 5	+ 9	+ 19	+ 30	+ 47	+ 205	+ 82	+ 44	+ 19	»	»	+ 5
− 96	− 92	− 82	− 71	− 54	+ 104	− 19	− 57	− 82	»	»	− 96
+ 12	»	»	»	+ 27	+ 52	»	»	»	»	»	− 8
+ 8	»	»	»	+ 23	+ 48	»	»	»	»	»	− 12
− 1	»	»	»	»	+ 24	»	»	»	»	»	− 1

(*) *Voir* l'explication à la page 173.

Le premier nombre n'admet aucun des diviseurs $(-6-1)$, $(-3-1)$, $(8-1)$, $(9-1)$. Le second n'est divisible par aucune des quantités $(-4+1)$, $(2+1)$, $(3+1)$, $(4+1)$. Par conséquent, les seuls diviseurs à essayer sont -8, -2, $+6$, $+12$.

II. Quand on a reconnu que l'équation proposée admet une racine entière a, on doit examiner si cette racine est *multiple*, c'est-à-dire si l'équation admet plusieurs *racines égales* à a (254). Pour cela, après avoir divisé $f(x)$ par $x-a$, on essaye si ce quotient est encore divisible par $x-a$; et ainsi de suite.

Recherche des racines fractionnaires.

302. THÉORÈME. — *Toute équation à coefficients entiers, dans laquelle le coefficient du premier terme est l'unité, n'a pas de racines fractionnaires.*

Soit, s'il est possible, $\frac{\alpha}{\beta}$ une *fraction irréductible* qui vérifie l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0, \quad (1)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant entiers. Remplaçant x par $\frac{\alpha}{\beta}$, et multipliant tous les termes par β^{m-1}, nous aurons

$$\frac{\alpha^m}{\beta} \pm E = 0,$$

E désignant un nombre entier. Or, cette égalité est impossible, car $\frac{\alpha^m}{\beta}$ est une fraction irréductible (*B., Arith.,* 93 et 111).

303. Au moyen de ce théorème, on ramène la recherche des racines fractionnaires à la recherche des racines entières. En effet, si l'équation $f(x)=0$ n'a pas la forme (1), on peut toujours, en multipliant toutes ses racines par un nombre entier k, choisi convenablement, trouver une transformée $F(y)=0$, dont le premier terme ait pour coefficient l'unité (285). Si a, b, c,... sont les racines entières de cette transformée, les racines de la proposée seront $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \ldots,$

304. *Remarque.* — On pourrait, de cette manière, trouver à la fois les racines entières et les racines fractionnaires de l'équation

$f(x) = 0$. Mais il vaut mieux débarrasser d'abord cette équation de ses racines entières : le calcul de la transformée en devient plus simple.

305. *Application.*

$$f(x) = 21x^4 - 41x^3 + 45x^2 - 24x + 4 = 0.$$

Cette équation n'a pas de racines négatives. De plus, elle n'a pas de racines entières; car la méthode de Newton donne 1 pour limite supérieure. Changeant x en $\frac{y}{21}$, on trouve

$$F(y) = y^4 - 41y^3 + 945y^2 - 10584y + 37044 = 0.$$

Les valeurs de x étant plus petites que 1, 21 est une limite supérieure des valeurs de y. Il suffit donc d'essayer les diviseurs de 37044 inférieurs à ce dernier nombre. Ces diviseurs sont :

$$2,\quad 3,\quad 6,\quad 7,\quad 9,\quad 12,\quad 14,\quad 18.$$

On peut même rejeter 3, 7, 9, 12, 18; car ces facteurs, diminués d'une unité, ne divisent pas $F(1) = 27365$. Le calcul se réduit donc à ce qui suit :

2	6	14
18522	6174	2646
+ 7938	− 4410	− 7938
+ 3969	− 735	− 567
+ 4914	+ 210	+ 378
»	+ 35	+ 27
»	− 6	− 14
»	− 1	− 1

Les valeurs entières de y sont 6 et 14. Donc

$$x = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}, \quad x = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}.$$

On trouve ensuite

$$f(x) = (7x - 2)(3x - 2)(x^2 - x + 1).$$

EXERCICES.

I. Trouver les racines commensurables des équations

$$6x^4 - 19x^3 + 28x^2 - 18x + 4 = 0,$$
$$8x^4 - 38x^3 + 49x^2 - 22x + 3 = 0,$$
$$64x^4 - 328x^3 + 574x^2 - 393x + 90 = 0.$$

II. Résoudre complétement les équations

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6 = 0,$$
$$x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 104x^3 + 45x^2 + 108x - 108 = 0,$$
$$x^8 - 12x^7 + 53x^6 - 92x^5 - 9x^4 + 212x^3 - 153x^2 - 108x - 108 = 0,$$
$$21x^6 - 83x^5 - 2393x^4 + 4806x^3 - 5348x^2 + 2872x - 480 = 0.$$

III. Trouver les valeurs entières de x et de y qui vérifient les deux équations

$$x^4 + y^4 + 2x^2y + 2xy^2 = 946,$$
$$x^3 + y^3 + x^2 + y^2 = 186.$$

IV. Même recherche pour les équations

$$x^3 + y^3 = 1343, \quad x^5 + y^5 = 116807.$$

V. Résoudre les équations

$$x + y + z = 48, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 770, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 12384.$$

VI. Décomposer le nombre $\frac{1622}{3}$ en quatre parties telles, que le triple de la première, le tiers de la deuxième, le cube de la troisième et la racine cubique de la quatrième, soient des nombres égaux entre eux.

VII. Dans toute équation à coefficients entiers : 1° le dernier terme est divisible par le produit des racines entières et par le produit des numérateurs des racines fractionnaires; 2° le coefficient du premier terme est divisible par le produit des dénominateurs de ces dernières racines.

CHAPITRE XIX.

DES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS.

306. On sait que la résolution des équations du premier degré est fondée sur la proposition suivante : *On peut remplacer le système de deux équations, par un autre système formé de l'une d'elles et de l'équation qu'on obtient en ajoutant membre à membre les proposées, après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur constant* λ (*B., Alg.*, 65). Ce principe, qui subsiste pour des équations de degrés quelconques, peut, étant convenablement modifié, s'appliquer à *la recherche des racines communes à deux équations algébriques*

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0. \quad (1)$$

En effet, si ces deux équations ont une racine commune a, cette racine appartient évidemment à l'équation

$$F_1(x) + \lambda F_2(x) = 0.$$

Réciproquement, toute racine commune aux deux équations

$$F_2(x) = 0, \quad F_1(x) + \lambda F_2(x) = 0, \quad (2)$$

est une racine de l'équation $F_1(x) = 0$. Par conséquent, le système (2) *équivaut* au système (1).

307. Avant d'aller plus loin, remarquons que si les équations (1) admettent plusieurs racines communes $a, b, c, \ldots, k$, leurs premiers membres seront divisibles par le produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)$$

des facteurs correspondant à ces racines, et qu'il en sera de même pour les premiers membres des équations (2). Si l'on convient d'appeler *plus grand commun diviseur* de deux polynômes entiers $\varphi(x)$, $\psi(x)$, le produit des facteurs du premier degré, de la forme $x - \alpha$, communs à ces deux polynômes, on voit que *le plus grand commun diviseur des polynômes* $F_1(x)$ *et* $F_2(x)$, *est égal au plus grand commun diviseur des polynômes* $F_2(x)$ et $F_1(x) + \lambda F_2(x)$.

308. Les conclusions précédentes subsisteront si l'on remplace

la constante λ par une fonction de x, pourvu que cette fonction ne devienne pas infinie pour une valeur de x satisfaisant au système (1) ou au système (2) : en particulier, on pourra toujours prendre λ égal à un polynôme entier. Il y a plus : on peut choisir ce facteur de manière à rendre le second système plus simple que le premier.

En effet, en supposant le degré de $F_1(x)$ égal ou supérieur au degré de $F_2(x)$, divisons le premier polynôme par le second, de manière à obtenir un quotient entier Q et un reste $F_3(x)$, de degré moindre que le diviseur. A cause de

$$F_1(x) = F_2(x).Q + F_3(x),$$

si nous prenons $\lambda = -Q$, le système (2) se réduit à

$$F_2(x) = 0, \quad F_3(x) = 0.$$

Conséquemment, *les racines communes aux équations*

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0, \quad (1)$$

sont les mêmes que les racines communes aux équations

$$F_2(x) = 0, \quad F_3(x) = 0, \quad (2)$$

$F_3(x)$ *étant le reste de la division de* $F_1(x)$ *par* $F_2(x)$; ou, ce qui est équivalent,

Le plus grand commun diviseur de deux polynômes est le même que le plus grand commun diviseur entre l'un d'eux et le reste de la division de l'autre par celui-ci.

309. *Remarque.* — Si $F_1(x)$ est exactement divisible par $F_2(x)$, ce dernier polynôme est le plus grand commun diviseur. En même temps, *toutes les racines* de l'équation $F_2(x) = 0$ appartiennent à $F_1(x) = 0$.

310. Les raisonnements précédents s'appliquent au système (2), puis à celui qu'on en déduirait comme le système (2) a été déduit de (1); et ainsi de suite. Donc, *après avoir divisé* $F_1(x)$ *par* $F_2(x)$, *on divise ce second polynôme par le reste* $F_3(x)$, *puis ce premier reste par le deuxième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un reste* $F_n(x)$ *qui divise exactement le reste précédent: ce dernier reste est le plus grand commun diviseur des polynômes* $F_1(x)$, $F_2(x)$; *et les racines de l'équation* $F_n(x) = 0$ *sont les racines communes aux équations* $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$.

311. *Remarques.* — I. Si l'on arrive à un reste numérique, les polynômes $F_1(x)$, $F_2(x)$ sont dits *premiers entre eux*, et les équations $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$ n'ont aucune racine commune.

II. Dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux polynômes, on peut, afin de simplifier les calculs, multiplier par un facteur numérique arbitraire, soit un dividende quelconque, soit même un dividende *partiel* quelconque. En effet, l'introduction de ces quantités numériques n'altère pas les facteurs de la forme $x - \alpha$, communs aux polynômes proposés.

312. *Application.*

$$F_1(x) = 2x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1,$$
$$F_2(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2.$$

Voici le tableau des calculs :

$$\begin{array}{r|l}
2x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 & 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^6 - 3x^5 - 4x^4 - x^3 + 2x^2 & x^2 - x - 1 \\ \cline{1-1}
-2x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2x - 1 & \\
+2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x & \\ \cline{1-1}
-2x^4 + x^3 + 4x^2 - 1 & \\
+2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2 & \\ \cline{1-1}
4x^3 + 8x^2 + x - 3 & = F_3(x).
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr|l}
 & 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 2 & 4x^3 + 8x^2 + x - 3 \\ \cline{3-3}
(*) & 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 2x - 4 & x - 1 \\
 & -4x^4 - 8x^3 - x^2 + 3x & \\ \cline{2-2}
 & -2x^3 + 7x^2 + 5x - 4 & \\
(*) & -4x^3 + 14x^2 + 10x - 8 & \\
 & +4x^3 + 8x^2 + x - 3 & \\ \cline{2-2}
 & (*)\ 22x^2 + 11x - 11 & \\
 & 2x^2 + x - 1 & = F_4(x).
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
4x^3 + 8x^2 + x - 3 & 2x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
-4x^3 - 2x^2 + x & 2x + 3 \\ \cline{1-1}
6x^2 + 3x - 3 &
\end{array}$$

(*) Le premier et le second dividende ont été multipliés par 2; le reste a été divisé par 11. Le binôme $x - 1$ n'est donc pas le quotient de $F_2(x)$ par $F_3(x)$; ce quotient serait $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

La troisième division se faisant exactement, le plus grand commun diviseur des polynômes donnés est

$$F_4(x) = 2x^2 + x - 1 \ (^*).$$

Par suite, les racines communes aux équations $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$ sont données par l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$. On trouve $x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$.

313. ***Remarque.*** — La méthode des racines commensurables (299, 302), appliquée aux équations $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$, aurait fait découvrir que les premiers membres de ces équations sont divisibles par $(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Supprimant ce facteur, on serait arrivé aux équations plus simples

$$x^4 - 2x + 1 = 0, \quad x^2 + x + 2 = 0,$$

dont les premiers membres sont premiers entre eux. On voit donc que, *avant d'effectuer l'opération du plus grand commun diviseur sur les premiers membres de deux équations données, il est utile de chercher les racines commensurables de ces équations.*

EXERCICES.

I. Trouver les racines communes aux équations

$$x^5 + x^4 - 48x^3 + 19x^2 + 29x - 4 = 0,$$
$$2x^4 - 16x^3 + 23x^2 - 2x - 1 = 0.$$

II. Même recherche pour les deux équations

$$x^6 - 13x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 8x + 1 = 0,$$
$$3x^5 - 26x^3 + 12x^2 + 19x + 4 = 0.$$

(*) Ou plutôt $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

CHAPITRE XX.

THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

Préliminaires.

314. Lemme. — *Si une équation $f(x)=0$ n'a pas de racines égales, le polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ n'ont aucun facteur commun.*

Soit

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l),$$

d'où (187)

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\ldots+\frac{f(x)}{x-l}.$$

Le binôme $x-a$ divise les *polynômes entiers* $\frac{f(x)}{x-b},\ldots,$ $\frac{f(x)}{x-l}$; mais il ne divise pas

$$\frac{f(x)}{x-a}=(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l):$$

ce binôme n'est donc pas facteur de $f'(x)$. Le même raisonnement est applicable aux binômes $x-b$, $x-c$, ..., $x-l$; donc, etc.

315. Théorème. — *Si une équation $f(x)=0$ a des racines égales, le polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ ont un plus grand commun diviseur formé du produit des facteurs correspondant aux racines égales, chacun d'eux étant pris une fois de moins que dans $f(x)$.*

Pour fixer les idées, supposons que l'équation $f(x)=0$ ait p racines égales à a, q racines égales à b, r racines égales à c, et un certain nombre de racines simples. En représentant par $\varphi(x)$ (*) le produit des facteurs correspondant à ces dernières racines, nous

(*) Si l'équation proposée n'a que des racines multiples, $\varphi(x)$ se réduit à l'unité.

aurons

$$f(x) = (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^r \varphi(x). \quad (1)$$

Par suite,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} + \frac{r}{x-c} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad (2)$$

et

$$f'(x) = \mathrm{D}[\psi(x) + (x-a)(x-b)(x-c)\varphi'(x)], \quad (3)$$

en faisant, pour abréger,

$$\psi(x) = \left(\frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} + \frac{r}{x-c}\right)(x-a)(x-b)(x-c)\varphi(x),$$

$$\mathrm{D} = (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(x-c)^{r-1}.$$

Cela posé, les polynômes $f(x)$, $f'(x)$ sont évidemment divisibles par D. De plus, le raisonnement employé ci-dessus (314) montre que les quotients $\frac{f(x)}{\mathrm{D}}$, $\frac{f'(x)}{\mathrm{D}}$ sont *premiers entre eux;* Donc $f(x)$ et $f'(x)$ ont, pour plus grand commun diviseur, le produit D.

316. Corollaire. — *Pour qu'une équation $f(x) = 0$ ait des racines égales, il faut et il suffit que les polynômes $f(x)$, $f'(x)$ aient un commun diviseur, ou,* ce qui est équivalent, *que cette équation et l'équation dérivée $f'(x) = 0$ aient une ou plusieurs racines communes.*

Réduction d'une équation qui a des racines égales.

317. Les explications précédentes montrent suffisamment comment on peut *reconnaître qu'une équation $f(x) = 0$ a des racines égales.* On peut aller plus loin et *ramener la résolution de $f(x) = 0$ à la résolution d'autres équations donnant respectivement les racines simples, les racines doubles, les racines triples, ..., de la proposée, abstraction faite des degrés de multiplicité de ces racines.*

Représentons par X_1 le produit des facteurs correspondant aux racines simples, par X_2 le produit des facteurs correspondant aux racines doubles, par X_3 le produit des facteurs correspondant aux racines triples, ..., *chaque facteur étant pris une seule fois,*

et, pour fixer les idées, supposons que la proposée n'ait aucune racine dont le *degré de multiplicité* surpasse 4. Nous aurons

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4.$$

Soit D le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$: d'après le théorème ci-dessus, $D = X_2 X_3^2 X_4^3$.

De même, le plus grand commun diviseur entre D et sa dérivée sera $D_1 = X_3 X_4^2$.

De même encore, le plus grand commun diviseur entre D_1 et sa dérivée sera $D_2 = X_4$.

D_2 ne contenant plus de facteurs multiples, le plus grand commun diviseur D_3, entre ce polynôme et sa dérivée, serait l'unité.

Divisons à présent $f(x)$ par D, D par D_1, etc.; nous aurons

$$\frac{f(x)}{D} = Q = X_1 X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{D_1}{D_2} = Q_2 = X_3 X_4,$$

$$\frac{D_2}{D_3} = Q_3 = X_4.$$

En troisième lieu, divisons Q par Q_1, Q_1 par Q_2, etc.; nous aurons enfin

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = X_2, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = X_3, \quad Q_3 = X_4.$$

Il est évident, actuellement, que les équations cherchées sont

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0.$$

318. *Remarques.* — I. L'équation $Q = 0$ admet toutes les racines de la proposée, mais chacune d'elles une fois seulement.

II. A cause des longs calculs qu'exige *la méthode des racines égales*, on doit, avant de l'appliquer à une équation proposée, s'assurer que celle-ci n'admet aucune racine commensurable (*).

(*) On doit comprendre pourquoi, contrairement à l'ordre indiqué dans le Programme, nous avons placé la Recherche des racines com-

III. La remarque précédente et les théorèmes I et II indiqués ci-dessous, permettent d'affirmer qu'*il est inutile d'appliquer la méthode des racines égales aux équations des cinq premiers degrés.*

319. *Application.*

$$f(x) = x^6 - 7x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$ est

$$D = x^2 - x - 1.$$

On a ensuite $\quad D_1 = 1;$

puis

$$\frac{f(x)}{D} = Q = x^4 + x^3 - 5x^2 + 2, \quad \frac{D}{D_1} = Q_1 = x^2 - x - 1,$$

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1 = x^2 + 2x - 2, \quad Q_1 = X_2 = x^2 - x - 1;$$

donc $\quad f(x) = (x^2 + 2x - 2)(x^2 - x - 1)^2.$

EXERCICES.

I. Si une équation a une seule racine multiple, cette racine est commensurable (*).

II. Si une équation a des racines dont les degrés de multiplicité soient tous différents les uns des autres, ces racines sont commensurables (*).

III. Si $f(x)$ est divisible par $(x-a)^n$, a est racine des équations

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \ldots, f^{n-1}(x) = 0;$$

et réciproquement.

IV. Exprimer que l'équation $x^m + px^n + q = 0$ a une racine double.

---

mensurables avant la Théorie des racines égales. La même remarque est applicable au chapitre précédent.

(*) Il est sous-entendu que les coefficients de l'équation sont commensurables.

V. Résoudre complétement l'équation

$$4x^6 - 32x^5 + 121x^4 - 229x^3 + 251x^2 - 152x + 44 = 0.$$

Résultat :

$$x = \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{7}\sqrt{-1}\right), \quad x = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{19}\sqrt{-1}\right).$$

VI. Même recherche pour l'équation

$$x^{10} - 2x^9 + x^8 - 4x^7 + x^6 - 6x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Résultat :

$$x = 1 \pm \sqrt{2}, \quad x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}\right), \quad x = -\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}\right).$$

VII. Dans quel cas le polynôme $f(x)$ est-il divisible par sa dérivée ?

CHAPITRE XXI.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ.

Condition de réalité des racines.

320. En faisant disparaître le deuxième terme (289) d'une équation quelconque du troisième degré, à une seule inconnue et à coefficients réels, on la réduit à la forme

$$x^3 + px + q = 0, \quad (1)$$

p et q étant des quantités réelles.

Sans rendre l'équation (1) moins générale, on peut supposer son dernier terme positif. En effet, l'équation

$$x^3 + px - q = 0 \quad (2)$$

a ses racines égales et de signes contraires aux racines de l'équation (1).

Cela posé, si le coefficient p est positif, il résulte immédiatement, du théorème de Descartes, que l'équation (1) a *une seule racine réelle*, laquelle est *négative* (*). Par conséquent, pour que

(*) A cause de $q > 0$.

cette même équation (1) *puisse avoir* ses trois racines réelles, p doit être négatif. Changeons donc p en $-p'$, et discutons l'équation

$$x^3 - p'x + q = 0, \quad (3)$$

en y supposant $$p' > 0, \quad q > 0.$$

Désignant par y le premier membre, et faisant varier x de 0 à $+\sqrt{p'}$ (*), on voit que la fonction y, égale à q pour ces valeurs extrêmes de x, a un minimum déterminé par $3x^2 - p' = 0$ (225), ou $x = +\sqrt{\frac{p'}{3}}$. Suivant que ce minimum, égal à $q - \frac{2}{3}p'\sqrt{\frac{p'}{3}}$, est *positif*, *nul* ou *négatif*, l'équation (3) a *deux racines imaginaires*, ou *deux racines positives égales*, ou *deux racines positives inégales* (**).

321. D'après cela :

1°. La *condition de réalité et d'inégalité* des trois racines de l'équation (1) est $q < \frac{2}{3}p'\sqrt{\frac{p'}{3}}$, ou $27q^2 < 4p'^3$, ou enfin, à cause de $p' = -p$,

$$4p^3 + 27q^2 < 0 : \quad (4)$$

ainsi qu'on pouvait s'y attendre, elle est indépendante du signe de q.

2°. Si $$4p^3 + 27q^2 = 0,$$

l'équation (1) a *deux racines égales*.

3°. Enfin, la relation

$$4p^3 + 27q^2 > 0$$

exprime que l'équation (1) a *deux racines imaginaires*.

322. *Remarques*. — I. La condition $p < 0$, que nous avions trouvée en commençant, est comprise dans la relation (4).

II. Quand l'équation (1) a ses trois racines réelles, les deux ra-

---

(*) Cette dernière quantité est évidemment une limite supérieure des racines.

(**) On rend cette discussion encore beaucoup plus simple, si l'on considère la courbe dont y est l'ordonnée.

cines de même signe sont comprises, l'une entre o et $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$, l'autre entre $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $\pm\sqrt{-p}$.

Équations binômes du troisième degré.

323. Soit d'abord l'équation

$$x^3 = 1, \quad (5)$$

qui donne

$$x = \sqrt[3]{1}. \quad (6)$$

En la mettant sous la forme $x^3 - 1 = 0$,

où

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

on voit qu'elle a pour racines

$$x = 1, \quad x = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}). \quad (7)$$

Par conséquent, *l'unité positive a trois racines cubiques; l'une de ces racines est égale à* $+1$, *et les deux autres sont imaginaires.*

324. *Remarques.* — I. Les trois valeurs de $\sqrt[3]{-1}$ sont, à cause des formules (7),

$$x = -1, \quad x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}).$$

II. *Des deux racines cubiques imaginaires de l'unité, l'une est le carré de l'autre.* En effet,

$$\left[-\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1})\right]^2 = \frac{1}{4}(-2 \pm 2\sqrt{3}\sqrt{-1})$$
$$= -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3}\sqrt{-1}).$$

325. Considérons à présent l'équation

$$x^3 = A, \quad (8)$$

ou, ce qui est équivalent, la formule

$$x = \sqrt[3]{A}; \quad (9)$$

et, pour abréger, supposons $A > 0$.

En représentant par a la valeur réelle de x, ou la valeur *arithmétique de* $\sqrt[3]{A}$ (61), et posant $x = ay$, nous réduirons l'équation (8) à

$$y^3 = 1. \quad (10)$$

Par conséquent, *Toute quantité positive* A *a trois racines cubiques, que l'on obtient en multipliant la valeur arithmétique de* $\sqrt[3]{A}$ *par les trois racines cubiques de l'unité.*

326. Plus généralement, *si a désigne une valeur quelconque de* $\sqrt[3]{A}$, *et que θ et θ^2 soient les racines cubiques imaginaires de l'unité* (323), *les deux dernières valeurs de* $\sqrt[3]{A}$ *seront $a\theta$ et $a\theta^2$, même lorsque* A *est imaginaire.*

Ce dernier cas donne lieu au problème suivant, analogue à une question traitée dans le chapitre IV.

327. Problème. — *Ramener l'expression* $\sqrt[3]{A + B\sqrt{-1}}$ *à la forme* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

De
$$\sqrt[3]{A + B\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

on conclut, en élevant au cube,

$$A = \alpha^3 - 3\alpha\beta^2, \quad B = 3\alpha^2\beta - \beta^3;$$

et, par les propriétés des modules (51),

$$\sqrt[3]{A^2 + B^2} = (\alpha^2 + \beta^2).$$

Eliminant β^2 ou α^2 entre cette dernière équation et les deux précédentes, on obtient, en représentant par γ^2 la valeur positive du radical, soit

$$\alpha^3 - \frac{3}{4}\gamma^2\alpha - \frac{1}{4}A = 0, \quad (A)$$

soit
$$\beta^3 - \frac{3}{4}\gamma^2\beta + \frac{1}{4}B = 0. \quad (B)$$

Pour fixer les idées, considérons l'équation (A). Elle a au moins une racine réelle α_1 (*), dont on pourra trouver la valeur exacte ou une valeur approchée (Chap. XVIII et XXIV). Si β_1 est la racine

(*) Les équations (A) et (B) ont toutes leurs racines réelles; mais cette circonstance est indifférente, quant à présent.

2°. $x^3 + 15x + 20 = 0$. On trouve, de la même manière,

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{225}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{225}} = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25};$$

puis, en prenant seulement les valeurs arithmétiques de ces deux derniers radicaux,

$$x_1 = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}, \quad x_2 = \theta\sqrt[3]{5} - \theta^2\sqrt[3]{25}, \quad x_3 = \theta^2\sqrt[3]{5} - \theta\sqrt[3]{25},$$

ou

$$x_1 = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}, \quad x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}) - \frac{1}{2}(\sqrt[6]{16875} + \sqrt[6]{675})\sqrt{-1},$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt[6]{16875} + \sqrt[6]{675})\sqrt{-1}.$$

Discussion de la formule de Cardan.

332. *Premier cas :* $B > 0$, *ou* $4p^3 + 27q^2 > 0$. Les quantités $A + \sqrt{B}$, $A - \sqrt{B}$ sont réelles et inégales; donc les valeurs R_1, R_2, peuvent être supposées *réelles;* de plus, elles sont *inégales.* Il résulte alors, des formules (5), que l'équation (1) a *deux racines imaginaires.*

333. *Deuxième cas :* $B = 0$, *ou* $4p^3 + 27q^2 = 0$. Les valeurs désignées par R_1, R_2 peuvent encore être supposées *réelles;* mais elles sont égales; donc $x_1 = 2R_1$, $x_2 = x_3 = -R_1$ (*) : l'équation (1) a *deux racines égales.*

Ces deux résultats s'accordent avec ce que nous avons vu ci-dessus (321).

334. *Troisième cas :* $B < 0$, *ou* $4p^3 + 27q^2 < 0$. Les binômes $A + \sqrt{B}$, $A - \sqrt{B}$ étant *imaginaires,* il en est de même pour R_1 et R_2; en sorte que *les valeurs des trois racines, données par les formules* (5), *se présentent sous forme imaginaire, précisément quand ces trois racines sont réelles.* Cette sorte de paradoxe a fait donner au cas dont il s'agit le nom de *cas irréductible.* Nous verrons plus loin comment, au moyen des fonctions circulaires, on peut alors résoudre l'équation (**).

(*) A cause de $\theta^2 + \theta = -1$.

(**) Si l'on conçoit que l'on ait mis $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$

EXERCICES.

I. Calculer la racine réelle de l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Résultat : $x = 2,\ 094\,551\,48\ldots.$

II. Résoudre complétement

$$x^9 + x^7 + 3x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

III. Dans quel cas les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ sont-elles de la forme $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, A et B étant rationnels?

Réponse : Lorsque $q = \frac{p^3}{27\,m} - m$, m étant rationnel.

CHAPITRE XXII.

NOTIONS SUR LE CALCUL DES DIFFÉRENCES.

335. La *différence* d'une quantité est l'accroissement que reçoit cette quantité en passant d'une valeur à une autre. Elle se représente habituellement par la caractéristique Δ (185).

D'après cela, si l'on considère une suite de termes

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\ldots,\quad u_{n-1},\quad u_n, \quad (1)$$

procédant suivant une loi quelconque, ou même pris arbitrairement, on aura

$$u_1 - u_0 = \Delta u_0,\quad u_2 - u_1 = \Delta u_1,\ldots,\quad u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1};$$

et les quantités

$$\Delta u_0,\quad \Delta u_1,\ldots,\quad \Delta u_{n-1}, \quad (2)$$

seront les *différences premières* des termes donnés.

(327), on aura, le produit $R_1 R_2$ étant réel,

$$R_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1},\quad R_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Par suite,

$$x_1 = 2\alpha,\quad x_2 = -(\alpha + \beta\sqrt{3}),\quad x_3 = -(\alpha - \beta\sqrt{3}),$$

valeurs réelles. Malheureusement, l'équation du troisième degré qui devrait donner α ne diffère pas, au fond, de l'équation proposée.

336. Opérant sur la suite (2) comme sur la suite (1), on aura

$$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta\Delta u_0, \quad \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta\Delta u_1, \ldots, \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2} = \Delta\Delta u_{n-2}$$

ou, en simplifiant la notation

$$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0, \quad \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1, \ldots, \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2} = \Delta^2 u_{n-2};$$

et les quantités

$$\Delta^2 u_0, \quad \Delta^2 u_1, \ldots, \quad \Delta^2 u_{n-2} \quad (3)$$

seront les *différences deuxièmes* des termes donnés. Ainsi de suite.

337. *Remarque.* — Les $n+1$ quantités $u_0, u_1, \ldots, u_n$ donnent lieu à n différences premières, à $n-1$ différences deuxièmes, et enfin à une seule différence de l'ordre n, représentée par $\Delta^n u_0$.

338. On adopte ordinairement, dans la formation d'un *tableau des différences successives*, l'une ou l'autre des deux dispositions suivantes :

$$\begin{array}{l}
u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \ldots, u_{n-3}, \quad u_{n-2}, \quad u_{n-1}, \quad u_n, \\
\quad \Delta u_0, \quad \Delta u_1, \quad \Delta u_2, \quad \Delta u_3, \ldots\ldots\ldots, \Delta u_{n-3}, \quad \Delta u_{n-2}, \quad \Delta u_{n-1}, \\
\qquad \Delta^2 u_0, \quad \Delta^2 u_1, \quad \Delta^2 u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \Delta^2 u_{n-3}, \quad \Delta^2 u_{n-2}, \\
\qquad\quad \Delta^3 u_0, \quad \Delta^3 u_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \Delta^3 u_{n-3}, \\
\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad \Delta^{n-1} u_0, \quad \Delta^{n-1} u_1, \\
\qquad\qquad\qquad\quad \Delta^n u_0.
\end{array}$$

u	Δ	Δ^2		Δ^{n-1}	Δ^n
u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	....	$\Delta^{n-1} u_0$	$\Delta^n u_0$
u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	....	$\Delta^{n-1} u_1$	
u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	....		
u_3	Δu_3	$\Delta^2 u_3$			
....	....	....			
u_n	Δu_{n-1}				

La première disposition est suffisamment expliquée par ce qui précède. Quant au second tableau, la relation générale

$$\Delta^i u_p = \Delta^{i-1} u_{p+1} - \Delta^{i-1} u_p$$

donne la règle suivante :

Pour obtenir un terme quelconque, on retranche le terme écrit à sa gauche, du terme écrit au-dessous de celui-ci.

339. *Application.* — Soient $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, $u_3 = 15$, $u_4 = 30$, $u_5 = 47$, $u_6 = 71$.

On pourra former les deux tableaux suivants :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2, & & 7, & & 15, & & 30, & & 47, & & 71, \\ & 5, & & 8, & & 15, & & 17, & & 24, & \\ & & 3, & & 7, & & 2, & & 7, & & \\ & & & 4, & & -5, & & 5, & & & \\ & & & & -9, & & 10, & & & & \\ & & & & & 19. & & & & & \end{array}$$

u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
2	5	3	4	− 9	19
7	8	7	− 5	10	
15	15	2	5		
30	17	7			
47	24				
71					

Principaux problèmes sur les différences.

340. PROBLÈME I. — *Connaissant le premier terme u_0 d'une suite, ainsi que ses différences successives Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots, \Delta^n u_0$, calculer les termes u_1, $u_2, \ldots, u_n$* (*).

On a d'abord

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0. \quad (1)$$

D'ailleurs, *la différence d'une somme est égale à la somme des différences des parties* (185); donc

$$\Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0;$$

puis, en ajoutant membre à membre,

$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0. \quad (2)$$

(*) Dans le Programme officiel, ce problème est ainsi énoncé : « Étant » donnés $m+1$ nombres u_0, u_1, $u_2, \ldots, u_m$, trouver : 1° l'expression du » terme général $u_n \ldots$ ». Il est à peine besoin de faire observer que l'*expression du terme général* est $u_n = u_n$.

Appliquant encore le même principe, on aura

$$\Delta u_2 = \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0;$$

et, conséquemment,

$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0. \quad (3)$$

Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on est en droit de supposer

$$\left.\begin{array}{l} u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + C_{n,p}\Delta^p u_0 + \ldots \\ \quad + \frac{n}{1}\Delta^{n-1} u_0 + \Delta^n u_0. \end{array}\right\} \quad (A)$$

En effet, les coefficients des différents termes, dans les valeurs de $u_1, u_2, u_3, \ldots$, se forment de la même manière que les nombres compris dans les lignes horizontales du *triangle arithmétique* (118) : les coefficients du développement de u_n sont donc ceux de $(1+z)^n$ (*).

341. *Remarque.* — On peut écrire l'équation (A) sous la forme symbolique

$$u_n = u_0(1+\Delta)^n,$$

pourvu que l'on convienne de remplacer, dans le développement de second membre, $u_0 \Delta^p$ par $\Delta^p u_0$.

342. Problème II. — *Connaissant* $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$, *calculer* $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots, \Delta_n u_0$.

On a, par définition,

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad (1)$$

$$\Delta u_1 = u_2 - u_1;$$

et, en retranchant membre à membre,

$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0. \quad (2)$$

Augmentant tous les indices d'une unité (**), on aura de même

$$\Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1;$$

(*) On peut aussi, pour montrer la généralité de la formule (A), faire voir qu'elle subsiste quand on y remplace n par $n+1$.

(**) Ceci revient à supposer que la suite donnée commence par u_1, au lieu de commencer par u_0.

donc, en retranchant $\Delta^2 u_0$ de $\Delta^2 u_1$,

$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0. \quad (3)$$

On trouve, semblablement,

$$\Delta^4 u_0 = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0.$$

Donc, en général,

$$\left.\begin{aligned}\Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1}u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \ldots\\ + (-1)^p C_{n,p} u_{n-p} + \ldots \pm u_0.\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Pour *vérifier* cette nouvelle formule, il suffit de voir si elle subsiste quand on y remplace n par $n+1$.

Or, la formule étant supposée vraie pour le cas d'une différence $n^{ième}$, on aura

$$\Delta^n u_1 = u_{n+1} - \frac{n}{1}u_n + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-1} - \ldots$$
$$+ (-1)^{p+1} C_{n,p+1} u_{n-p} + \ldots \pm u_1;$$

et, en retranchant membre à membre,

$$\Delta^{n+1} u_0 = u_{n+1} - \left(\frac{n}{1} + 1\right)u_n + \left(\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n}{1}\right)u_{n-1}\ldots$$
$$+ (-1)^{p+1}(C_{n,p+1} + C_{n,p})u_{n-p} + \ldots \mp u_0.$$

Mais

$$\frac{n}{1} + 1 = \frac{n+1}{1}, \quad \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n}{1} = \frac{(n+1)n}{1.2}, \ldots,$$
$$C_{n,p+1} + C_{n,p} = C_{n+1,p+1};$$

donc

$$\Delta^{n+1} u_0 = u_{n+1} - \frac{n+1}{1}u_n + \ldots + (-1)^{p+1} C_{n+1,p+1} u_{n-p} + \ldots \mp u_0;$$

ou, en remplaçant p par $p-1$,

$$\Delta^{n+1} u_0 = u_{n+1} - \frac{n+1}{1}u_n + \ldots + (-1)^p C_{n+1,p} u_{n+1-p} + \ldots \mp u_0;$$

etc.

343. *Remarque.* — La formule (B) peut être écrite sous la forme symbolique

$$\Delta^n u_0 = (u-1)^n.$$

Différences des fonctions.

344. Si, dans une équation $u = f(x)$, on donne à la variable indépendante x des valeurs arbitraires

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,$$

la fonction u prendra des valeurs correspondantes

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n,$$

dont les différences successives dépendront, non-seulement de la nature de la fonction $f(x)$, mais encore des valeurs attribuées à x: ordinairement, on suppose que celles-ci forment une progression par différence. Autrement dit, on fait

$$x_1 = x_0 + h,\quad x_2 = x_0 + 2h,\ldots,\quad x_m = x_0 + nh,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\Delta x = h = \text{const}.$$

345. Prenons, par exemple,

$$u = a^x;$$

nous aurons $\Delta u = a^{x+h} - a^x$, ou

$$\Delta u = a^x(a^h - 1).$$

Conséquemment, *la différence de la fonction exponentielle a^x est égale à cette fonction multipliée par une constante*. De là résulte, immédiatement,

$$\Delta^n u = a^x(a^h - 1)^n.$$

346. Soit encore $u = x(x+h)(x+2h)\ldots(x+ph)$, p étant un nombre constant. On aura

$$\begin{aligned}\Delta u &= (x+h)(x+2h)\ldots(x+ph)(x+\overline{p+1}\,h)\\ &\quad - x(x+h)\ldots(x+ph)\\ &= (x+h)(x+2h)\ldots(x+ph)(p+1)h,\end{aligned}$$

ou

$$\Delta u = \frac{u}{x}(p+1)h.$$

Par suite,

$$\Delta^2 u = \frac{u}{x(x+h)}(p+1)ph^2,$$

$$\Delta^3 u = \frac{u}{x(x+h)(x+2h)}(p+1)p(p-1)h^3,$$

....

et enfin $\quad \Delta^{p+1} u = (p+1)p\ldots 3.2.1\, h^{p+1} = \text{const}.$

Ainsi, 1° *la fonction* $x(x+h)\ldots(x+ph)$, *de degré* $p+1$, *a pour différences successives des fonctions entières dont les degrés sont* p, $p-1,\ldots$; 2° *sa différence* $(p+1)^{\text{ième}}$ *se réduit à une constante;* 3° conséquemment, *les différences d'ordre supérieur à* $p+1$ *sont nulles.*

347. Ces résultats subsistent pour toute fonction entière, pourvu que l'on continue de supposer constante la différence de la variable indépendante. Soit en effet

$$u = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m.$$

1°. On aura, par le théorème de Taylor,

$$\Delta u = hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + A_0 h^m;$$

et comme les polynômes $f'(x)$, $f''(x),\ldots$ sont respectivement des degrés $m-1$, $m-2,\ldots$, il en résulte que *la différence première d'une fonction entière, de degré m, est une fonction entière de degré* $m-1$.

2°. Par conséquent, *les degrés des différences successives*

$$\Delta^2 u,\quad \Delta^3 u,\ldots,\quad \Delta^{m-1} u,\quad \Delta^m u$$

sont, respectivement,

$$m-2,\quad m-3,\ldots,\quad 1,\qquad 0.$$

3°. *La différence* $m^{\text{ième}}$ étant du degré 0, c'est-à-dire *étant constante* (*), *toutes les différences suivantes sont nulles.*

348. *Remarques.* — I. Si l'on suppose la fonction Δu ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, le premier terme du développement sera le produit de h par le premier terme de $f'(x)$. D'ailleurs, cette fonction est divisible par h (**222**, I); donc,

---

(*) Si les quantités $x_0, x_1,\ldots, x_m$ ne formaient pas une progression par différence, $\Delta^m u$ serait encore indépendante de la *valeur initiale* de x; mais l'on n'aurait plus $\Delta^m u_0 = \Delta^m u_1 = \Delta^m u_2 = \ldots.$ Par exemple, si l'on suppose

$$u = x^2 - 3x + 1,\quad \Delta x_0 = h,\quad \Delta x_1 = k,\quad \Delta x_2 = l,\quad \Delta x_3 = i,$$

on aura $\quad \Delta^2 u_0 = 2hk,\quad \Delta^2 u_1 = 2kl,\quad \Delta^2 u_2 = 2li,$

quel que soit x_0.

en représentant par B_1, $B_2, \ldots, B_{m-1}$ des fonctions entières de h, on aura

$$\Delta u = h[m A_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \ldots + B_{m-1}].$$

Pour les mêmes raisons, et en supposant toujours $\Delta x = h$:

$$\Delta^2 u = h^2[m(m-1) A_0 x^{m-2} + C_1 x^{m-3} + \ldots + C_{m-2}],$$

$$\Delta^3 u = h^3[m(m-1)(m-2) A_0 x^{m-3} + D_1 x^{m-4} + \ldots + D_{m-3}],$$

....

et enfin

$$\Delta^m u = h^m . m(m-1)\ldots 2.1 A_0. \quad (C)$$

En effet, la différence $m^{\text{ième}}$ doit être composée d'un terme seulement.

II. En égalant cette dernière valeur à celle qui résulte de la formule (B), on a

$$\left.\begin{array}{c} f(x_0 + mh) - \frac{m}{1} f(x_0 + \overline{m-1}\, h) + \ldots \pm f(x_0) \\ = 1.2.3\ldots m . A_0 h^m. \end{array}\right\} \quad (D)$$

III. En particulier, si $f(x) = x^m$, $x_0 = 1$, $h = 1$, on aura ce résultat remarquable :

$$\left.\begin{array}{c} (m+1)^m - \frac{m}{1} m^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m - \ldots \pm 1 \\ = 1.2.3\ldots m. \end{array}\right\} \quad (E)$$

Construction des Tables numériques.

349. PROBLÈME. — *Supposant constante la différence de la variable, et connaissant les résultats de la substitution de m valeurs consécutives de cette variable, dans une fonction entière u, du degré m; calculer successivement toutes les autres valeurs de u.*

Connaissant u_0, $u_1, \ldots, u_{m-1}$, on pourra d'abord, comme on l'a vu au n° 338, former le tableau des différences successives de ces quantités, *jusqu'à l'ordre* $m-1$. D'un autre côté, à cause de $\Delta x = h$, on a

$$\Delta^m u_0 = \Delta^m u_1 = \ldots = 1.2.3\ldots m A_0 h^m,$$

A_0 étant le coefficient du premier terme de u. Conséquemment, *au*

moyen d'additions successives, on pourra prolonger indéfiniment le tableau des différences et des valeurs de la fonction u.

350. *Remarques.* — I. Ordinairement, les m valeurs attribuées à x sont des nombres entiers consécutifs.

II. Si la fonction u, toujours supposée entière et de degré m, n'est pas donnée, sa différence $m^{ième}$ ne sera plus connue à priori. Il faudra donc, pour que l'on puisse prolonger indéfiniment le tableau des valeurs de u, que l'on en connaisse $m+1$.

III. On peut supposer que la progression formée par les valeurs de x soit prolongée *vers l'infini négatif* (h étant positif); pour obtenir les nouvelles valeurs de u (*), on prolongera, au moyen de *soustractions successives*, le tableau déjà formé.

351. *Applications.* — 1°. $u = x^2$, $\Delta x = 1$, $x_0 = 0$. A cause de $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $\Delta^2 u = 2$, on formera, ainsi qu'il suit, le *tableau des carrés.*

x	u	Δu	$\Delta^2 u$
0	0	1	2
1	1	3	2
2	4	5	2
3	9	7	2
4	16	9	2
5	25	11	.
6	36	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

2°. $u = x^3$. Si l'on donne à x les valeurs 0, 1, 2, d'où $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 8$, on aura

$$\Delta u_0 = 1, \quad \Delta u_1 = 7, \quad \Delta^2 u_0 = 6.$$

Par suite, à cause de $\Delta^3 u = 1.2.3 = 6$, des additions successives serviront à former le *tableau des cubes :*

(*) Ces valeurs seraient convenablement désignées par $u_{-1}, u_{-2}, u_{-3}, \ldots$

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0	0	1	6	6
1	1	7	12	6
2	8	19	18	6
3	27	37	24	6
4	64	61	30	⋮
5	125	91	⋮	⋮
6	216	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

3°. $u = 5x^4 - 7x^2 + 8x - 1$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 1$. Attribuant à x les quatre valeurs -2, -1, 0, $+1$, nous aurons d'abord:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
-2	35	-46	56	-60	
-1	-11	10	-4		
0	-1	6			
1	5				

Puis, comme $\Delta^4 = 5.1.2.3.4 = 120$, il nous suffira, pour continuer le tableau, de faire tous les termes de la sixième colonne égaux à 120, et d'appliquer ensuite cette règle : *Un terme quelconque est égal au terme écrit au-dessus, augmenté du terme écrit à la droite de celui-ci*. Nous obtiendrons ainsi les résultats suivants:

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
-2	35	-46	56	-60	120
-1	-11	10	-4	60	120
0	-1	6	56	180	120
1	5	62	236	300	120
2	67	298	536	420	120
3	365	834	956	540	⋮
4	1 199	1 790	1 496	⋮	⋮
5	2 989	3 286	⋮	⋮	⋮
6	6 275	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

352. *Remarque.* — La règle donnée ci-dessus permet de prolonger le tableau dans sa partie supérieure, c'est-à-dire de trouver les valeurs de u qui correspondent à $x = -3$, $x = -4$, $x = -5, \ldots$. En effet, d'après cette règle, *un terme quelconque du tableau est égal au terme écrit au-dessous, diminué du terme écrit à droite.* Si donc on part de la colonne horizontale répondant à $x = -2$, on pourra, en appliquant la nouvelle règle énoncée, former ce second tableau :

− 5	2 909	− 1 774	956	− 420	120
− 4	1 135	− 818	536	− 300	120
− 3	317	− 282	236	− 180	120
− 2	35	− 46	56	− 60	120
x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$

Réunissant les deux tableaux partiels, on aura celui-ci, que l'on pourrait prolonger, dans les deux sens, aussi loin qu'on le voudrait :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
....	....	....	....	....	....
− 5	2 909	− 1 774	956	− 420	120
− 4	1 135	− 818	536	− 300	120
− 3	317	− 282	236	− 180	120
− 2	35	− 46	56	− 60	120
− 1	− 11	10	− 4	60	120
0	− 1	6	56	180	120
1	5	62	236	300	120
2	67	298	536	420	120
3	365	834	956	540	⋮
4	1 199	1 790	1 496	⋮	⋮
5	2 989	3 289	⋮	⋮	⋮
6	6 275	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

EXERCICES.

I. Former les différences successives de $\log x$, en supposant $\Delta x = h$.

II. Développer en série $\Delta^2 \log x$.

III. Former $\Delta^2 \sin x$, et rendre la formule calculable par logarithmes.

IV. Les rapports

$$\frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta^2 \varphi(x)}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\Delta^3 \varphi(x)}{(\Delta x)^3}, \ldots,$$

ont pour limites respectives les dérivées

$$\varphi'(x), \qquad \varphi''(x), \qquad \varphi'''(x) \ldots.$$

CHAPITRE XXIII.

DE L'INTERPOLATION.

353. *Définition. — L'interpolation consiste à insérer, entre les termes d'une suite, de nouveaux termes assujettis à la même loi que les premiers.* Insérer des moyens entre deux termes d'une progression par différence ou d'une progression par quotient, c'est *interpoler* (*).

354. Quand on connaît un certain nombre de valeurs particulières d'une fonction u, ainsi que les valeurs correspondantes de la variable x, et qu'en même temps la loi qui lie u à x est donnée, le problème de l'interpolation ne présente aucune difficulté : il consiste uniquement à substituer dans u les nouvelles valeurs attribuées à x. Mais si la nature de la fonction u est inconnue, le problème devient indéterminé. On concoit en effet qu'*il existe une infinité de fonctions qui deviennent égales à des quantités numériques données, pour des valeurs données de la variable* (**). Ordi-

(*) Lacroix, *Calcul des différences.*

(**) Cette dernière proposition devient encore plus évidente, si l'on suppose que les valeurs correspondantes (x_0, u_0), (x_1, u_1), ..., (x_m, u_m) soient les *coordonnées* de $m+1$ points A_0, A_1, ..., A_m situés dans un même plan. Alors l'équation cherchée, $u = f(x)$, représente une quel-

nairement, on assujettit la fonction à être *algébrique*, *entière*, et d'un degré inférieur d'une unité au nombre des valeurs données. Autrement dit, on particularise ainsi le problème : *Trouver une fonction entière de x, du degré m, qui devienne*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_m$$

quand la variable x reçoit les valeurs correspondantes

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_m;$$

alors la fonction u est déterminée (*), et on en peut obtenir le développement par plusieurs méthodes, parmi lesquelles on distingue celles de Lagrange et de Newton.

355. *Formule de Lagrange.* — Si l'on suppose d'abord que les valeurs particulières de u se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la première, la fonction u devant alors s'évanouir pour $x=x_1$, pour $x = x_2, \ldots$, enfin pour $x = x_m$, sera de la forme

$$u = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m),$$

a étant une constante. De plus,

$$u_0 = a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_m);$$

donc
$$u = u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_m)}.$$

De même, si les valeurs données se réduisaient toutes à zéro, à l'exception de u_1, on aurait

$$u = u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_m)};$$

et ainsi de suite. Or, si l'on fait la somme de toutes ces *fonctions particulières*, on aura une fonction

$$\left.\begin{aligned} u = u_0 &\frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_m)} \\ + u_1 &\frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_m)} \\ + &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_m &\frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1)\ldots(x_m - x_{m-1})}, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

conque des courbes, *en nombre infini*, que l'on peut faire passer par ces points : la fonction u est donc indéterminée.

(*) Cette proposition sera démontrée un peu plus loin (358).

qui satisfera à toutes les conditions imposées : cette fonction est donc celle qu'il s'agissait d'obtenir (*).

356. *Formule de Newton.* — Nous avons trouvé ci-dessus (340)

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \quad u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \ldots,$$

$$u_m = u_0 + \frac{m}{1}\Delta u_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \frac{m}{1}\Delta^{m-1} u_0 + \Delta^m u_0.$$

Ces diverses expressions seront données par la formule générale

$$\left. \begin{array}{l} u_p = u_0 + \frac{p}{1}\Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots \\ \quad + \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m u_0, \end{array} \right\} \quad (1)$$

pourvu que l'indice p ne surpasse pas m.

En effet, si l'on suppose $p = 1$, tous les termes qui suivent $p\Delta u_0$ s'annulent, parce qu'ils renferment $p-1$ en facteur. De même, si l'on fait $p = 2$, tous les termes qui suivent le troisième s'annulent; etc.

Cela posé, si la différence de x est une constante h, les valeurs

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_m$$

seront comprises dans la formule

$$x = x_0 + ph. \quad (2)$$

Éliminant p entre les relations (1) et (2), et remplaçant u_p par u, on trouve

$$\left. \begin{array}{l} u = u_0 + \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\Delta u_0 + \frac{x-x_0}{h}\,\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots \\ \quad + \frac{\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)}{1.2\ldots(m-1)m}\Delta^m u_0. \end{array} \right\} \quad (B)$$

Cette formule, due à Newton, satisfait à toutes les conditions données; car la fonction u, entière et de degré m, devient u_0, u_1, $u_2, \ldots, u_m$ quand on suppose

$$x = x_0, \quad x = x_0 + h, \ldots, \quad x = x_0 + mh.$$

(*) Cette démonstration, remarquable par son élégance, est due à M. Cauchy.

357. Si l'on introduit ces dernières hypothèses dans la formule de Lagrange, on obtient

$$
(\mathrm{C})\quad \left\{
\begin{aligned}
u = &\pm \frac{u_0}{h^m}\frac{(x-x_0-h)(x-x_0-2h)\ldots(x-x_0-mh)}{1.2\ldots m}\\
&\mp \frac{u_1}{h^m}\frac{(x-x_0)(x-x_0-2h)\ldots(x-x_0-mh)}{1.1.2\ldots(m-1)}\\
&\pm \frac{u_2}{h^m}\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-3h)\ldots(x-x_0-mh)}{2.1.1\ldots2\ldots(m-2)}\\
&\mp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{u_m}{h^m}\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots(x-x_0-\overline{m-1}h)}{m.(m-1)\ldots1},
\end{aligned}
\right.
$$

en prenant les signes supérieurs si m est pair.

Au moyen de la proposition suivante, on s'assure que la nouvelle relation (C) est identique, au fond, avec la formule de Newton, bien qu'elle en diffère par la forme.

358. Théorème. — *Deux polynômes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, du degré m, qui deviennent égaux pour $m+1$ valeurs de x, sont identiques.*

Soient

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m,\\
\psi(x) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,
\end{aligned}
$$

les deux polynômes. S'ils n'étaient pas identiques, c'est-à-dire si l'on n'avait pas

$$A_0 = a_0,\quad A_1 = a_1,\ldots,\quad A_m = a_m,$$

l'équation

$$(A_0 - a_0)x^m + (A_1 - a_1)x^{m-1} + \ldots + (A_m - a_m) = 0,$$

dont le degré est inférieur à $m+1$, aurait $m+1$ racines; ce qui est absurde (253).

Applications de la formule de Newton.

359. D'après l'une des remarques du n° 348, si la constante h est inférieure à l'unité, les différences Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0, \ldots$, décroissent en général rapidement; de sorte que, dans la plupart des cas, on peut se contenter de conserver les trois ou les quatre premiers termes de la formule (A), en négligeant tous les autres.

Par exemple, si l'on veut calculer le logarithme de π par le moyen d'une Table à dix décimales, on regardera les logarithmes

contenus dans cette Table comme les valeurs de u, les nombres correspondants comme les valeurs de x, et l'on formera le tableau suivant :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
3,12	0,494 154 594 0	0,001 389 743 5	— 0,0...4 432 9	0,0...280
3,13	0,495 544 337 5	0,001 385 310 6	— 0,0...4 404 8	0,0...280
3,14	0,496 929 648 1	0,001 380 905 7	— 0,0...4 376 9	
3,15	0,498 310 553 8	0,001.376 528 8		
3,16	0,499 687 082 6			

La différence quatrième de u_0 étant nulle, on supposera

$$u = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0$$
$$+ \frac{\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)}{1.2.3}\Delta^3 u_0,$$

en prenant

$$u_0 = 0,494\,154\,594\,0, \quad \Delta u_0 = 0,001\,389\,743\,5,$$
$$\Delta^2 u_0 = -\,0,000\,004\,432\,9, \quad \Delta^3 u_0 = 0,000\,000\,028\,0,$$
$$x_0 = 3,12, \quad x = 3,141\,592\,653\,579, \quad h = 0,01.$$

On obtiendra ainsi

$$\frac{x-x_0}{h} = 2,159\,265\,357\,9, \qquad \frac{\frac{x-x_0}{h}-1}{2} = 0,579\,632\,679\,0,$$

$$\frac{\frac{x-x_0}{h}-2}{3} = 0,053\,088\,452\,6;$$

puis

$$\frac{\frac{x-x_0}{h}-2}{3}\Delta^3 u_0 + \Delta^2 u_0 = -\,0,000\,004\,431\,4,$$

$$\frac{\frac{x-x_0}{h}-1}{2}\left(\frac{\frac{x-x_0}{h}-2}{2}\Delta^3 u_0 + \Delta^2 u_0\right) + \Delta u_0 = 0,001\,387\,174\,9.$$

Cette dernière valeur, multipliée par $\frac{x - x_0}{h}$, donne

$$u - u_0 = 0,0029952787;$$

d'où enfin $$u = \log \pi = 0,4971498727,$$

valeur exacte jusqu'à la dixième décimale inclusivement.

EXERCICES.

I. Déterminer le moment du passage du soleil dans l'équateur, d'après les observations suivantes :

MARS 1855.	DÉCLINAISON DU SOLEIL à midi moyen.
18	1° 3′ 30″,4 A
19	0 39 46,9 A
20	0 16 3,8 A
21	0 7 38,5 B
22	0 31 19,9 B

Résultat : 21 mars, à $4^h 16^m$ du matin.

II. Vérifier, par un calcul direct, l'identité des formules (B) et (C).

CHAPITRE XXIV (*).

RECHERCHE DES RACINES INCOMMENSURABLES.

360. On a vu, précédemment, comment on peut déterminer les racines commensurables d'une équation à coefficients rationnels,

(*) La lecture de ce chapitre exige des notions sur la théorie des *coordonnées rectilignes* et sur celle des *tangentes*. (*Voyez* la *Géométrie analytique*.)

et comment la résolution d'une équation qui a des racines égales peut être ramenée à la résolution d'équations plus simples. Nous supposerons donc, dans ce qui va suivre, que l'équation donnée n'a aucune racine commensurable, ni aucune racine multiple : les racines de cette équation seront donc, ou incommensurables, ou imaginaires; mais nous ne nous occuperons pas de ces dernières.

La recherche des racines incommensurables d'une équation $f(x) = 0$ se décompose en deux parties : 1° la *séparation des racines;* 2° le *calcul des racines.*

Séparation des racines.

361. Les racines sont dites *séparées,* quand *chacune d'elles est comprise entre deux quantités connues, qui n'en comprennent aucune autre.*

Pour essayer d'effectuer cette séparation, on peut d'abord procéder comme il suit :

Ayant déterminé une limite inférieure et une limite supérieure des racines, on substituera, dans $f(x)$, les nombres entiers compris entre ces deux limites (*), et l'on comptera le nombre des variations de signes que présente la *suite* formée par les résultats de ces substitutions. *S'il arrive* que ce nombre soit égal à la limite supérieure du nombre des racines réelles, donnée par le *Théorème de Descartes,* les racines seront évidemment séparées.

Soit, par exemple, $x^4 + 10x^2 - 15x + 1 = 0$. Par la règle des signes, on reconnaît que cette équation n'a aucune racine négative, et qu'*elle peut avoir* deux racines positives. D'ailleurs, $+2$ est une limite supérieure des racines; et, si l'on désigne par y le premier membre, on trouve

$$\text{pour}\quad x = 0,\quad y = +1;$$
$$x = 1,\quad y = -3;$$
$$x = 2,\quad y = +27;$$

(*) Quand ces limites sont fort écartées, le nombre des substitutions *inutiles* peut devenir très-considérable. Pour abréger, on se contente, au moins dans un premier essai, de substituer les nombres .... -100, -10, -1, 0, $+1$, $+10$, $+100$, ..., après quoi l'on resserre les intervalles.

La suite des valeurs de y présentant *deux* variations, les racines sont séparées : l'une est comprise entre 0 et 1, l'autre entre 1 et 2.

362. *Application du calcul des différences.* — Quand les valeurs attribuées à x, dans $f(x)$, sont en progression par différence, on peut employer utilement le calcul des différences pour obtenir les résultats de ces substitutions (349). Soit, par exemple, l'équation

$$y = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 7x + 15 = 0.$$

La substitution directe donne

$$\text{pour} \quad \begin{aligned} x &= -1, & y &= 1; \\ x &= 0, & y &= 15; \\ x &= 1, & y &= 9; \\ x &= 2; & y &= -23. \end{aligned}$$

D'ailleurs, la différence quatrième de y est constante, et égale à 24. Nous pouvons donc former le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-1	1	14	-20	-6	24
0	15	-6	-26	18	24
1	9	-32	-8	42	24
2	-23	-40	34	66	
3	-63	-6	100		
4	-69	94			
5	25				

Les seules racines positives que l'équation puisse admettre, sont séparées : l'une est comprise entre 1 et 2, l'autre entre 4 et 5. Pour essayer de séparer les deux racines négatives, si elles existent, prolongeons, dans sa partie supérieure, le tableau précédent ; nous obtiendrons celui-ci :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-3	57	-60	64	-54	24
-2	-3	4	10	-30	24
-1	1	14	-20	-6	24

La séparation est effectuée : l'équation a une racine comprise entre -3 et -2, et une autre racine comprise entre -2 et -1.

363. Il est très-rare que le procédé dont nous venons de faire deux applications, permette d'effectuer la séparation des racines incommensurables d'une équation donnée, ou même de *déterminer le nombre* de ces racines. Dans la plupart des cas, le nombre des variations que présente la suite des valeurs de $f(x)$ est inférieur à la limite du nombre des racines, donnée par la règle des signes. Il est vrai que si l'on attribue à x des valeurs en progression, dont la différence constante soit d'abord $\frac{1}{10}$, puis $\frac{1}{100}$, puis $\frac{1}{1000}$, etc., la *probabilité* que les racines finiront par se séparer, augmente à chaque *série de substitution*. Mais, d'une part, les calculs auxquels on sera conduit ainsi pourront devenir excessivement prolixes; et, d'un autre côté, si l'équation a des racines imaginaires dont l'existence n'ait pas été indiquée par le théorème de Descartes, ces calculs, qu'il n'y aura aucune raison de ne pas continuer *indéfiniment*, auront été *effectués en pure perte* (*).

364. *Application au troisième degré.* — La méthode précédente, quoique peu satisfaisante en général, peut cependant être appliquée avec quelque avantage à l'équation du troisième degré, non-seulement pour opérer la séparation des racines, mais encore pour approcher indéfiniment de chacune d'elles. Avant de justifier ces propositions par un exemple, nous résoudrons la question suivante :

(*) Soit l'équation $x^4+3x^2-2x+1=0$. On peut prendre, pour limites de ses racines, 0 et $\frac{1}{3}$. Mais, ainsi qu'on le verra plus loin, cette équation n'a aucune racine réelle. Si donc on n'était pas prévenu de cette circonstance, et qu'on voulût essayer de séparer les racines en donnant à x les valeurs $0, \frac{1}{1\,000\,000}, \frac{2}{1\,000\,000}, \frac{3}{1\,000\,000}, \ldots, \frac{333\,334}{1\,000\,000}$, on trouverait que les 333 335 substitutions donnent des résultats positifs! Cet exemple suffit pour montrer quelle est la valeur scientifique du procédé auquel les auteurs du Programme ont donné le nom de *Méthode des différences*.

Connaissant les différences successives de la fonction

$$x^3 + px^2 + qx + r = f(x) = y,$$

qui correspondent à une certaine différence de x, trouver les différences de la même fonction, correspondant à une différence de x, dix fois plus petite que la première.

Nous aurons d'abord, par la formule de Taylor :

$$\Delta y = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x),$$

ou $$\Delta y = (3x^2 + 2px + q)h + (3x + p)h^2 + h^3;$$

puis, par un calcul facile,

$$\Delta^2 y = 2(3x + p)h^2 + 6h^3,$$
$$\Delta^3 y = 6h^3.$$

Dans ces diverses formules, remplaçons h par $\frac{h}{10}$, et représentons par la caractéristique δ les nouvelles différences ; nous obtiendrons

$$\delta y = (3x^2 + 2px + q)\frac{h}{10} + (3x + p)\frac{h^2}{100} + \frac{h^3}{1000},$$
$$\delta^2 y = 2(3x + p)\frac{h^2}{100} + 6\frac{h^3}{1000},$$
$$\delta^3 y = \frac{643}{1000}.$$

La dernière formule équivaut à

$$\delta^3 y = 0,001 . \Delta^3 y. \quad (1)$$

Pour exprimer $\delta^2 y$ en fonction de $\Delta^2 y$, éliminons $3x + p$; nous aurons

$$\delta^2 y = 0,01 . \Delta^2 y - 0,054 . h^3. \quad (2)$$

De même, en éliminant $3x^2 + 2px + q$, on obtient

$$\delta y = 0,1 . \Delta y - (0,1 - 0,01)(3x + p)h^2 - 0,99 . h^3.$$

Mais $$(3x + p)h^2 = \frac{1}{2}\Delta^2 y - 3h^3;$$

donc, en réduisant,

$$\delta y = 0,1 . \Delta y - \frac{1}{2}(0,1 - 0,01)\Delta^2 y + 0,171 . h^3. \quad (3)$$

365. Nous appliquerons les formules (1), (2), (3), à la séparation des racines positives de l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0\ (^*).$$

La substitution des nombres entiers donne d'abord

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	13	-6	0	6
0	7	-6	6	6
1	1	0	12	6
2	1			

L'inspection de ce tableau, ou mieux encore la construction de la courbe ayant y pour ordonnée, montre que l'on doit chercher les racines entre les nombres 1 et 2.

Nous supposerons donc, dans les formules ci-dessus,

$$h = 1,\quad \Delta^3 y = 6,\quad \Delta^2 y = 12,\quad \Delta y = 0;$$

d'où $\quad \delta^3 y = 0{,}006,\quad \delta^2 y = 0{,}066,\quad \delta y = -0{,}369.$

Ces dernières valeurs, jointes à $x = 1$ et $y = 1$, permettent de former le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1	$-0{,}369$	0,066	0,006
1,1	0,631	$-0{,}303$	0,072	0,006
1,2	0,328	$-0{,}231$	0,078	0,006
1,3	0,097	$-0{,}153$	0,084	0,006
1,4	$-0{,}056$	$-0{,}069$	0,090	0,006
1,5	$-0{,}125$	0,021	0,096	
1,6	$-0{,}104$	0,117		
1,7	0,013			

(*) La condition $4p^3 + 27q^2 < 0$ (321, 1°) se réduisant à $-28 + 27 < 0$, l'équation a ses trois racines réelles. Pour séparer les deux racines positives, il suffirait (322, II) de remplacer x par 0, $\sqrt{\frac{7}{3}}$ et $\sqrt{7}$.

On voit que l'une des racines est comprise entre 1,3 et 1,4, et l'autre, entre 1,6 et 1,7. La séparation étant effectuée, on peut, en appliquant de nouveau les formules du numéro précédent, évaluer chacune des racines à moins de 0,01; et ainsi de suite. Voici le tableau des calculs relatifs à la racine comprise entre 1,3 et 1,4:

$$h = 0{,}1,\quad \Delta^3 y = 0{,}006,\quad \Delta^2 y = 0{,}084,\quad \Delta y = -0{,}153;$$

$$\delta^3 y = 0{,}000\,006,\quad \delta^2 y = 0{,}000\,786,\quad \delta y = -0{,}018\,909.$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,3	0,097	− 0,018 909	0,000 786	0,000 006
1,31	0,078 901	− 0,018 123	0,000 792	0,000 006
1,32	0,059 968	− 0,017 331	0,000 798	0,000 006
1,33	0,042 637	− 0,016 533	0,000 804	0,000 006
1,34	0,026 104	− 0,015 729	0,000 810	
1,35	0,010 375	− 0,014 919		
1,36	− 0,004 544			

La racine, comprise entre 1,35 et 1,36, est beaucoup plus près de ce dernier nombre que du premier.

Calcul des racines.

366. *Méthode de Newton.* — Supposons que, par un procédé quelconque, on ait trouvé une valeur *approchée* α d'une racine réelle de l'équation $f(x) = 0$. Désignons par a cette racine, et par h la correction, positive ou négative, que l'on doit faire subir à α pour obtenir a. Nous aurons

$$a = \alpha + h,\quad f(\alpha + h) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(\alpha) = 0,$$

m étant le degré de l'équation.

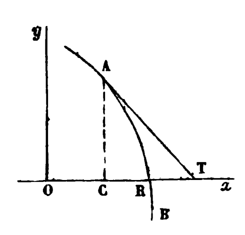
Cela posé, *si la quantité h est suffisamment petite*, les termes en h^2, h^3, ..., h^m seront ordinairement très-petits par rapport aux deux premiers termes : la *méthode de Newton* consiste à négliger complétement ces puissances supérieures de h, et à remplacer

l'équation précédente par celle-ci :

$$f(\alpha)+hf'(\alpha)=0;$$

d'où l'on conclut $$h=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}. \quad (1)$$

Telle est la formule de Newton.



367. *Interprétation géométrique.* — Soit AB un arc de la courbe représentée par $y=f(x)$, et soit R le point inconnu où elle coupe l'axe des x : la distance OR représente la racine inconnue a.

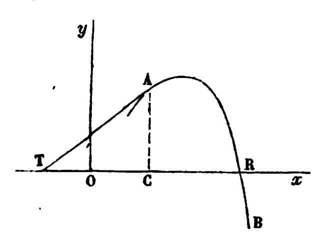
Au point A, qui a pour abscisse la valeur approchée $\alpha=$ OC, menons la tangente AT. Nous aurons, dans le triangle rectangle ACT,

$$\text{CT}=\frac{\text{AC}}{\text{tang ATC}}.$$

Mais $\quad \text{AC}=f(\alpha), \quad \text{tang ATC}=-\text{tang AT}x=-f'(\alpha);$

donc $$\text{CT}=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Cette valeur étant égale à celle de h, donnée par la formule (1), il s'ensuit que *la méthode de Newton consiste à remplacer la courbe par sa tangente, au point dont l'abscisse est* α.



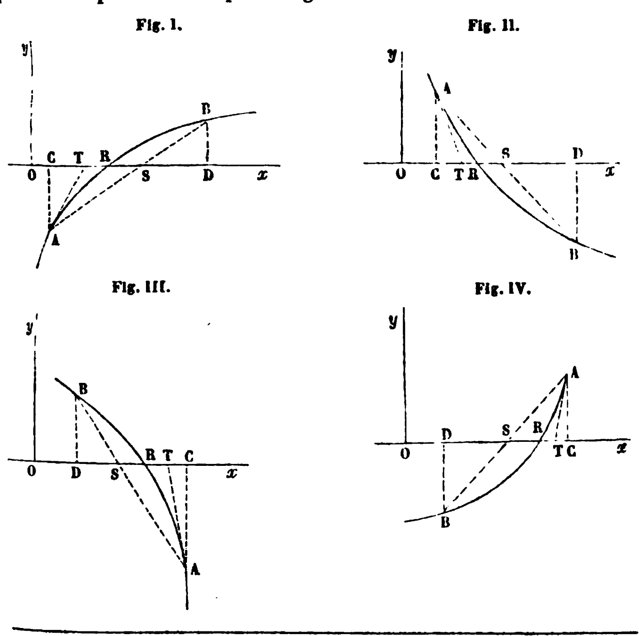
Cette remarque fait voir que, dans certains cas, la méthode de Newton pourra être complétement fautive. Par exemple, si l'arc AB a la forme indiquée ci-contre, et qu'on mène la tangente au point A, *on s'éloignera de la racine, au lieu de s'en rapprocher.*

368. *Rectification de la méthode de Newton.* — Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la séparation des racines a été opérée, en sorte que la racine inconnue a, dont on veut approcher, est comprise entre deux quantités données α, β, qui ne com-

prennent aucune autre racine de l'équation $f(x) = 0$. Nous admettrons, en outre, que ces deux limites ne comprennent aucune racine, soit de $f'(x) = 0$ (*), soit de $f''(x) = 0$. Ces diverses hypothèses peuvent être énoncées ainsi :

L'arc AB, *dont les extrémités ont pour abcisses* α *et* β, *coupe une seule fois l'axe des* x; *de plus, il ne contient ni point maximum* (**) *ou minimum, ni point d'inflexion.*

En effet, 1° appliquons la correction de Newton à celui des deux points donnés pour lequel *la tangente tombe dans l'intérieur du triangle formé par la courbe, l'axe des abscisses et l'ordonnée du point :* l'inspection des quatre figures ci-contre montre clairement



(*) Cette première condition n'est pas absolument indispensable au succès de la méthode; mais, quand elle est vérifiée, les approximations marchent plus rapidement.

(**) *Point maximum,* c'est-à-dire *point dont l'ordonnée est un maximum.* Cette *ellipse* a été employée par plusieurs bons auteurs.

que *ce point* A *est celui dont l'abscisse* x *rend* $f(x)$ et $f''(x)$ *de même signe* (*). Nous aurons $OT = OC + CT$,

ou $$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}. \quad (2)$$

2°. Menons la corde AB, qui laisse d'un même côté l'arc ARB, puisque celui-ci est convexe. Le point S, où AB coupe l'axe des abscisses, partage CD en deux segments proportionnels à AC, BD;

donc $$SD = CD\frac{BD}{BD + AC} = (\beta - \alpha)\frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

Par suite, en désignant OS par β_1,

$$\beta_1 = \beta - (\beta - \alpha)\frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)}. \quad (3)$$

Les formules (2) et (3) résolvent complétement la question proposée : effectivement, le *point-racine* R est compris entre les points T, S, et ceux-ci sont compris entre C et D.

369. *Limite de l'erreur commise.* — La racine inconnue *a* étant comprise entre α_1 et β_1, la différence $\beta_1 - \alpha_1$ sera une *limite de l'erreur à laquelle donne lieu la méthode de Newton*. Or,

$$\beta_1 - \alpha_1 = (\beta - \alpha)\left[1 - \frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)}\right] + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

ou $$\beta_1 - \alpha_1 = -(\beta - \alpha)\left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}\right] + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Pour simplifier cette expression, observons que

$$f(\beta) - f(\alpha) =$$
$$(\beta - \alpha)f'(\alpha) + (\beta - \alpha)^2\frac{f''(\alpha)}{1.2} + (\beta - \alpha)^3\frac{f'''(\alpha)}{1.2.3} + \ldots;$$

donc, en posant

$$\beta - \alpha = \varepsilon, \quad \beta_1 - \alpha_1 = \varepsilon_1, \quad \varphi(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{1.2} + \frac{\varepsilon f'''(\alpha)}{1.2.3} + \ldots,$$

(*) Considérons, par exemple, la *fig.* I. L'arc AB tournant sa convexité vers le haut, $f''(x)$ est constamment *négative*, et la courbe est *au-dessous* de sa tangente. Donc la tangente au point B, dont l'ordonnée est *positive*, tomberait en dehors du triangle RBD. Au contraire, la tangente au point A, pour lequel l'ordonnée est *négative*, est située dans le triangle CAR ; etc.

nous aurons $$\varepsilon_1 = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)+\varepsilon\varphi(\alpha)},$$

ou $$\varepsilon_1 = \varepsilon\frac{f(\alpha)\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)[f'(\alpha)+\varepsilon\varphi(\alpha)]};$$

ou enfin, à cause de $h = -\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$:

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon h\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)+\varepsilon\varphi(\alpha)}. \quad (4)$$

370. La formule (4) nous permet de résumer, dans les termes suivants, la marche à suivre pour approcher indéfiniment d'une racine a de l'équation $f(x) = 0$, après que cette racine a été séparée :

Connaissant deux quantités α, β, entre lesquelles tombe la racine a, et qui ne comprennent aucune racine, soit de $f'(x) = 0$, soit de $f''(x) = 0$, on désignera par α celle de ces deux limites qui rendent $f(x)$ et $f''(x)$ de même signe; et, pour avoir une valeur plus approchée α_1, on emploiera les formules

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad (A) \qquad \alpha_1 = \alpha + h. \quad (B)$$

En désignant par ε la différence positive ou négative $\beta - \alpha$, c'est-à-dire l'approximation (*) de α, et par ε_1 l'approximation de α_1, on aura

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon h\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)+\varepsilon\varphi(\alpha)}. \quad (C)$$

Cette formule, dans laquelle $\varphi(\alpha)$ représente

$$\frac{f''(\alpha)}{1.2} + \varepsilon\frac{f'''(\alpha)}{1.2.3} + \varepsilon^2\frac{f^{\text{iv}}(\alpha)}{1.2.3.4} + \ldots,$$

indique aussi à quel degré d'approximation on doit calculer h.

Opérant sur α_1 comme on a opéré sur α, on trouvera une valeur α_2 encore plus approchée de la racine a; et ainsi de suite.

371. *Application.* — Nous allons faire usage de la méthode précédente pour calculer la plus grande racine de l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

(*) *Approximation de α* signifie ici : *limite de l'erreur commise en prenant α au lieu de a.*

On a vu ci-dessus (365) que cette racine est comprise entre 1,35 et 1,36. D'ailleurs, quand x varie entre ces limites, $f'(x) = 3x^2 - 7$ reste constamment négative, et $f''(x) = 6x$ reste constamment positive : la méthode de Newton est donc applicable. En outre, la première limite 1,35, rendant $f(x)$ et $f''(x)$ de même signe, nous prendrons $\alpha = 1,35$, d'où $\varepsilon = 0,01$. Cela posé, le tableau de la page 215 donne $f(\alpha) = 0,010\,375$; et l'on trouve, par la substitution directe,

$$f'(\alpha) = -1,5325, \quad \varphi(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{1.2} + \varepsilon\frac{f'''(\alpha)}{1.2.3} = 4,06.$$

Substituant dans les formules (A) et (C), nous aurons donc

$$h = \frac{0,010\,375}{1,5325} = \frac{1,0375}{153,25}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1,0375}{15325}\cdot\frac{4,06}{-1,5325 + 0,0406}$$
$$= \frac{1,0375}{15325}\cdot\frac{4,06}{1,4919}.$$

Le premier facteur de ε_1 est à peu près égal à $\frac{1}{15\,000}$; l'autre est moindre que 3; donc $\varepsilon_1 < 0,0002$. Ce résultat montre qu'il suffit, dans ce premier calcul, de déterminer les *trois* premières décimales de la valeur de h : si l'on en calculait *quatre*, on ne serait pas sûr de la dernière. Effectuant, on trouve

$$h = \frac{1,0375}{153,25} = 0,006;$$

puis

$$\alpha_1 = 1,356, \quad \varepsilon_1 = 0,001.$$

Ces valeurs donnent

$$\alpha_1^3 = 1,838\,736, \quad \alpha_1^2 = 2,493\,326\,016,$$
$$f(\alpha_1) = 0,001\,326\,016, \quad f'(\alpha_1) = -1,483\,792, \quad \varphi(\alpha_1) = 4,069\ (*).$$

Par suite

$$h_2 = \frac{1,326\,016}{1\,483,792},$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1,326\,016}{1,483\,792}\cdot\frac{4,069}{1,483\,792 - 0,004\,069} < 0,000\,003.$$

(*) Il est à peine besoin de faire observer que ces dernières quantités, au lieu d'être calculées directement, pourraient se déduire des valeurs de $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, etc.

D'après cette nouvelle valeur, on doit évaluer h_2 à moins de 0,000 01 : $h_2 = 0{,}000\,89$; puis

$$\alpha_2 = 1{,}356\,89, \quad \varepsilon_2 = 0{,}000\,01.$$

On trouve, de la même manière,

$$f(\alpha_2) = 0{,}000\,008\,664\,087\,769, \quad f'(\alpha_2) = -1{,}476\,548\,583\,7,$$

$$\varphi(\alpha_2) = 4{,}07068;$$

$$h_3 = \frac{8{,}664\,087\,769}{1\,476\,548{,}583\,7};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{8{,}664\,087\,769}{147\,654\,858\,370} \cdot \frac{4{,}070\,68}{1{,}476\,507\,876\,9} < 0{,}000\,000\,001,$$

$$h_3 = 0{,}000\,005\,867, \quad \alpha_3 = 1{,}356\,895\,867, \quad \varepsilon_3 = 0{,}000\,000\,001;$$

$$f(\alpha_3) = 0{,}000\,000\,001\,317\,347\,970\,813\,679\,363,$$

$$f'(\alpha_3) = -1{,}476\,500\,818\,354\,954\,933, \quad \varphi(\alpha_3) = 4{,}070\,687\,602;$$

$$h_4 = \frac{1{,}317\,347\,970\,813\,679\,363}{1\,476\,500\,818{,}354\,954\,933}, \quad \varepsilon_4 < 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,01;$$

$$h_4 = 0{,}000\,000\,000\,892\,209\,44;$$

$$\alpha_4 = 1{,}356\,895\,867\,892\,209\,44.$$

Cette valeur de la racine est exacte jusqu'à la dix-septième décimale.

Séparation des racines, par la méthode de Newton.

372. La méthode de Newton, ou plutôt la construction de la courbe dont l'ordonnée est $f(x)$, permet presque toujours d'effectuer très-simplement la séparation des racines réelles de $f(x) = 0$, ou de reconnaître que cette équation a des racines imaginaires, non indiquées par le théorème de Descartes.

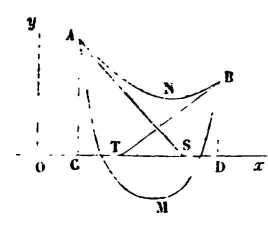
Remarquons d'abord que la véritable difficulté du problème se réduit, le plus souvent, à *reconnaître si deux quantités* α, β, *qui, substituées à* x *dans* $f(x)$, *ont donné des résultats de même signe, comprennent entre elles deux racines de* $f(x) = 0$, *ou si elles n'en comprennent aucune.*

Cela posé, si la première dérivée, $f'(x)$, ne changeait pas de signe entre $x = \alpha$ et $x = \beta$, $f(x)$ serait constamment croissante

ou constamment décroissante dans le même intervalle; et, puisque $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont de même signe, cette fonction ne pourrait pas s'annuler. Autrement dit, *si l'équation $f'(x) = 0$ n'avait aucune racine entre α et β, il en serait de même pour l'équation proposée*, $f(x) = 0$.

Le cas où l'équation dérivée, $f'(x) = 0$, n'aurait aucune racine entre α et β étant mis de côté, nous admettrons que *cette équation a une seule racine comprise entre ces deux quantités:* si elle en avait plus d'une, on remplacerait α et β par d'autres limites, plus resserrées.

Enfin, nous admettrons encore que la seconde dérivée, $f''(x)$, conserve le même signe entre $x = \alpha$ et $x = \beta$: ceci revient à supposer que la courbe représentée par $y = f(x)$ est convexe entre les points ayant α, β pour abscisses.



373. Soient A, B ces deux points (*); soit AMB ou ANB l'arc qui les joint, et dont la forme est encore inconnue: il s'agit de savoir si cet arc coupe en deux points l'axe des abscisses, ou s'il ne le coupe pas.

Appliquons, aux deux limites α, β, la formule de Newton, c'est-à-dire calculons les deux sous-tangentes CS, DT. En supposant, comme cela aurait lieu sur la figure,

$$\alpha < \beta, \quad f'(\alpha) < 0, \quad f'(\beta) > 0;$$

nous aurons, pour les valeurs absolues de ces sous-tangentes,

$$\text{CS} = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad \text{DT} = \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}.$$

Or, si les tangentes AS, BT se croisent *au-dessus* de Ox (**), c'est-à-dire si la somme des sous-tangentes est plus grande que CD, l'arc inconnu a la forme ANB; il ne coupe pas l'axe des ab-

(*) Sur la figure, on les a placés, pour fixer les idées, au-dessus de l'axe des abscisses; mais le raisonnement est indépendant de cette hypothèse.

(**) On devrait lire *au-dessous*, si $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ étaient négatives.

scisses, et l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune racine entre α et β. Nous pouvons donc énoncer cette proposition :

Les quantités α, β *satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus, si l'on a*

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} > \beta - \alpha, \quad (1)$$

l'équation $f(x) = 0$ *n'aura aucune racine entre* α *et* β.

Si la somme des sous-tangentes est moindre que CD, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} < \beta - \alpha, \quad (2)$$

on ne pourra rien affirmer sur l'existence ou la non-existence de deux racines entre α et β; mais, en prenant

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad \beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)},$$

opérant sur ces nouvelles limites comme sur les premières, et continuant de la même manière, on pourra *presque toujours*, après un très-petit nombre d'essais, décider si les deux limites données ne comprennent aucune racine, ou si elles en comprennent deux : ajoutons que, dans ce dernier cas, on aura approché des deux racines à la fois, et que la substitution d'une quantité comprise entre les deux limites α_n, β_n auxquelles on se sera arrêté, permettra, *presque toujours* aussi, de séparer ces deux racines.

Les applications suivantes montreront la simplicité et l'efficacité de cette méthode.

374. *Applications.* — I. $x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ (363).

$$f'(x) = 4x^3 + 6x - 2, \quad \frac{1}{6}f''(x) = 2x^2 + 1.$$

La première dérivée s'annule pour une valeur de x comprise entre 0 et $\frac{1}{3}$; la seconde dérivée est essentiellement positive : nous pouvons donc prendre $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{3}$. Or,

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\frac{55}{81}}{\frac{4}{27}} + \frac{1}{2}.$$

Cette somme étant plus grande que $\frac{1}{3}$, *l'équation n'a pas de racines réelles.*

II. $$x^4 + x^2 - 5{,}999\,x + 4 = 0.$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 5{,}999, \quad \frac{1}{2} f''(x) = 6x^2 + 1.$$

L'équation a *peut-être* deux racines comprises entre 0 et 1. Ces deux nombres satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus, nous prendrons $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{0{,}001}{0{,}001} + \frac{4}{5{,}999}.$$

Le second membre est plus grand que 1; donc *l'équation n'a pas de racines réelles.*

III. $$100\,x^4 + 67\,x^2 - 59\,x + 11 = 0.$$

Quelques essais préliminaires montrent que l'on doit chercher deux racines entre $0{,}3$ et $0{,}4$. D'ailleurs,

$$f'(x) = 400\,x^3 + 134\,x - 59$$

s'annule une fois seulement dans cet intervalle, et $f''(x)$ est essentiellement positive.

Prenons donc $$\alpha = 0{,}3, \quad \beta = 0{,}4.$$

$$f(\alpha) = 0{,}81 + 6{,}03 - 17{,}7 + 11 = 0{,}14,$$
$$f'(\alpha) = 10{,}8 + 40{,}2 - 59 = -8,$$
$$f(\beta) = 2{,}56 + 10{,}72 - 23{,}8 + 11 = 0{,}68,$$
$$f'(\beta) = 25{,}6 + 53{,}6 - 59 = 20{,}2.$$
$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{0{,}68}{20{,}2} + \frac{0{,}14}{8} < 0{,}1.$$

Les limites étant trop écartées, nous prendrons

$$\alpha_1 = 0{,}3 + \frac{0{,}14}{8} = 0{,}317\ldots,$$

$$\beta_1 = 0{,}4 - \frac{0{,}68}{20{,}2} = 0{,}364\ldots,$$

ou plutôt $\alpha_1 = 0,32, \quad \beta_1 = 0,36.$

$$f(\alpha_1) = 1,048\,576 + 6,8622 - 18,88 + 11 = 0,030\,776,$$
$$f'(\alpha_1) = 13,1072 + 42,88 - 59 = -3,0128,$$
$$f(\beta_1) = 1,679\,619 + 8,6832 - 21,24 + 11 = 0,122\,819,$$
$$f'(\beta_1) = 18,6624 + 48,24 - 59 = 6,9024.$$
$$\frac{f(\beta_1)}{f'(\beta_1)} - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = \frac{0,122\,819}{6,9024} + \frac{0,030\,776}{3,0128} < 0,04.$$

Les limites sont donc encore trop écartées. Mais, $f(\alpha_1)$ étant une petite fraction, il y a lieu d'essayer si l'on ne peut pas remplacer β_1 par un nombre beaucoup plus voisin de α_1; si l'on substitue 0,33, on trouve

$$f(0,33) = 1,185\,921 + 7,2963 - 19,47 + 11 = 0,012\,221,$$
$$f'(0,33) = 14,3748 + 44,22 - 59 = -0,4052.$$

Les racines, si elles existent, ne sont pas comprises entre 0,32 et 0,33 : essayons 0,34.

$$f(0,34) = 1,336\,336 + 7,7452 - 20,06 + 11 = 0,021\,536,$$
$$f'(0,34) = 15,7216 + 45,56 - 59 = 2,2816.$$

Soient actuellement $\alpha_2 = 0,33, \ \beta_2 = 0,34.$

$$\frac{f(\beta_2)}{f'(\beta_2)} - \frac{f(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)} = \frac{0,021\,536}{2,2816} + \frac{0,12221}{0,4052} > 0,01.$$

L'équation a donc toutes ses racines imaginaires.

IV. $100x^4 + 67x^2 - 59,04x + 11 = 0.$

On trouve, comme dans l'exemple précédent,

$$\alpha = 0,3, \quad \beta = 0,4.$$
$$f(\alpha) = 0,128, \quad f'(\alpha) = -8,04,$$
$$f(\beta) = 0,664, \quad f'(\beta) = 20,16.$$
$$\alpha_1 = 0,32, \quad \beta_1 = 0,36.$$
$$f(\alpha_1) = 0,017\,920, \quad f'(\alpha_1) = -3,0528,$$
$$f(\beta_1) = 0,108\,419, \quad f'(\beta_1) = 6,8624.$$
$$\alpha_2 = 0,33, \quad \beta_2 = 0,34.$$
$$f(\alpha_2) = -0,000\,979, \quad f(\beta_2) = 0,007\,936.$$

La séparation est effectuée : *l'équation a une racine comprise entre* 0,32 et 0,33, *et une seconde racine entre* 0,33 *et* 0,34.

EXERCICES.

I. Calculer les racines de l'équation

$$70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1 = 0.$$

Résultat :

$$x_1 = 0{,}069\,431\,844\,202\,975\,4,$$
$$x_2 = 0{,}330\,009\,478\,207\,567\,7,$$
$$x_3 = 0{,}669\,990\,521\,792\,432\,3,$$
$$x_4 = 0{,}930\,568\,155\,797\,024\,6.$$

II. $1\,716x^6 - 5\,148x^5 + 5\,742x^4 - 2\,904x^3 + 648x^2 - 54x + 1 = 0.$

Résultat :

$$x_1 = 0{,}025\,446\,043\,828\,620\,2,$$
$$x_2 = 0{,}129\,234\,407\,200\,302\,8,$$
$$x_3 = 0{,}297\,077\,424\,311\,301\,5,$$
$$x_4 = 0{,}702\,922\,575\,688\,698\,5,$$
$$x_5 = 0{,}870\,765\,592\,799\,697\,2,$$
$$x_6 = 0{,}974\,553\,956\,171\,379\,8 \; (^*).$$

III. Simplifier la résolution des deux équations précédentes, sachant qu'elles jouissent de cette propriété, que si α est racine, $1 - \alpha$ est racine.

IV. Calculer les racines de l'équation

$$3\,375\,000x^3 - 12\,524\,692\,500x^2 + 15\,493\,128\,120\,000x$$
$$- 6\,388\,367\,590\,282\,499 = 0.$$

Résultat :

$$x_1 = 1\,236{,}996\,452\,73,$$
$$x_2 = 1\,237{,}004\,351\,36,$$
$$x_3 = 1\,237{,}019\,195\,91 \; (^{**}).$$

(*) Ces deux exemples, tirés d'un Mémoire de l'illustre Gauss, ont été reproduits dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

(**) On cherche d'abord la transformée

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{8} = 0,$$

qui a pour racines

$$y_1 = -\sin 50^\circ = -0{,}766\,045,$$
$$y_2 = -\sin 10^\circ = -0{,}173\,648,$$
$$y_3 = \sin 70^\circ = 0{,}939\,693.$$

V. Les équations

$$5797x^4 + 4951x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0,$$
$$3447x^6 + 14560x^5 + 22430x^4 + 25857x^3 + 29193x^2 + 11596x + 5602 = 0$$

ont toutes leurs racines imaginaires (*).

CHAPITRE XXV.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

375. Les procédés employés pour calculer les racines incommensurables d'une équation $f(x) = 0$, que nous avons fait connaître dans le chapitre précédent, s'appuient tous sur la continuité de la fonction entière $f(x)$. Par conséquent, ces procédés sont applicables, à peu près sans modifications, à la résolution de toute équation de la forme $f(x) = 0$, dont le premier membre, sans être algébrique, est une fonction continue de x, sinon pour toutes les valeurs de cette variable, au moins dans un certain intervalle. Cependant, la discussion des fonctions transcendantes étant ordinairement assez épineuse, les méthodes indiquées ci-dessus seront presque toujours insuffisantes, prises séparément, en sorte que l'on sera obligé de faire des emprunts à chacune d'elles. Les exemples suivants montreront suffisamment la marche à suivre dans chaque cas particulier.

376. Exemple I. — *Résoudre l'équation* (**)

$$e^{2x} = \frac{x+1}{x-1}. \quad (1)$$

(*) Ces deux équations sont tirées d'un Mémoire *sur la planète Herschel*, par M. Le Verrier. Pour les discuter, le célèbre astronome s'est bien gardé d'appliquer la *méthode des différences*.

(**) Cette équation se rencontre dans la théorie de la *chaînette* et dans la Mécanique céleste (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLII, page 1184).

On simplifiera le problème si, après avoir pris les logarithmes népériens des deux membres, on met l'équation sous la forme

$$2x - l\frac{x+1}{x-1} = 0. \quad (2)$$

En effet, en représentant par y le premier membre de la nouvelle équation, on reconnaît immédiatement que :

1°. La fonction y reste continue et *croissante* à partir de

$$x = 1 + \varepsilon\ (*);$$

2°. Cette fonction, *négative* pour $x = 1 + \varepsilon$, est *positive* pour $x = 2$.

Par conséquent, l'équation (2) a *une seule racine positive*, comprise entre 1 et 2.

377. Pour approcher de cette racine, donnons à x les valeurs 1,1 et 1,2; nous trouverons :

Pour $x = 1,1$, $y = 2,2 - l21 = -0,844522437\ldots$;

Pour $x = 1,2$, $y = 2,4 - l11 = +0,002104727\ldots$.

La racine est donc comprise entre les deux nombres substitués, et beaucoup plus près du second que du premier.

D'ailleurs,

$$y' = 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{2}{x^2-1}, \quad y'' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2},$$

et chacune de ces fonctions conservant son signe à partir de $x = 1 + \varepsilon$, la méthode de Newton est applicable (370).

Faisant $\alpha = 1,2$ dans la formule

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\ (**),$$

nous aurons $h = -0,00032\ldots$.

Ce résultat permet de supposer que la racine est comprise entre

(*) Suivant l'usage, la lettre ε désigne une quantité positive très-petite.

(**) La limite 1,2 étant déjà fort approchée, nous ne suivrons pas la règle qui consiste à choisir la limite pour laquelle $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

1,19967 et 1,19968. Effectivement,

$$x = 1,19967$$

donne

$$y = 2,39934 - \log \frac{219967}{19967} \times l.10\ (*) = -0,000106788;$$

$$x = 1,19968$$

donne

$$y = 2,39936 - \log \frac{219968}{19968} \times l.10 = +0,000008999.$$

Une nouvelle application de la formule de Newton montre que la racine est comprise entre 1,199678 et 1,199679. La substitution de ces valeurs donne ensuite :

pour $x = 1,199678$,

$$y = 2,399356 - \log \frac{2199678}{199678} l.10 = -0,0000044\ldots,$$

pour $x = 1,199679$,

$$y = 2,399358 - \log \frac{2199679}{199679} l.10 = +0,0000022\ldots.$$

378. Si nous appliquons actuellement les formules (2) et (3) du n° 368, en y supposant

$$\alpha = 1,199678, \quad \beta = 1,199679,$$

nous aurons

$$f(\alpha) = -0,0000044, \quad f(\beta) = 0,0000022,$$

$$\log f'(\alpha) = \log \frac{2\alpha^2}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = 0,8164702;$$

puis

$$\alpha_1 = 1,199678 + 0,0000006714 = 1,1996786714,$$

$$\beta_1 = 1,199679 - 0,000001 \cdot \frac{22}{66} = 1,1996786666;$$

et enfin, avec *huit* décimales exactes,

$$x = 1,19967867.$$

(*) Les Tables de Callet ne donnant pas les logarithmes népériens des nombres supérieurs à 1200, il est nécessaire, pour continuer le calcul, d'employer les logarithmes de Briggs comme intermédiaires.

379. Exemple II. — *Déterminer le coefficient a, de manière que l'équation*

$$e^x + e^{-x} - ax = 0 \quad (1)$$

ait deux racines égales.

En général, on dit qu'*une équation transcendante $f(x) = 0$ a deux racines égales à α, quand la quantité α annule, en même temps, $f(x)$ et $f'(x)$* (*).

Cela posé, la dérivée du premier membre de l'équation (1) est

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - a.$$

Égalant cette quantité à zéro, nous aurons à déterminer a par la condition que l'équation

$$e^x - e^{-x} - a = 0 \quad (2)$$

ait une racine commune avec la proposée (1).

L'élimination de a donne

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x,$$

ou

$$e^{2x} = \frac{x+1}{x-1}. \quad (3)$$

Cette équation est précisément celle que nous avons considérée dans l'exemple I : elle a pour racine

$$x = 1,19967867.$$

Il resterait donc à substituer cette valeur dans la formule

$$a = e^x - e^{-x};$$

mais il sera plus commode de prendre celle-ci :

$$a = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (4)$$

que l'on tire aisément des équations (1) et (2). Elle donne, au moyen des Tables logarithmiques,

$$a = 3,01776.$$

(*) Il est évident que la définition des racines égales, fondée sur la considération du plus grand commun diviseur, n'est pas applicable, en général, aux équations transcendantes.

380. *Remarque.* — L'équation (1) aura *deux racines positives inégales* tant que le coefficient a sera supérieur à cette dernière valeur; elle n'en aura aucune dans le cas contraire. Par exemple, l'équation

$$e^x + e^{-x} - 3x = 0$$

n'a pas de racines réelles.

381. Exemple III. — *Résoudre l'équation*

$$u - e \sin u = \zeta, \quad (1)$$

en supposant

$$e = 0,24531615, \quad \zeta = 329^\circ 44' 27'',66.$$

La résolution de l'équation (1) constitue ce qu'on appelle, en Astronomie, le *Problème de Kepler : e* est l'*excentricité* d'une planète; u, l'*anomalie excentrique ;* ζ, le *moyen mouvement.*

Avant de chercher la valeur de u, remarquons que, e étant un nombre, on devrait, pour rendre l'équation *homogène,* exprimer l'arc ζ en parties du rayon 1; et alors l'arc u serait également exprimé en parties du rayon. Mais il sera plus commode d'évaluer, *en parties de la circonférence,* l'arc z dont le rapport au rayon est la fraction e. Or, l'arc équivalent au rayon a pour valeur

$$\frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ,295779130823\ldots;$$

donc

$$z = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot e = 14^\circ,055579947\ldots.$$

382. Pour calculer la valeur de u, nous emploierons d'abord la méthode des approximations successives, dont on a vu un exemple dans le second degré (31).

Négligeant d'abord le terme $e \sin u$, ou plutôt $z \sin u$, nous aurons

$$u_0 = \zeta. \quad (2)$$

Cette valeur, substituée dans (1), conduit à

$$u_1 = z \sin u_0 + \zeta. \quad (3)$$

Celle-ci donne, de la même manière,

$$u_2 = z \sin u_1 + \zeta, \quad (4)$$

puis

$$u_3 = z \sin u_2 + \zeta, \quad (5)$$

etc.

Le calcul logarithmique donne ensuite

$$\log z = 1{,}147\,848\,8$$

$$\log(-\sin u_1) = \log\sin 30^\circ\,15'\,32'',34 = \bar{1}{,}702\,3525$$

$$0{,}850\,201\,3$$

$$z\sin u_1 = -7^\circ{,}08\,274 = -7^\circ\,4'\,5'',864$$

$$u_1 = 322^\circ\,40'\,21'',80$$

$$\log z = 1{,}147\,848\,8$$

$$\log(-\sin u_1) = \log\sin 37^\circ\,19'\,38'',2 = \bar{1}{,}782\,7356$$

$$0{,}930\,584\,4$$

$$z\sin u_1 = -8^\circ{,}522\,83 = -8^\circ\,31'\,22'',188$$

$$u_2 = 321^\circ\,13'\,5'',47$$

$$\log z = 1{,}147\,848\,8$$

$$\log(-\sin u_2) = \log\sin 38^\circ\,46'\,54'',53 = \bar{1}{,}796\,821\,5$$

$$0{,}944\,670\,3$$

$$z\sin u_2 = -8^\circ{,}803\,80 = -8^\circ\,48'\,13'',68$$

$$u_3 = 320^\circ\,56'\,13'',98$$

$$\log z = 1{,}147\,848\,8$$

$$\log(-\sin u_3) = \log\sin 39^\circ\,3'\,46'',02 = \bar{1}{,}799\,458\,8$$

$$0{,}947\,307\,6$$

$$z\sin u_3 = -8^\circ\,85743 = -8^\circ\,51'\,18'',75$$

$$u_4 = 320^\circ\,53'\,8'',91.$$

383. Pour continuer le calcul, nous ferons usage de la méthode de Newton, en prenant

$$\alpha = 320^\circ\,53'.$$

Nous aurons

$$f(\alpha) = \alpha - z\sin\alpha - \zeta =$$

$$320^\circ\,53' + 8^\circ\,52'\,3'',68 - 329^\circ\,44'\,27'',66 = 36'',02,$$

$$f'(\alpha) = 1 - e\cos\alpha\ (*) = 1 - 0{,}190\,332 = 0{,}809\,668;$$

(*) La dérivée étant un *rapport*, z doit être remplacé par e. Du reste, si l'on fait $\alpha = \dfrac{180^\circ}{\pi}u$, et que l'on calcule $\dfrac{f(u)}{f'(u)}$, on arrive à la même valeur de h.

puis $$h = -\frac{36'',02}{0,809\,668} = -44'',4873.$$

La valeur de la racine cherchée est donc, à moins de $0'',01$,

$$u = 320^\circ\,52'\,15'',52.$$

384. Exemple IV. — *Résoudre l'équation* (*)

$$\varphi + 2(\pi - \varphi)\sin^2\frac{1}{2}\varphi - \sin\varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

On peut d'abord la simplifier en posant $\pi - \varphi = x$, et en remplaçant $2\sin^2\frac{1}{2}\varphi$ par $1 - \cos\varphi = 1 + \cos x$. On obtient ainsi

$$\sin x - x\cos x - \frac{\pi}{2} = 0. \quad (2)$$

Si l'on représente par y le premier membre de cette nouvelle équation, on aura

$$y' = x\sin x. \quad (3)$$

Par conséquent, la fonction y a *une infinité de maximums et de minimums*, déterminés par $\sin x = 0$, ou $x = k\pi$, k étant un entier quelconque, positif, négatif, ou zéro. D'ailleurs, pour

$$x = \ldots -3\pi,\quad -2\pi,\quad -\pi,\quad 0,\quad \pi,\quad 2\pi,\quad 3\pi,\ldots,$$

$$y = \ldots -\frac{7}{2}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi,\quad -\frac{3}{2}\pi,\quad -\frac{1}{2}\pi,\quad \frac{1}{2}\pi,\quad -\frac{5}{2}\pi,\quad \frac{5}{2}\pi,\ldots.$$

Il résulte, de l'inspection de ce tableau, que l'équation (2) a une infinité de racines réelles, comprises, chacune, entre deux multiples consécutifs de π : il y a exception pour les valeurs $-\pi$ et 0, qui ne comprennent aucune racine (**). Nous nous occuperons seulement du calcul de la plus petite racine positive (***).

(*) Elle répond à ce problème: *Partager un cercle en deux parties équivalentes, au moyen d'une circonférence ayant son centre sur la circonférence donnée.*

(**) Si l'on construit la courbe dont l'ordonnée est y, on trouve que cette ligne se compose d'une seule branche continue, sinueuse, indéfinie, rencontrant l'axe des abscisses en une infinité de points; etc.

(***) Elle répond au problème de géométrie.

385. Après quelques tâtonnements, on trouve que cette racine est comprise entre $\frac{10}{18}\pi$ et $\frac{11}{18}\pi$. Pour ces deux valeurs de x, y égale $-0{,}282\,915$ et $+0{,}025\,529$. Donc la racine diffère très peu de $\frac{11}{18}\pi$. Appliquant la correction de Newton à cette seconde limite, on a

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = -\frac{0{,}025\,529}{\frac{11}{18}\pi\sin\left(\frac{11}{18}\pi\right)} = 0{,}014\,151.$$

D'ailleurs, $\frac{11}{18}\pi = 1{,}919\,86$; en sorte que la valeur corrigée est $1{,}919\,86 - 0{,}014\,15 = 1{,}905\,71$. Substituant dans le premier membre de l'équation (2), on trouve $y = 0{,}000\,019$.

La formule de Newton, appliquée une seconde fois, donne

$$h = -0{,}000\,010, \quad x = 1{,}905\,70,$$

puis

$$y = 0{,}000\,002.$$

Cette dernière fraction est si petite, qu'il est inutile de pousser plus loin les calculs, et que l'on peut prendre, pour la solution cherchée,

$$x = 1{,}905\,70 = 109°\,11'\,18''.$$

Par suite,

$$\varphi = 70°\,48'\,42'',$$

à moins d'une seconde.

EXERCICES.

I. Partager un demi-cercle en deux parties équivalentes, par une parallèle au diamètre.

II. Trouver l'arc double de sa corde.

III. Résoudre $x^x - 10 = 0$.

Résultat : $x = 2{,}506\,184$.

IV. Résoudre $xlx - 100 = 0$.

Résultat : $x = 3{,}597\,2850\ldots$

V. Résoudre $x - \cos x = 0$.

Résultat : $x = 0{,}739\,085\,12\ldots$

VI. Trouver la plus petite racine positive de l'équation

$$x - \tang x = 0.$$

Résultat : $x = 4{,}493\,409\,64$ (*)....

VII. Même question pour

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0.$$

Résultat : $x = 2{,}563\,434\,23$ (**).

VIII. Calculer la racine positive de l'équation

$$l(1 + x) - \sin x = 0.$$

IX. Discuter l'équation

$$\operatorname{arc\,tang} x - \frac{3x}{3 + x^2} = 0.$$

CHAPITRE XXVI.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

386. Une *fraction rationnelle* est une expression de la forme $\frac{f(x)}{F(x)}$, dans laquelle les deux termes $f(x)$ et $F(x)$ sont des polynômes entiers. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la fraction a été réduite à sa *plus simple expression*, ou que $f(x)$ et $F(x)$ n'ont plus aucun facteur commun. Nous supposerons, en outre, le degré m du dénominateur supérieur au degré du numérateur. Si le contraire arrivait, on diviserait le numérateur par le dénominateur, et on mettrait la fraction sous la forme $Q + \frac{\varphi(x)}{F(x)}$, Q étant un polynôme entier, et $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ une nouvelle fraction satisfaisant à la condition énoncée.

(*) *M. Bertrand* trouve $x = 493\,409\,458$: cette dernière valeur est probablement plus exacte que l'autre.

(**) Les cinq dernières questions sont tirées d'un savant Mémoire de M. Terquem, inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Cas des facteurs inégaux.

387. Cela posé, si l'on connaît les facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c,\ldots, x-k$, $x-l$ de $F(x)$, ces facteurs étant d'abord supposés inégaux, on peut se proposer de décomposer $\frac{f(x)}{F(x)}$ en une somme de *fractions simples*, ayant pour numérateurs des *constantes* A, B, C,..., K, L, et pour dénominateurs $x-a$, $x-b$, $x-c,\ldots, x-k$, $x-l$ (*); de manière à avoir, *quel que soit x*,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l}. \quad (1)$$

La question consiste à déterminer, s'il est possible, les numérateurs A, B,..., L.

388. *Première méthode.* — Si on multiplie les deux membres de l'égalité (1) par le dénominateur $F(x)$, le second membre deviendra un polynôme entier, *du degré* $m-1$, contenant les inconnues A, B, C,... K, L *au premier degré*, et que l'on pourra ordonner par rapport à x. D'ailleurs, le polynôme $f(x)$ est, au plus, du degré $m-1$. Si donc, pour *identifier* les deux membres de la nouvelle égalité, on égale les coefficients des mêmes puissances de x, on aura *m équations du premier degré entre m inconnues*.

389. *Application.* — Soit

$$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}.$$

Chassant les dénominateurs, et ordonnant le second membre,

(*) Pour justifier cette tentative de décomposition, il suffit d'observer que la somme de m fractions de la forme $\frac{A}{x-a}, \frac{B}{x-b}, \ldots, \frac{L}{x-l}$ donne lieu à une fraction rationnelle dans laquelle le dénominateur est du degré m, et le numérateur d'un degré inférieur à m. Par exemple,

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)};$$

donc, réciproquement, cette dernière fraction est décomposable en fractions simples.

nous aurons

$$x^2+1=(A+B+C)x^2+(A-C)x-B.$$

Par suite,

$$A+B+C=1,$$
$$A-C=0,$$
$$-B=1,$$

puis

$$B=-1,\ A=C=1;\ \text{etc.}$$

390. Le procédé que nous venons d'indiquer est connu sous le nom de ***Méthode des coefficients indéterminés.*** Très-commode quand le dénominateur $F(x)$ est du deuxième ou du troisième degré, il devient impraticable dès que le nombre des fractions simples cherchées surpasse cinq ou six. En outre, cette méthode est incomplète, parce qu'elle ne prouve ni la *possibilité de la décomposition essayée,* ni l'*impossibilité de toute autre décomposition:* en effet, rien ne démontre à priori que les inconnues A, B,..., K, L seront finies et déterminées. Mais il est aisé de la modifier, de manière à la rendre complétement simple et satisfaisante.

391. *Deuxième méthode.* — Reprenons en effet l'égalité (1), après avoir multiplié les deux membres par $F(x)$; nous aurons, en représentant par $F_1(x)$, $F_2(x)$,..., $F_m(x)$, les quotients de $F(x)$ par $x-a$, $x-b$,..., $x-l$,

$$f(x)=AF_1(x)+BF_2(x)+\ldots+LF_m(x).\quad (2)$$

D'après un principe démontré (358), les polynômes composant les deux membres de la nouvelle égalité seront identiques, s'ils deviennent égaux pour m valeurs de x (*). Or, si l'on suppose $x=a$, les polynômes $F_2(x)$, $F_3(x)$,..., $F_m(x)$ s'annulent, parce qu'ils contiennent le facteur $x-a$, et l'égalité devient

$$f(a)=AF_1(a),$$

d'où

$$A=\frac{f(a)}{F_1(a)}.$$

De même, en faisant $x=b$, on obtient

$$B=\frac{f(b)}{F_2(b)};$$

(*) On ne doit pas oublier que le second membre est du degré $m-1$, et le premier membre, du degré $m-1$ au plus.

et ainsi de suite. Par conséquent, *pour obtenir le numérateur de la fraction* $\frac{G}{x-g}$ *correspondant à un facteur quelconque* $x-g$ *de* $F(x)$, *on divise* $F(x)$ *par* $x-g$; *et, en représentant par* $\varphi(x)$ *le quotient, on remplace* x *par* g *dans* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

392. *Remarques.* — I. Il résulte, du principe rappelé tout à l'heure, que si l'on donne aux coefficients A, B,..., L les valeurs

$$\frac{f(a)}{F_1(a)}, \quad \frac{f(b)}{F_2(b)}, \ldots, \quad \frac{f(l)}{F_m(l)}$$

résultant de cette règle, l'égalité (2) aura lieu, quel que soit x. Il en sera de même, évidemment, pour l'égalité (1). Donc *la décomposition proposée est possible.*

II. *La décomposition n'est possible que d'une seule manière.* Admettons, pour un instant, que la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ soit décomposable en $\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots$, les dénominateurs $x-a'$, $x-b'$, $x-c'$,... étant tous différents de $x-a$, $x-b$, $x-c$,.... Il résulterait, de cette hypothèse,

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots=\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots.$$

Multiplions les deux membres par $x-a'$ et faisons ensuite $x=a'$; nous trouverons $0=A'$; donc la fraction $\frac{A'}{x-a'}$ ne peut pas faire partie de la décomposition essayée. On prouverait, de la même manière, que l'on ne peut avoir

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A'}{x-a}+\frac{B'}{x-b}+\frac{C'}{x-c}+\ldots;$$

les numérateurs A', B', C',... différant, en tout ou en partie, des premiers numérateurs A, B, C,....

393. *Troisième méthode.* — Au moyen d'une remarque due à Euler, on peut se dispenser de diviser $F(x)$ par $x-a$, $x-b$,..., $x-l$.

En effet, l'identité

$$F(x)=(x-g)\varphi(x)$$

donne $$F(x) = (x-g)\varphi'(x) + \varphi(x);$$

et, en remplaçant x par g,

$$F'(g) = \varphi(g).$$

Par suite, $$G = \frac{f(g)}{F'(g)}.$$

On peut donc modifier ainsi l'énoncé précédent :

Pour obtenir les numérateurs des fractions $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x-b}$, ..., *dans lesquelles se décompose* $\frac{f(x)}{F(x)}$, *on prend la fraction* $\frac{f(x)}{F'(x)}$, *et on y remplace* x *successivement par* $a, b, c, \ldots$.

394. *Application.* — Soit

$$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}.$$

On a $$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{x^2+1}{3x^2-1}.$$

Donc $$A = \frac{1+1}{3-1} = 1, \quad B = -1, \quad C = 1,$$

comme ci-dessus.

Cas des facteurs égaux.

395. Supposons à présent que le dénominateur $F(x)$ renferme des facteurs égaux entre eux, et qu'il soit égal, par exemple, à $(x-a)^p F_1(x)$, $F_1(x)$ étant le produit des facteurs simples ou multiples de $F(x)$, autres que $x-a$.

Si l'on considère, pour un instant, la fraction $\frac{f(x)}{(x-a)F_1(x)}$, on pourra, d'après ce qui précède, la décomposer comme il suit :

$$\frac{f(x)}{(x-a)F_1(x)} = \frac{A_p}{x-a} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}, \quad (3)$$

A_p étant une constante et $f_1(x)$ un polynôme entier. En effet, on aura d'abord (391), $A_p = \frac{f(a)}{F_1(a)}$; et, d'un autre côté,

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A_p F_1(x)}{x-a}$$

est un polynôme entier, attendu que $f(x) - A_p F_1(x)$ s'annule pour $x = a$ (12) (*).

Cela étant, divisons par $(x-a)^{p-1}$ les deux membres de l'égalité (3); nous obtiendrons

$$\frac{f(x)}{(x-a)^p F_1(x)} = \frac{A_p}{(x-a)^p} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{p-1} F_1(x)}. \quad (4)$$

Ainsi, *la fraction proposée est décomposable en une fraction simple de la forme* $\frac{A_p}{(x-a)^p}$, *et en une nouvelle fraction rationnelle dont le dénominateur ne renferme plus que la puissance* $(p-1)$ *du facteur* $x - a$.

On peut raisonner sur celle-ci comme sur la fraction primitive, et l'on obtient, successivement:

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{p-1} F_1(x)} = \frac{A_{p-1}}{(x-a)^{p-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{p-2} F_1(x)},$$
$$\frac{f_2(x)}{(x-a)^{p-2} F_1(x)} = \frac{A_{p-2}}{(x-a)^{p-2}} + \frac{f_3(x)}{(x-a)^{p-3} F_1(x)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{f_{p-1}(x)}{(x-a) F_1(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_p(x)}{F_1(x)}.$$

Par suite,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_p}{(x-a)^p} + \frac{f_p(x)}{F_1(x)}. \quad (5)$$

On voit donc que *la présence du facteur* $(x-a)^p$, *dans* $F(x)$, *donne lieu à* p *fractions ayant pour numérateurs des constantes, et pour dénominateurs* $x-a$, $(x-a)^2, \dots$ $(x-a)^p$. Il est bien entendu que si $F_1(x)$ est divisible par $(x-b)^q$, on obtiendra pareillement des fractions de la forme

$$\frac{B_1}{x-b}, \quad \frac{B_2}{(x-b)^2}, \dots \quad \frac{B_q}{(x-b)^q},$$

et ainsi de suite.

(*) Le numérateur $f(x)$ peut être de degré plus élevé que le dénominateur $(x-a)F_1(x)$: cette circonstance n'influe en rien sur la possibilité de la décomposition indiquée.

Occupons-nous maintenant de la recherche des numérateurs A_1, $A_2, \ldots, A_p$.

396. *Première méthode.* — En multipliant les deux membres de l'égalité (5) par $F(x)$, et posant, pour abréger,

$$\Psi(x) = A_1(x-a)^{p-1} + A_2(x-a)^{p-2} + \ldots + A_{p-1}(x-a) + A_p, \quad (6)$$

nous obtiendrons

$$f(x) = \Psi(x)F_1(x) + (x-a)^p f_p(x);$$

puis, en prenant les $p-1$ premières dérivées:

$$f'(x) = \Psi(x)F'_1(x) + \Psi'(x)F_1(x) + \text{etc. } (^*),$$
$$f''(x) = \Psi(x)F''_1(x) + 2\Psi'(x)F'_1(x) + \Psi''(x)F_1(x) + \text{etc.},$$
$$f'''(x) = \Psi(x)F'''_1(x) + 3\Psi'(x)F''_1(x) + 3\Psi''(x)F'_1(x)$$
$$+ \Psi'''(x)F_1(x) + \text{etc.},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans les p égalités ainsi formées, remplaçons x par a; nous aurons

$$f(a) = \Psi(a)F_1(a),$$
$$f'(a) = \Psi(a)F_1(a) + \Psi'(a)F_1(a),$$
$$f''(a) = \Psi(a)F''_1(a) + 2\Psi'(a)F'_1(a) + \Psi''(a)F_1(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais, par la formule (6),

$$\Psi(a) = A_p, \quad \Psi'(a) = 1.A_{p-1}, \quad \Psi''(a) = 2.1.A_{p-2},$$
$$\Psi'''(a) = 3.2.1.A_{p-3}, \ldots;$$

donc, finalement,

$$f(a) = A_p F_1(a), \quad f'(a) = A_p F'_1(a) + 1.A_{p-1}F_1(a),$$
$$f''(a) = A_p F''_1(a) + 2.1.A_{p-1}F'_1(a) + 2.1.A_{p-2}F_1(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La première équation donne A_p, la deuxième, A_{p-1}; et ainsi de suite.

(*) Il est inutile de développer les dérivées de $(x-a)^p f_p(x)$, parce qu'elles s'annulent, aussi bien que cette fonction, pour $x = a$.

397. *Remarque.* — Le polynôme $F_1(x)$ ne contenant pas le facteur $x - a$, $F_1(a)$ est différent de zéro; donc les valeurs de A_p. A_{p-1}, $A_{p-2}, \ldots$, sont *finies et déterminées*. En outre, comme $f(a)$ n'est pas nul, la valeur de A_p est différente de zéro; donc *la fraction* $\frac{A_p}{(x-a)^p}$ *existe nécessairement*.

398. *Deuxième méthode.* — En multipliant par $(x-a)^p$ les deux membres de l'égalité (5), prenant les dérivées successives et faisant $x = a$, on trouve des équations que l'on peut écrire sous la forme abrégée

$$\frac{f}{F_1} = A_p, \quad \left(\frac{f}{F_1}\right)' = 1.A_{p-1}, \quad \left(\frac{f}{F_1}\right)'' = 2.1.A_{p-2},$$
$$\left(\frac{f}{F_1}\right)''' = 3.2.1.A_{p-3}, \ldots,$$

et qui font connaître, *séparément*, les numérateurs A_p, A_{p-1}, $A_{p-2}, \ldots$. Malheureusement, le calcul des dérivées successives de la fraction représentée par $\frac{f(x)}{F_1(x)}$ est presque toujours fort compliqué.

399. *Troisième méthode.* — Dans

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = A_p + A_{p-1}(x-a) + \ldots + A_1(x-a)^{p-1}$$
$$+ (x-a)^p \frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$

remplaçons x par $a + z$: le second membre se transforme en

$$A_p + A_{p-1}\, z + A_{p-2}\, z^2 + \ldots + A_1\, z^{p-1} + z^p \frac{f_1(a+z)}{F_1(a+z)}. \quad (7)$$

D'un autre côté, en développant les deux termes de la fraction $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ par le théorème de Taylor, nous pourrons la mettre sous la forme

$$\frac{f(a) + \frac{z}{1} f'(a) + \frac{z^2}{1.2} f''(a) + \ldots}{F_1(a) + \frac{z}{1} F_1'(a) + \frac{z^2}{1.2} F_1''(a) + \ldots}.$$

A présent, divisons le numérateur de la nouvelle fraction par le dénominateur, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de z, et en limitant ce quotient au terme en z^{p-1}; nous aurons, au lieu de la fraction $\frac{f(x)}{F_1(x)}$, une expression de la forme

$$B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_{p-1} z^{p-1} + \frac{z^p \mathrm{f}(z)}{F_1(a+z)}, \quad (8)$$

$\mathrm{f}(z)$ étant un polynôme entier. Identifiant les développements (7) et (8), nous trouvons

$$A_p = B_0, \; A_{p-1} = B_1, \ldots \; A_1 = B_{p-1}. \quad (9) \; (*)$$

Ainsi, *les numérateurs des fractions* $\frac{A_p}{(x-a)^p}, \frac{A_{p-1}}{(x-a)^{p-1}}, \ldots \frac{A_1}{x-a}$ *sont les coefficients successifs du quotient de* $f(a+z)$ *par* $F_1(a+z)$, *ordonné suivant les puissances croissantes de* z.

400. *Remarque.* — Ces trois méthodes doivent donner les mêmes valeurs pour les inconnues $A_p, A_{p-1}, \ldots, A_1$; *car la décomposition de la fraction* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *n'est possible que d'une seule manière* (**).

401. *Application.* — *Décomposer* $\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)^3}$ *en fractions simples.*

Nous nous occuperons seulement des fractions correspondant au facteur $(x-1)^3$ du dénominateur.

(*) Les fonctions (7) et (8) sont deux développements de la fraction $\frac{f(x)}{F_1(x)}$; donc elles doivent être égales, quelle que soit la valeur attribuée à z. Si l'on fait $z=0$, elles se réduisent à A_p et à B_0, car F_1 est différent de zéro; donc $A_p = B_0$. Retranchant membre à membre, supprimant le facteur commun z, et faisant $z=0$, on trouve $A_{p-1}=B_1$; etc. Absolument comme si les deux fonctions étaient entières.

(**) Cette proposition se démontre, dans le cas général, à très-peu près comme dans le cas particulier où $F(x)$ n'a que des facteurs simples. Nous laissons au lecteur le soin de développer la démonstration.

Première méthode.

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)^3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\text{etc.}$$

$$x^2+x-1=[A_1(x-1)^2+A_2(x-1)+A_3](x^2+x)+\text{etc.} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}2x+1=&[A_1(x-1)^2+A_2(x-1)+A_3](2x+1)\\&+[2A_1(x-1)+A_2](x^2+x)+\text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}2=&2[A_1(x-1)^2+A_2(x-1)+A_3]\\&+2[2A_1(x-1)+A_2](2x+1)\\&+2A_1(x^2+x)+\text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Pour $x=1$, ces trois égalités se réduisent à

$$1=2A_3,\quad 3=3A_3+2A_2,\quad 2=2A_3+6A_2+4A_1.$$

Donc
$$A_3=\frac{1}{2},\quad A_2=\frac{3}{4},\quad A_1=-\frac{7}{8}.$$

Deuxième méthode.

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-1)^3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\text{etc.}$$

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+x}=A_1(x-1)^2+A_2(x-1)+A_3+\text{etc.} \quad (4)$$

$$\frac{(x^2+x)(2x+1)-(x^2+x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}=2A_1(x-1)+A_2+\text{etc.},$$

ou
$$\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}=2A_1(x-1)+A_2+\text{etc.} \quad (5)$$

$$\frac{(x^2+x)^2 2-(2x+1)2(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x)^4}=2A_1+\text{etc.},$$

ou
$$2\frac{x^2+x-(2x+1)^2}{(x^2+x)^3}=2A_1+\text{etc.} \quad (6)$$

Faisant $x=1$ dans les égalités (4), (5), (6), nous obtenons, immédiatement,

$$A_3=\frac{1}{2},\quad A_2=\frac{3}{4},\quad A_1=-\frac{7}{8}.$$

Troisième méthode. — En remplaçant x par $1+z$ dans $\frac{x^2+x-1}{x^2+x}$,

on a d'abord $\frac{1+3z+z^2}{2+3z+z^2}$. Par la division, on transforme cette fraction en

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2+\frac{\frac{15}{8}z^3+\frac{7}{8}z^4}{2+3z+z^2}.$$

Donc $$A_3=\frac{1}{2},\quad A_2=\frac{3}{4},\quad A_1=-\frac{7}{8}.$$

Cas des facteurs imaginaires.

402. Dans ce qui précède, rien ne fait supposer que les quantités a, b, c,..., racines de l'équation $F(x)=0$, soient toutes réelles. Si, parmi ces racines, il s'en trouve d'imaginaires, les facteurs qui leur correspondent auront la forme $(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^p$, et ces facteurs donneront lieu à des fractions

$$\frac{A_1}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}},\quad \frac{A_2}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^2},\ldots,$$

dont les numérateurs seront imaginaires.

En supposant que les polynômes $f(x)$, $F(x)$ aient tous leurs coefficients réels, on peut, ainsi qu'il suit, faire disparaître les imaginaires, ou plutôt se dispenser de les introduire dans le calcul.

403. *Facteurs imaginaires simples.* — Considérons d'abord le cas où l'équation $F(x)=0$ admet une racine imaginaire simple, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Puisque cette équation a ses coefficients réels, elle admet la racine conjuguée $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ (255). Nous aurons donc

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{B}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}+\frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$

en désignant par $F_1(x)$ le quotient de $F(x)$ par $(x-\alpha)^2+\beta^2$. De plus (393),

$$A=\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})},\quad B=\frac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})}.$$

Enfin, si l'on réduit A à la forme $\mu+\nu\sqrt{-1}$ (54), la valeur de B sera évidemment $\mu-\nu\sqrt{-1}$. Nous pouvons donc écrire, au

lieu des fractions simples considérées tout à l'heure,

$$\frac{\mu + \nu\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{\mu - \nu\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}}$$
$$= 2\frac{\mu(x-\alpha) + \nu\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{Mx + N}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

M et N étant des constantes réelles.

Par conséquent, *la somme des fractions simples correspondant aux facteurs conjugués* $x - \alpha - \beta\sqrt{-1}$, $x - \alpha + \beta\sqrt{-1}$, *est une fraction qui a pour numérateur un binôme du premier degré, à coefficients réels, et pour dénominateur le trinôme* $(x-\alpha)^2 + \beta^2$.

404. *Facteurs imaginaires multiples.* — De

$$\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]F_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}, \quad (7)$$

on conclut, absolument comme au n° 395 :

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p F_1(x)} &= \frac{M_p x + N_p}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p} \\ &+ \frac{M_{p-1}x + N_{p-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\varphi(x)}{F_1(x)}; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

M_p, N_p, M_{p-1}, N_{p-1}, ... étant des coefficients réels.

405. *Calcul des coefficients.* — On l'effectuera comme au n° 396; c'est-à-dire qu'après avoir multiplié les deux membres de l'égalité (8) par $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p F_1(x)$, on prendra les $p-1$ premières dérivées (*) en négligeant le terme

$$[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p \frac{\varphi(x)}{F_1(x)};$$

et, dans les p équations ainsi formées, on fera $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$: cette substitution fournira $2p$ équations, d'où l'on conclura, successivement, M_p, N_p, puis M_{p-1}, N_{p-1}, puis M_{p-2}, N_{p-2}, ... Ordinairement, ce calcul sera très-prolixe.

406. *Application.* — Soit $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{(x^2+1)^3(x^2+x+1)^2}$. La

---

(*) Il est bien entendu que si $p = 1$, l'égalité (8) suffira.

fraction doit se décomposer en

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2+1} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+1)^2} + \frac{M_3 x + N_3}{(x^2+1)^3}$$
$$+ \frac{P_1 x + Q_1}{x^2+x+1} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

Pour déterminer les numérateurs des trois premières fractions simples, nous aurons d'abord

$$1 = \Psi(x)(x^2+x+1)^2 + \text{etc.},$$

en posant

$$\Psi(x) = (M_1 x + N_1)(x^2+1)^2 + (M_2 x + N_2)(x^2+1) + M_3 x + N_3;$$

puis, en prenant les deux premières dérivées,

$$0 = 2\Psi(x)(x^2+x+1)(2x+1) + \Psi'(x)(x^2+x+1)^2 + \text{etc.},$$
$$0 = 2\Psi(x)[2(x^2+x+1)+(2x+1)^2]$$
$$+ 4\Psi'(x)(x^2+x+1)(2x+1) + \Psi''(x)(x^2+x+1)^2 + \text{etc.}$$

D'ailleurs

$$\Psi'(x) = 4(M_1 x + N_1)(x^2+1)x + M_1(x^2+1)^2$$
$$+ 2(M_2 x + N_2)x + M_2(x^2+1) + M_3,$$
$$\Psi''(x) = 4(M_1 x + N_1)(3x^2+1)$$
$$+ 6M_1(x^2+1)x + 2(M_2 x + N_2) + 4M_2 x.$$

Si actuellement nous remplaçons x par $\sqrt{-1}$, nous déduirons, des six dernières relations, les équations suivantes :

$$1 = -\left(M_3\sqrt{-1} + N_3\right),$$
$$0 = 2\left(M_3\sqrt{-1} + N_3\right)\sqrt{-1}\left(2\sqrt{-1}+1\right)$$
$$- 2\left(M_2\sqrt{-1} + N_2\right)\sqrt{-1} - M_3,$$
$$0 = 2\left(M_3\sqrt{-1} + N_3\right)\left[2\sqrt{-1} + \left(2\sqrt{-1}+1\right)^2\right]$$
$$+ 4\left[2\left(M_2\sqrt{-1} + N_2\right)\sqrt{-1} + M_3\right]\sqrt{-1}\left(2\sqrt{-1}+1\right)$$
$$+ 8\left(M_1\sqrt{-1} + N_1\right) - 2\left(M_2\sqrt{-1} + N_2\right) - 4M_2\sqrt{-1},$$

d'où nous tirerons enfin :

$$M_3 = 0,\quad N_3 = -1,\quad M_2 = -2,\quad N_2 = -1,\quad M = -4,\quad N_1 = 2.$$

On trouve, par un calcul semblable,

$$P_2 = 0, \quad Q_2 = -1, \quad P_1 = 4, \quad Q_1 = 2.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(x^2+1)^3(x^2+x+1)^2} = -2\frac{2x-1}{x^2+1} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{(x^2+1)^3}$$
$$+ 2\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \quad (*).$$

407. *Remarque.* — Au lieu d'opérer conformément aux principes exposés ci-dessus, il est souvent plus commode de recourir à la *méthode des coefficients indéterminés*, surtout quand l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires. Soit, par exemple, la fraction $\frac{1}{x^4+1}\cdot$ Après avoir décomposé le dénominateur en $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$ (60), nous poserons

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Mx+N}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Px+Q}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Chassant les dénominateurs, et identifiant les deux membres, nous aurons

$$0 = M+P, \quad 0 = N+Q+(P-M)\sqrt{2}, \quad 0 = M+P+(Q-N)\sqrt{2},$$
$$1 = N+Q,$$

ou, plus simplement,

$$M+P=0, \quad M-P=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N-Q=0, \quad N+Q=1.$$

Ces équations donnent

$$M = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad P = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad N = Q = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right).$$

(*) Les calculs précédents, et tous ceux qu'exige la décomposition d'une fraction rationnelle quelconque, sont susceptibles de simplifications nombreuses, dans le détail desquels nous ne pouvons entrer; le lecteur les apercevra facilement.

Usage de la décomposition des fractions rationnelles.

408. Quand on veut trouver la *fonction primitive* (230) d'une fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$, on décompose celle-ci en fractions simples, et la question peut alors être considérée comme résolue, au moins dans le cas où l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines réelles. En effet, les fractions $\frac{A_1}{x-a}$, $\frac{A_p}{(x-a)^p}$ ont pour fonctions primitives $A_1 l(x-a) + \text{const.}$, et $-\frac{1}{p}\frac{A_p}{(x-a)^{p-1}} + \text{const.}$ Quand l'équation $F(x) = 0$ a des racines imaginaires, simples ou multiples, la recherche de la fonction dont la dérivée est $\frac{f(x)}{F(x)}$ devient un peu plus difficile, et nous ne pourrions, sans sortir des limites que nous avons dû nous imposer, indiquer comment on doit s'y prendre pour déterminer cette fonction (*). Du reste, quelques exemples simples suffiront pour montrer l'importance de la théorie exposée dans ce chapitre.

409. Exemple I. — *Quelle est la fonction y qui a pour dérivée*

$$y' = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}?$$

On a trouvé ci-dessus

$$y' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

Par conséquent,

$$y = l(x-1) - lx + l(x+1) + \text{const.},$$

ou, par les propriétés des logarithmes,

$$y = l\frac{x^2-1}{x} + \text{const.},$$

(*) Néanmoins, si l'on met la fraction $y' = \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ sous la forme $\frac{M(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{M\alpha+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, on reconnaît aisément qu'elle a pour fonction primitive

$$y = \frac{M}{2} l[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{M\alpha+N}{\beta} \text{arc tang} \frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.}$$

ou enfin, parce que *le logarithme d'une constante est une constante*,

$$y = l\frac{x^2-1}{cx}.$$

410. Exemple II. $y' = \frac{1}{x^4+1}.$

On a vu que

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right);$$

donc il suffit de trouver les fonctions primitives des deux fractions contenues dans la parenthèse.

Comparant la première à $\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, on a $M=1$, $N=\sqrt{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; donc cette fraction est la dérivée de

$$\frac{1}{2}l(x^2+x\sqrt{2}+1) + \text{arc tang}\,(x\sqrt{2}+1).$$

De même, la fraction $\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}$ est la dérivée de

$$\frac{1}{2}l(x^2-x\sqrt{2}+1) - \text{arc tang}\,(x\sqrt{2}-1).$$

Par suite,

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[l\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} + \text{arc tang}\,(x\sqrt{2}+1) + \text{arc tang}\,(x\sqrt{2}-1)\right] + \text{const.}$$

Par une formule connue,

$$\text{arc tang}\,(x\sqrt{2}+1) + \text{arc tang}\,(x\sqrt{2}-1) = \text{arc tang}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2};$$

donc, finalement,

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[l\sqrt{c\,\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} + \text{arc tang}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right],$$

c étant la constante arbitraire.

411. Exemple III. $y' = \frac{x^4+1}{x^6+1}.$

Le dénominateur x^6+1 est décomposable en

$$(x^2+1)\left(x^2+x\sqrt{3}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{3}+1\right).$$

Par suite,

$$y'=\frac{2}{3(x^2+1)}+\frac{1}{6\left(x^2+x\sqrt{3}+1\right)}+\frac{1}{6\left(x^2-x\sqrt{3}+1\right)}.$$

1°. La première fraction simple est la dérivée de $\frac{2}{3}$ arc tang x.

2°. En mettant $x^2+x\sqrt{3}+1$ sous la forme $\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2+\frac{1}{4}$, on trouve (408) que la deuxième fraction est la dérivée de

$$\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\left(2x+\sqrt{3}\right).$$

3°. De même, $\frac{1}{6\left(x^2-x\sqrt{3}+1\right)}$ est la dérivée de

$$\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\left(2x-\sqrt{3}\right).$$

La fonction primitive cherchée est donc

$$y=\frac{1}{3}\left[2\operatorname{arc\,tang}x+\operatorname{arc\,tang}\left(2x+\sqrt{3}\right)+\operatorname{arc\,tang}\left(2x-\sqrt{3}\right)\right]$$
$$+\text{const.},$$

ou, plus simplement,

$$y=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{3x(1-x^2)}{x^4-4x^2+1}+\text{const.}$$

EXERCICES.

I. Décomposer $\frac{x^3+x-1}{(x-1)^3\,(x^2+x+1)^2\,(x^2+1)^3}$.

II. Décomposer $y'=\frac{1}{x^6-1}$, et trouver la fonction primitive y.

Résultat :

$$y=\frac{1}{3}\left[l\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right]+\text{const.}$$

III. En représentant par a_1, a_2, .., a_n, b_1, b_2, ..., b_{n-2} des quantités quelconques, on a, identiquement,

$$\sum_1^n \frac{(a_p - b_1)(a_p - b_2)\ldots(a_p - b_{n-2})}{(a_p - a_1)(a_p - a_2)\ldots(a_p - a_n)} = 0 \quad (*).$$

IV. Démontrer la relation

$$\sum_1^n \frac{(a_p - b_1)(a_p - b_2)\ldots(a_p - b_n)}{(a_p - a_1)(a_p - a_2)\ldots(a_p - a_n)} = \sum_1^n (a_p - b_p).$$

(*) Il est évident que le dénominateur ne doit pas contenir le facteur $a_p - a_p$.

TRIGONOMÉTRIE.

COMPLÉMENT DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

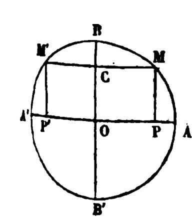
CHAPITRE Ier.

DISCUSSION DES FORMULES.

Arcs répondant à une ligne trigonométrique donnée.

1. Quand un arc varie entre $-\infty$ et $+\infty$, les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, etc., repassent périodiquement par les mêmes valeurs (*B., Trig.*, 9-13). Par conséquent, à une même valeur de $\sin x$, de $\cos x$, de $\operatorname{tang} x$, etc., correspondent une infinité de valeurs de x. En d'autres termes, *chacune des équations* $\sin x = l$, $\cos x = l$, $\operatorname{tang} x = l$, *etc., a une infinité de racines réelles* (*). Cherchons les relations qui existent entre ces racines.

2. Soit d'abord $\sin x = l$.

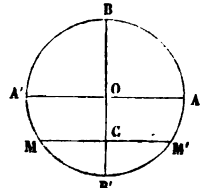


Après avoir décrit la circonférence O, dont le rayon sera pris pour unité de longueur, traçons les deux diamètres perpendiculaires AA', BB'; prenons, au-dessus et au-dessous de AA', suivant que l est positive ou négative, la distance OC proportionnelle à la valeur absolue de cette quantité, et menons M'CM parallèle au rayon *fixe* OA : tous les arcs qui commencent en A et qui se terminent en M ou en M', ont évidemment l pour sinus.

Or, si l'on désigne par α le plus petit AM des arcs *positifs* dé-

(*) Il est sous-entendu que, dans les deux premières équations, la quantité l est comprise entre $+1$ et -1.

terminés par la construction précédente, on aura, si l est positive, $ABM' = \pi - \alpha$; et, si l est négative,



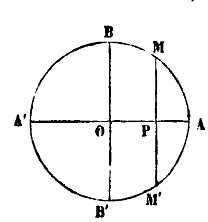
$$ABM' = 2\pi - (\alpha - \pi) = 3\pi - \alpha.$$

Augmentant ou diminuant chacun des arcs α, $\pi - \alpha$, $3\pi - \alpha$ d'un nombre quelconque de circonférences, on trouve

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad (1)$$

$$x = (2k+1)\pi - \alpha. \quad (2)$$

Dans ces formules, k est un entier *positif, négatif* ou *nul.*



3. Si l'on prend $\cos x = l$, et que l'on désigne par α la plus petite valeur positive de x, on obtiendra, au moyen de la construction indiquée ci-contre,

$$x = 2k\pi \pm \alpha. \quad (3)$$

4. Enfin, de $\tang x = l$, on conclut

$$x = k\pi + \alpha. \quad (4)$$

Applications des formules précédentes.

5. Quand on cherche à exprimer le sinus ou le cosinus d'un arc x en fonction de sa tangente, on trouve (*B., Trig.*, 17)

$$\sin x = \pm \frac{\tang x}{\sqrt{1 + \tang^2 x}}, \qquad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tang^2 x}},$$

en sorte que l'on obtient *deux* valeurs pour chacune des deux inconnues. La formule (4) montre clairement à quoi tient cette indétermination. En effet, les sinus et les cosinus de tous les arcs qui répondent à la tangente donnée l sont compris dans les deux formules

$$\sin x = \sin(k\pi + \alpha), \qquad \cos x = \cos(k\pi + \alpha).$$

Cela posé, si k est *pair,*

$$\sin x = \sin\alpha, \qquad \cos x = \cos\alpha;$$

et, si k est *impair,*

$$\sin x = -\sin\alpha, \qquad \cos x = -\cos\alpha.$$

Les valeurs de $\sin x$ se réduisent donc à $\pm \sin\alpha$; etc.

6. Les formules qui donnent le sinus et le cosinus de la moitié d'un arc en fonction du cosinus de cet arc, sont (*B.*, *Trig.*, **22**)

$$\sin\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \qquad \cos\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Il est encore très-facile de voir pourquoi l'on obtient deux valeurs pour $\sin\frac{1}{2}x$ et deux valeurs pour $\cos\frac{1}{2}x$. En effet, α représentant le plus petit arc répondant au cosinus donné, on a (3)

$$\sin\frac{1}{2}x = \sin\left(k\pi \pm \frac{1}{2}\alpha\right) = \pm\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos\frac{1}{2}x = \cos\left(k\pi \pm \frac{1}{2}\alpha\right) = \pm\cos\frac{1}{2}\alpha.$$

7. Problème. — *Trouver* $\sin\frac{1}{2}x$ *et* $\cos\frac{1}{2}x$, *connaissant* $\sin x$.

De

$$\sin^2\frac{1}{2}x + \cos^2\frac{1}{2}x = 1,$$

$$2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \sin x,$$

on conclut, en ajoutant ou retranchant,

$$\left(\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x\right)^2 = 1 + \sin x,$$

$$\left(\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x\right)^2 = 1 - \sin x;$$

puis, par un calcul très-simple,

$$\sin\frac{1}{2}x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x} \pm \sqrt{1-\sin x}\right),$$

$$\cos\frac{1}{2}x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x} \mp \sqrt{1-\sin x}\right).$$

Ainsi, l'on obtient *quatre* valeurs pour chacune des deux inconnues : en outre, les valeurs de $\sin\frac{1}{2}x$ sont les mêmes que celles

de $\cos\frac{1}{2}x$ (*). Les formules (1) et (2) peuvent servir à expliquer ce résultat.

Effectivement, la formule (1) donne

$$\sin\frac{1}{2}x = \sin\left(k\pi + \frac{1}{2}\alpha\right) = \pm\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos\frac{1}{2}x = \cos\left(k\pi + \frac{1}{2}\alpha\right) = \pm\cos\frac{1}{2}\alpha;$$

et la formule (2),

$$\sin\frac{1}{2}x = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pm\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos\frac{1}{2}x = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pm\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

8. *Remarque.* — Quand l'arc x est donné, ou que l'on connaît seulement des limites entre lesquelles il est compris, le problème précédent cesse d'être indéterminé. Soient, par exemple,

$$\sin x = \frac{3}{4}, \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

On conclut, de ces dernières inégalités,

$$\sin\frac{1}{2}x > \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\frac{1}{2}x > 0.$$

Par conséquent, les seules valeurs admissibles sont

$$\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}(\sqrt{7}+1), \quad \cos\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}(\sqrt{7}-1).$$

Les formules considérées dans les nos 5 et 6 donnent lieu à des remarques du même genre.

(*) Cependant, si l'on adopte une de ces valeurs pour $\sin\frac{1}{2}x$, on doit rejeter $\cos\frac{1}{2}x = \sin\frac{1}{2}x$, et $\cos\frac{1}{2}x = -\sin\frac{1}{2}x$; sans quoi l'on n'aurait plus $\sin^2\frac{1}{2}x + \cos^2\frac{1}{2}x = 1$.

9. Problème. — *Trouver* $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$, *connaissant* $\operatorname{tang} x$.

On a (*B.*, *Trig.*, 21)

$$\operatorname{tang} x = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x};$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x + \frac{2}{\operatorname{tang} x}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x - 1 = 0.$$

Cette équation du second degré ayant pour dernier terme -1, les deux valeurs de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$ sont réelles et de signes contraires : de plus, si l'une est égale à la tangente d'un arc φ, l'autre aura pour valeur $-\cot\varphi$. Pour vérifier qu'il en doit être ainsi, observons que, d'après la formule (4),

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = \operatorname{tang}\left(\frac{k}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha\right);$$

ou

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha,$$

k étant pair,

et

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right) = -\cot\frac{1}{2}\alpha,$$

k étant impair.

CHAPITRE II.

RECHERCHE DES VALEURS DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

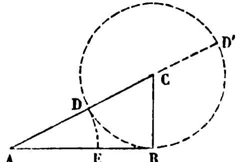
Du décagone régulier (*).

10. Problème. — *Partager, en moyenne et extrême raison, une droite donnée* AB.

Au point B, élevons la perpendiculaire BC égale à la moitié de

(*) Ce paragraphe, et celui qui le suit, ont leur place naturelle dans la *Géométrie* : nous avons dû nous conformer à l'ordre indiqué par les auteurs du Programme.

AB. Menons AC. Prenons CD = CB, et AE = AD : le segment AE sera moyen proportionnel entre la droite entière AB et l'autre segment BE.



En effet, la tangente AB et la sécante ADCD' donnent (*B.*, *Géom.*, 166)

$$\frac{AD'}{AB} = \frac{AB}{AD};$$

puis

$$\frac{AB}{AD' - AB} = \frac{AD}{AB - AD},$$

ou

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AB - AD};$$

ou enfin,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{BE}.$$

11. *Remarque.* — En représentant par a la longueur de AB, nous aurons

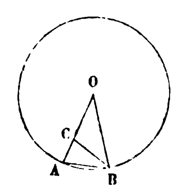
$$BC = \frac{1}{2}a, \quad AC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{5},$$

et

$$AE = AD = \frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1).$$

Ainsi, quand une droite est partagée en moyenne et extrême raison, le plus grand segment est égal au produit de la droite par la quantité incommensurable $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

12. THÉORÈME. — *Le côté du décagone régulier est égal à la plus grande partie du rayon du cercle circonscrit, partagé en moyenne et extrême raison.*



Soit AB le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle dont le rayon est AO.

L'angle O a pour valeur $\frac{2^d}{5}$, et l'angle ABO, $\frac{2 - \frac{2}{5}}{2} = \frac{4^d}{5}$. Ainsi, dans le triangle isocèle ABO, l'angle à la base est double de l'angle au sommet.

D'après cela, si nous menons la bissectrice BC, le triangle BCO sera isocèle ; et les triangles ABO, ACB, ayant un

angle commun et un angle égal, seront semblables. Donc

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO}.$$

Mais comme AB = BC = CO, la proportion précédente devient

$$\frac{AC}{CO} = \frac{CO}{AO}.$$

Sous cette forme, on voit que le point C partage AO en moyenne et extrême raison ; donc, etc.

Du pentédécagone régulier.

13. Théorème. — *L'arc sous-tendu par le côté du pentédécagone régulier inscrit est la différence des arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone et du décagone.*

En effet, ces arcs sont respectivement $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ de la circonférence ; et $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$.

Valeurs des sinus et cosinus des arcs $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, ...

14. *Le sinus d'un arc moindre qu'un quadrant est la moitié de la corde qui sous-tend l'arc double* (*B.*, *Trig.*, 28). Par conséquent, et en ayant égard aux valeurs des côtés du triangle équilatéral, du carré, de l'hexagone régulier et du décagone régulier, inscrits dans le cercle de rayon 1, on aura

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad (1)$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad (2)$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad (3)$$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right). \quad (4)$$

Remplaçant les trois premiers arcs par leurs compléments, et appliquant à la formule (4) la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on aura

encore

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad (5)$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (6)$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad (7)$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}. \quad (8)$$

15. Si l'on applique aux équations (3) et (4) les formules du n° 7, on obtient, en prenant convenablement les signes des radicaux,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}), \quad (9)$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}), \quad (10)$$

$$\sin\frac{\pi}{20} = \sin\ 9^\circ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right). \quad (11)$$

$$\cos\frac{\pi}{20} = \cos\ 9^\circ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right). \quad (12)$$

16. Enfin, la combinaison des valeurs (4), (8), (9), (10) donne, à cause de

$$\sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ, \text{ etc.}:$$

$$\sin\frac{\pi}{30} = \sin 3^\circ = \frac{1}{16}\left[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right],$$

$$\cos\frac{\pi}{30} = \cos 3^\circ = \frac{1}{16}\left[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right],$$

ou

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16}\left[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2(5+\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}\right], \quad (13)$$

$$\cos 3^\circ = \frac{1}{16}\left[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2(5+\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}\right]. \quad (14)$$

Si l'on part de ces dernières formules, on pourra, de proche en proche, calculer les sinus et cosinus des arcs de 6°, 9°, 12°,..., 45° (*). Nous engageons le lecteur à effectuer ce calcul.

17. De $\tang a = \frac{\sin a}{\cos a}$, on conclut, par les valeurs précédentes,

$$\tang\frac{\pi}{3} = \tang 60^\circ = \sqrt{3}, \quad (15)$$

$$\tang\frac{\pi}{4} = \tang 45^\circ = 1, \quad (16)$$

$$\tang\frac{\pi}{6} = \tang 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (17)$$

$$\tang\frac{\pi}{10} = \tang 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, \quad (18)$$

$$\tang\frac{\pi}{12} = \tang 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \quad (19)$$

$$\tang\frac{\pi}{20} = \tang 9^\circ = \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \quad (20)$$

et enfin

$$\tang\frac{\pi}{30} = \tang 3^\circ = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)-2\sqrt{(5+\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-1)+2\sqrt{(5+\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}}. \quad (21)$$

On rendra les quatre dernières expressions beaucoup plus commodes, si on les transforme en d'autres ayant leurs dénominateurs rationnels. C'est là encore un utile exercice.

Trisection d'un arc ou d'un angle.

18. Problème I. — *Trouver* $\sin\frac{1}{3}x$, *connaissant* $\sin x$.

Les formules relatives à l'addition des arcs donnent

$$\sin 3a = \sin(2a+a) = \sin 2a.\cos a + \cos 2a.\sin a,$$

(*) L'arc de 3° est le plus petit de ceux qui sont représentés par *un nombre entier de degrés*, et dont on puisse calculer, *sous forme finie*, les lignes trigonométriques.

ou $\sin 3a = 2\sin a \cos a . \cos a + (1 - 2\sin^2 a)\sin a$,

ou enfin $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.

Par suite, en remplaçant $3a$ par x, nous aurons

$$\sin^3 \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}\sin\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\sin x = 0,$$

ou, en posant $\sin x = l$, $\sin\frac{1}{3}x = y$,

$$y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}l = 0. \quad (1)$$

Cette équation du troisième degré a pour racines *les sinus des tiers de tous les arcs qui répondent au sinus donné l.*

19. *Discussion.* — D'après les formules (1) et (2) du chapitre Ier, on a, en désignant par α le plus petit de ces arcs,

$$y = \sin\frac{2k\pi + \alpha}{3}, \quad y = \sin\frac{(2k+1)\pi - \alpha}{3}.$$

En donnant à k les valeurs 0, 1, 2, 3, 4,..., et négligeant les multiples de la circonférence, on obtiendra donc

$$y = \sin\frac{\alpha}{3}, \qquad y = \sin\frac{\pi - \alpha}{3},$$
$$y = \sin\frac{2\pi + \alpha}{3}, \quad y = \sin\frac{3\pi - \alpha}{3},$$
$$y = \sin\frac{4\pi + \alpha}{3}, \quad y = \sin\frac{5\pi - \alpha}{3},$$
$$y = \sin\frac{\alpha}{3}, \qquad y = \sin\frac{\pi - \alpha}{3},$$

etc. etc.

Par suite, toutes les valeurs de y se réduisent à

$$y_1 = \sin\frac{\alpha}{3}, \quad y_2 = \sin\frac{\pi - \alpha}{3}, \quad y_3 = -\sin\frac{\pi + \alpha}{3}.$$

Ces valeurs sont généralement distinctes, en sorte que l'équation (1) a ses trois racines réelles et inégales. Cependant, si l'on avait $\frac{\alpha}{3} = \frac{\pi - \alpha}{3}$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les deux racines y_1 et y_2 devien-

draient égales. Dans ce cas,

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = -1.$$

20. *Application.* — Si l'on suppose

$$l = \sin 9^\circ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5 - \sqrt{5}}\right),$$

on aura $\quad y_1 = \sin 3^\circ, \quad y_2 = \sin 57^\circ, \quad y_3 = -\sin 63^\circ.$

Or, le sinus de 3° est connu (16), et il est facile de calculer les sinus de 57° et de 63°. Nous avons donc l'exemple d'une équation du troisième degré, à coefficients *compliqués de radicaux*, dont les trois racines sont *réelles, et exprimables sous forme finie*. Les valeurs de ces racines sont

$$y_1 = \frac{1}{16}\left[(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - 2\sqrt{2(5 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{3})}\right],$$

$$y_2 = \frac{1}{16}\left[\begin{array}{r} -(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{6})} \\ + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{3})} \end{array}\right],$$

$$y_3 = -\frac{1}{16}\left[2(\sqrt{10} - \sqrt{2}) + \sqrt{2(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{6})} - \sqrt{2(5+\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}\right].$$

21. PROBLÈME II. — *Trouver* $\cos\frac{1}{3}x$, *connaissant* $\cos x$.

Un calcul semblable à celui du n° 18 conduit à l'équation

$$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}l = 0, \quad (2)$$

dans laquelle $z = \cos\frac{1}{3}x$, $l = \cos x$. On peut éviter ce calcul et ramener l'équation (2) à l'équation (1), en faisant attention que

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right),$$

$$\cos\frac{1}{3}x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}x\right) = -\sin\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right).$$

Par conséquent, les valeurs de $\cos\frac{1}{3}x$ sont égales aux valeurs de $\sin\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$, changées de signe.

22. PROBLÈME III. — *Trouver* $\operatorname{tang}\frac{1}{3}x$, *connaissant* $\operatorname{tang}x$.

De
$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang}a + \operatorname{tang}b}{1 - \operatorname{tang}a\operatorname{tang}b},$$

on conclut, en supposant $b = 2a$,

$$\operatorname{tang}3a = \frac{\operatorname{tang}a + \operatorname{tang}2a}{1 - \operatorname{tang}a\operatorname{tang}2a},$$

ou
$$\operatorname{tang}3a = \frac{\operatorname{tang}a + \dfrac{2\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}^2 a}}{1 - 2\dfrac{\operatorname{tang}^2 a}{1-\operatorname{tang}^2 a}} = \frac{3\operatorname{tang}a - \operatorname{tang}^3 a}{1 - 3\operatorname{tang}^2 a};$$

puis, en remplaçant $3a$ par x,

$$\operatorname{tang}^3\frac{1}{3}x - 3\operatorname{tang}x\operatorname{tang}^2\frac{1}{3}x - 3\operatorname{tang}\frac{1}{3}x + \operatorname{tang}x = 0;$$

ou enfin, en posant $\operatorname{tang}x = l$, $\operatorname{tang}\frac{1}{3}x = t$,

$$t^3 - 3lt^2 - 3t + l = 0. \quad (3)$$

23. *Discussion.* — L'équation (3) a ses racines réelles et inégales. En effet, à cause de la formule (4) (Chap. Ier),

$$t = \operatorname{tang}\frac{k\pi+\alpha}{3};$$

c'est-à-dire

$$t = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{3},\quad t = \operatorname{tang}\frac{\pi+\alpha}{3},\quad t = \operatorname{tang}\frac{2\pi+\alpha}{3} = -\operatorname{tang}\frac{\pi-\alpha}{3},$$

$$t = \operatorname{tang}\frac{3\pi+\alpha}{3} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{3},\ \text{etc.}$$

Or, ces dernières valeurs se réduisent à

$$t_1 = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{3},\quad t_2 = \operatorname{tang}\frac{\pi+\alpha}{3},\quad t_3 = -\operatorname{tang}\frac{\pi-\alpha}{3}.$$

24. *Remarque.* — Si la tangente donnée l, *d'abord supposée positive*, grandit indéfiniment, la valeur limite de α sera $\frac{\pi}{2}$. Par

conséquent, les limites vers lesquelles tendront les racines de l'équation (3) seront

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad T_2 = +\infty, \quad T_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Si, au contraire, la tangente l est supposée négative, on aura, pour $l = -\infty$,

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad T_2 = -\infty, \quad T_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On peut encore arriver à ces conclusions, en supposant

$$\frac{3 \operatorname{tang} \frac{1}{3} x - \operatorname{tang}^3 \frac{1}{3} x}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{3} x} = \pm \infty.$$

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA TRIGONOMÉTRIE A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Équation du deuxième degré.

25. Soit l'équation $x^2 + px + q = 0$;

d'où $$x = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} p^2 - q}.$$

Pour rendre cette formule calculable par logarithmes, nous écrirons d'abord

$$x = -\frac{1}{2} p \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right).$$

Cela posé, trois cas sont à distinguer :

1°. Si les racines sont réelles et que q soit *positif*, la quantité $\frac{4q}{p^2}$ sera positive et inférieure à l'unité. Nous pourrons donc poser

$$\sin \varphi = \frac{2}{p} \sqrt{q}; \quad \text{(A)}$$

d'où $$x = -\frac{1}{2}(1 \mp \cos \varphi);$$

puis, en *séparant* les deux racines,

$$x' = -p\sin^2\frac{1}{2}\varphi,\quad x'' = -p\cos^2\frac{1}{2}\varphi.\quad (B)$$

2°. Si q est *négatif*, auquel cas les racines sont nécessairement réelles, la quantité $-\frac{4q}{p^2}$ étant positive, on posera

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{2}{p}\sqrt{-q},\quad (C)$$

et l'on aura
$$x = -\frac{1}{2}p\left(1 \mp \frac{1}{\cos\theta}\right);$$
c'est-à-dire
$$x' = p\frac{\sin^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta},\quad x'' = -p\frac{\cos^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta}.\quad (D)$$

3°. Enfin, quand les racines seront imaginaires, on écrira

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}\sqrt{-1};$$

et, pour calculer le coefficient de $\sqrt{-1}$, on pourra le mettre sous la forme $\sqrt{q}\sin\omega$, en prenant
$$\cos\omega = -\frac{p}{2\sqrt{q}}.$$

26. *Remarque.* — Dans ce dernier cas, les deux racines peuvent être représentées par

$$x = \rho\left(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega\right),$$

ρ étant le module. Cette forme remarquable, à laquelle on peut ramener toutes les expressions imaginaires, en facilite beaucoup la théorie.

Équation du troisième degré.

27. On a vu dans l'*Algèbre* (chap. XXI), 1°. Que toute équation du troisième degré, à une seule inconnue, peut être réduite à la forme

$$x^3 + px + q = 0;\quad (1)$$

2°. Que la condition de réalité des trois racines est

$$4p^3 + 27q^2 < 0.\quad (2)$$

Quand cette dernière condition (qui suppose p négatif) est vérifiée, on réduit très-aisément la résolution de l'équation proposée à la résolution de l'équation qui donne *le sinus du tiers d'un arc* α *dont le sinus est donné* (18). En effet, posons

$$x = \frac{y}{k},$$

d'où

$$y^3 + pk^2y + qk^3 = 0. \quad (3)$$

Pour identifier cette équation avec l'équation citée, il suffit de prendre

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{p}}, \quad l = \sin\alpha = \frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}. \quad (4)$$

Cette dernière formule donne une valeur réelle pour l'arc *auxiliaire* α (*).

En effet, la condition (2) équivaut à

$$27q^2 < -4p^3,$$

ou à

$$+\frac{\sqrt{q^2}}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} < 1 \ (^{**});$$

ainsi, la valeur de l est comprise entre $+1$ et -1; etc. L'arc α étant connu, on aura, pour valeurs des trois racines,

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sin\frac{\alpha}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sin\frac{\pi-\alpha}{3},$$

$$x_3 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\sin\frac{\pi+\alpha}{3} \ (^{***}). \quad (5)$$

28. *Applications.* — I. Soit l'équation

$$x^3 - 41x + 39 = 0.$$

(*) Et même *une infinité de valeurs réelles* : les Tables trigonométriques font connaître la plus petite.

(**) Dans cette formule, $\sqrt{q^2}$ représente $+q$ ou $-q$, suivant que q est positif ou négatif.

(***) On peut vérifier que ces valeurs satisfont aux relations connues :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = p, \quad x_1x_2x_3 = -q.$$

La formule (4) devient

$$\sin\alpha = \frac{39}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{41}\right)^3}.$$

Le calcul prend ensuite la disposition suivante :

$$\begin{aligned}
\log 3 &= 0{,}477\,121\,3 + \\
\log 41 &= 1{,}612\,783\,9 - \\
\log\frac{3}{41} &= \bar{2}{,}864\,337\,4 + \\
\frac{1}{2} &= \bar{1}{,}432\,168\,7 + \\
\log 39 &= 1{,}591\,064\,6 + \\
\log 2 &= 0{,}301\,030\,0 - \\
\log\sin\alpha &= \bar{1}{,}586\,540\,7 \\
\alpha &= 22^\circ 42' 11'',7.
\end{aligned}$$

(*Voir* le tableau à la page 269.)

Vérification.

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}973\,737 & \log x_1 &= \bar{1}{,}988\,441\,9 + \\
x_2 &= 5{,}860\,480 & \log x_2 &= 0{,}767\,933\,4 + \\
x_3 &= -6{,}834\,215 & \log(-x_3) &= 0{,}834\,688\,6 + \\
 & 0{,}000\,002 & \log(-x_1x_2x_3) &= 1{,}591\,063\,9
\end{aligned}$$

$$x_1x_2x_3 = -38{,}9994.$$

II. $x^3 - 7x + 7 = 0$ (*Alg.*, 365).

En opérant comme dans le premier exemple, on trouve, successivement,

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{7}}, \quad \alpha = 79^\circ 6' 24'',0,$$

$$\frac{\alpha}{3} = 26^\circ 22' 8'', \quad \frac{\pi-\alpha}{3} = 33^\circ 37' 52'', \quad \frac{\pi+\alpha}{3} = 86^\circ 22' 8'';$$

et enfin

$$x_1 = 1{,}356\,896, \qquad x_2 = 1{,}692\,021, \qquad x_3 = -3{,}048\,917.$$

Calcul des racines de l'équation

$x^3 - 41x + 39 = 0$ (*).

$\frac{\alpha}{3} = 7^\circ 34' 3'',9.$	$\frac{\pi - \alpha}{3} = 52^\circ 25' 56'',1.$	$\frac{\pi + \alpha}{3} = 67^\circ 34' 3'',9.$
$\log \sin \frac{\alpha}{3} = \bar{1},119\,580\,6 +$	$\log \sin \frac{\pi - \alpha}{3} = \bar{1},899\,072\,1 +$	$\log \sin \frac{\pi + \alpha}{3} = \bar{1},965\,827\,3 +$
$\log 2 = 0,301\,030\,0 +$	$0,301\,030\,0 +$	$0,301\,030\,0 +$
$\log \sqrt{\frac{3}{41}} = \bar{1},432\,168\,7 -$	$\bar{1},432\,168\,7 -$	$\bar{1},432\,168\,7 -$
$\log x_1 = \bar{1},988\,441\,9$	$\log x_2 = 0,767\,933\,4$	$\log(-x_3) = 0,834\,688\,6$
$x_1 = 0,973\,737.$	$x_2 = 5,860\,480.$	$x_3 = -6,834\,215.$

(*) *Voir* à la page 268.

29. Quand l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

a une seule racine réelle, ses coefficients satisfont à l'inégalité

$$4p^3 + 27q^2 > 0.$$

En même temps, les formules qui donnent les trois racines sont (*Alg.*, chap. XXI)

$$R_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$R_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$x_1 = R_1 + R_2, \quad \frac{x_2}{x_3} = -\frac{1}{2}(R_1 + R_2) \pm \frac{1}{2}(R_1 - R_2)\sqrt{3}\sqrt{-1}.$$

Pour rendre les deux premières valeurs calculables par logarithmes, il suffit d'opérer comme pour l'équation du deuxième degré (25); c'est-à-dire que :

1°. p étant *positif*, on aura

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{\frac{q}{2}}, \quad R_1 = \sqrt[3]{q\,\frac{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\cos\theta}}, \quad R_2 = -\sqrt[3]{q\,\frac{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}{\cos\theta}}.$$

2°. p étant *négatif*, on aura

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{\frac{q}{2}},$$

$$R_1 = -\sqrt[3]{q\sin^2 \frac{1}{2}\varphi}, \quad R_2 = -\sqrt[3]{q\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} \ (*).$$

(*) On peut aller plus loin, et rendre calculables par logarithmes $R_1 + R_2$ et $(R_1 - R_2)\sqrt{3}$: mais les transformations que l'on est obligé de faire subir aux formules ci-dessus nous semblent peu utiles et peu commodes.

30. *Application.* $x^3 - 2x - 5 = 0.$

$$\sin\varphi = -\frac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3},\quad R_1 = \sqrt[3]{5\sin^2\frac{1}{2}\varphi},\quad R_2 = \sqrt[3]{5\cos^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

$$\log 2 = 0{,}301\,030\,0 +$$
$$\log 3 = 0{,}477\,121\,2 -$$
$$\overline{1}{,}823\,908\,8 +$$
$$\frac{1}{2} = \overline{1}{,}911\,954\,4 +$$
$$\log 2 = 0{,}301\,030\,0 +$$
$$\log 5 = 0{,}698\,970\,0 -$$
$$\log(-\sin\varphi) = \overline{1}{,}337\,923\,2.$$
$$\varphi = 180° + 12°\,34'\,33'',2,$$
$$\frac{1}{2}\varphi = 96°\,17'\,16'',6.$$

$$\log\sin\frac{1}{2}\varphi = \overline{1}{,}997\,379\,4$$
$$\times 2 = \overline{1}{,}994\,758\,8 +$$
$$\log 5 = 0{,}698\,970\,0 +$$
$$0{,}693\,728\,8$$
$$\frac{1}{3} = \log R_1 = 0{,}231\,242\,9$$

$$\log\left(-\cos\frac{1}{2}\varphi\right) = \overline{1}{,}039\,514\,0$$
$$\times 2 = \overline{2}{,}079\,028\,0 +$$
$$\log 5 = 0{,}698\,970\,0 +$$
$$\overline{2}{,}777\,998\,0$$
$$\frac{1}{3} = \log R_2 = \overline{1}{,}592\,666\,0$$

$$R_1 = 1{,}703\,110,\qquad R_2 = 0{,}391\,441,$$
$$R_1 + R_2 = 2{,}094\,551.\qquad R_1 - R_2 = 1{,}311\,669.$$

$$x_1 = 2{,}094\,551,\quad x_2 = -1{,}047\,275 + 0{,}655\,834\sqrt{3}\sqrt{-1},$$
$$x_3 = -1{,}047\,275 - 0{,}655\,834\sqrt{3}\sqrt{-1}.$$

EXERCICES.

I. Résoudre $(\sin x - \cos x)\sin x = m$.

II. Diviser un angle droit en quatre parties x, y, z, u, de manière que

$$x = y,\quad u = y + z,\quad \frac{\tang z}{\tang u} = m.$$

III. Dans tout triangle rectiligne,

$$T = \frac{abc}{p}\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C = p^2\frac{\cos A - \cos B + \cos C - 1}{\sin A + \sin B + \sin C}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C},$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{abc}{\sin A \sin B \sin C}} = \frac{1}{4}\frac{p}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}:$$

a, b, c représentent les côtés; A, B, C les angles opposés; T, p, R représentent l'aire, le demi-périmètre, et le rayon du cercle circonscrit.

IV. Résoudre

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0.$$

V. Calculer, à moins de 0,000001, le sinus de 3° (16).

Résultat : 0,052336.

VI. Résoudre les équations

$$x + y + z = \frac{11}{6}\pi, \quad \sin x + \sin y + \sin z = \sin\frac{\pi}{3},$$
$$\cos x + \cos y + \cos z = \cos\frac{\pi}{3}.$$

VII. Transformer en produit

$$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z).$$

VIII. Vers quelle limite tend le rapport

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \sin\frac{3\pi}{2n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n} + \frac{3\pi}{2n} + \ldots + \frac{n\pi}{2n}}$$

quand le nombre entier n augmente indéfiniment?

Réponse : Vers $\frac{8}{\pi^2}$.

IX. Déterminer le triangle dont les côtés sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs, et dans lequel le plus grand angle est double du plus petit.

X. Résoudre les équations

$$a \cos x - b \cos y = (a - b) \cos \alpha,$$

$$a \sin x - b \sin y = (a - b) \cos \alpha \cot \beta,$$

et rendre les formules calculables par logarithmes.

XI. Calculer les valeurs des angles x et y qui satisfont aux relations

$$(2 + \cos 2x + \sin 2x) \sin 2y + (\cos x + \sin x) \cos 2y = 0,$$

$$2(\cos 2x - \sin 2x) \sin y + (\cos x - \sin x) \cos y = 0.$$

Résultat : L'équation qui donne x est

$$\tan^3 x - 9 \tan^2 x - 17 \tan x + 9 = 0.$$

Elle conduit à

$$x = 84^\circ 34' 35'',5, \qquad y = 158^\circ 56' 38'',9.$$
$$x = 116\ 57\ \ 8,5, \qquad y = 71\ 59\ 44,9.$$
$$x = 23\ 29\ 31,3, \qquad y = 79\ 27\ 55,4.$$

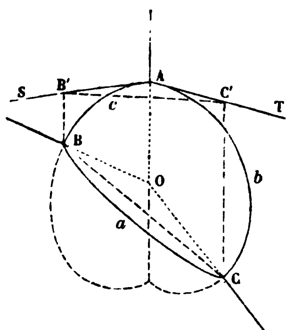
TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE Ier.

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE.

Relation entre les trois côtés et un angle.

31. Soit ABC un triangle sphérique déterminé par les intersections des plans AOB, BOC, COA avec la sphère ayant pour centre le sommet O de l'angle trièdre OABC. Représentons par A, B, C les angles du triangle, et par a, b, c les côtés qui leur sont respectivement opposés, ces angles et ces côtés étant évalués, soit en degrés, minutes, secondes, etc., soit en parties du rayon AO, lequel sera pris pour unité.



Pour obtenir la *relation fondamentale* entre les côtés a, b, c et l'angle A, menons les tangentes AS, AT aux arcs AB, AC, et les parallèles BB', CC' au rayon OA : ces dernières droites sont perpendiculaires au plan TAS, tangent en A à la sphère. Par conséquent, si nous menons BC et B'C', le trapèze BCB'C' aura les angles B' et C' droits.

Cela posé,

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2AB'.AC'.\cos A,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{B'C'}^2 + (CC' - BB')^2;$$

d'où

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2AB'.AC'\cos A + (CC' - BB')^2.$$

Mais

$$\overline{BC}^2 = (\text{cord. } a)^2 = 4\sin^2\frac{1}{2}a = 2(1-\cos a);$$

et, quelle que soit la forme du triangle sphérique,

$AB' = \sin c$, $AC' = \sin b$, $BB' = 1 - \cos c$, $CC' = 1 - \cos b$ (*).

Donc

$$2(1-\cos a) = \sin^2 c + \sin^2 b - 2\sin c \sin b \cos A + (\cos b - \cos c)^2,$$

ou $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$. (1)

32. *Remarque.* — D'après la manière dont la *relation fondamentale* (1) a été démontrée, on voit qu'elle a lieu pour un triangle sphérique quelconque : les relations qui en seront déduites auront donc le même degré de généralité.

33. Au moyen d'une *permutation tournante*, on conclut, de l'équation (1),

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \quad (2)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \quad (3)$$

Relation entre deux côtés et les deux angles opposés.

34. Pour obtenir une relation entre a, b, A, B, il suffit d'éliminer c entre les équations (1) et (2). Cette élimination peut être faite comme il suit :

Après avoir *isolé* les termes contenant cos A et cos B, ajoutons et retranchons membre à membre; nous aurons

$$(\cos a + \cos b)(1-\cos c) = \sin c(\sin b \cos A + \sin a \cos B),$$

$$(\cos a - \cos b)(1+\cos c) = \sin c(\sin b \cos A - \sin a \cos B).$$

Ces deux nouvelles équations, étant multipliées membre à membre, donnent, après la suppression du facteur commun $\sin^2 c$ (**),

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 a \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B;$$

(*) *B., Trig.*, **18**.

(**) Le côté c étant compris entre 0 et π, son sinus est différent de zéro.

puis, successivement,

$$\sin^2 b - \sin^2 a = \sin^2 b - \sin^2 b \sin^2 A - \sin^2 a + \sin^2 a \sin^2 B,$$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}.$$

Nous aurons donc, en observant que les éléments d'un triangle sphérique sont inférieurs à 180 degrés,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \quad (4)$$

Ainsi, *dans tout triangle sphérique, les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.*

35. *Remarque.* — La *suite de rapports égaux* (4) équivaut à deux équations distinctes.

Relation entre deux côtés, l'angle compris, et l'un des deux angles opposés.

36. Dans l'équation (1), remplaçons $\cos c$ par sa valeur (3) et $\sin c$ par $\frac{\sin a}{\sin A} \sin C$ (équat. 4) : c sera éliminé, et nous aurons une relation entre *les deux côtés* a, b, *l'angle compris* C, *et l'angle* A *opposé à* a.

Cette relation est

$$\cos a = \cos b(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \frac{\sin a}{\sin A} \sin C \cos A.$$

Pour la simplifier, faisons passer le terme $\cos a \cos^2 b$ dans le premier membre, et divisons les deux membres par $\sin a \sin b$; nous aurons

$$\frac{\cos a \sin b}{\sin a} = \cos b \cos C + \frac{\sin C \cos A}{\sin A},$$

ou

$$\cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C. \quad (5)$$

37. Cette relation en donne *cinq* autres. En effet, si l'on change d'abord b en c et C en B, on obtient

$$\cot a \sin c = \cot A \sin B + \cos c \cos B. \quad (6)$$

Des permutations tournantes donnent ensuite

$$\cot b \sin c = \cot B \sin A + \cos c \cos A, \quad (7)$$

$$\cot b \sin a = \cot B \sin C + \cos a \cos C, \quad (8)$$
$$\cot c \sin a = \cot C \sin B + \cos a \cos B, \quad (9)$$
$$\cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos b \cos A. \quad (10)\ (*)$$

Relation entre trois angles et un côté.

38. En appliquant la relation fondamentale au triangle *supplémentaire* du triangle donné, on a

$$\cos(\pi-A)=\cos(\pi-B)\cos(\pi-C)+\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)\cos(\pi-a),$$

ou $$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \quad (11)$$

Un changement de lettres donne ensuite

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \quad (12)$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \quad (13)$$

39. *Remarque.* — Les *quatorze* équations (1), (2),..., (13) renferment toute la résolution des triangles sphériques.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

40. Si nous supposons $A = 90°$ dans les relations (1), (4), (6),..., nous obtiendrons les *six* formules principales suivantes, lesquelles sont propres au calcul logarithmique :

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad (14)$$
$$\sin b = \sin a \sin B, \quad (15)$$
$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B, \quad (16)$$
$$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B, \quad (17)$$
$$\cos a = \cot B \cot C, \quad (18)$$
$$\cos B = \sin C \cos b. \quad (19)$$

(*) Malgré le défaut de symétrie de ces équations, on les retrouve assez aisément si l'on observe : 1° que le premier membre et le premier terme du second membre sont de la forme cot × sin, le premier produit étant relatif à *deux côtés*, le second à *deux angles*; 2° que les deux co-

41. Ces six équations constituent autant de théorèmes, que l'on peut énoncer ainsi :

Dans tout triangle sphérique rectangle :

1°. *Le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés ;*

2°. *Le sinus d'un côté de l'angle droit est égal au sinus de l'hypoténuse, multiplié par le sinus de l'angle opposé au premier côté ;*

3°. *La tangente d'un côté de l'angle droit est égale à la tangente de l'hypoténuse, multipliée par le cosinus de l'angle compris ;*

4°. *La tangente d'un des deux côtés de l'angle droit est égale au sinus de l'autre côté, multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier côté ;*

5°. *Le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cotangentes des angles adjacents ;*

6°. *Le cosinus d'un des deux angles adjacents à l'hypoténuse est égal au sinus de l'autre angle, multiplié par le cosinus du côté opposé au premier angle.*

42. *Remarques.* — I. D'après l'équation (14), $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ sont positifs, ou bien un de ces cosinus est positif, les deux autres étant négatifs. Donc :

Dans tout triangle sphérique rectangle, les côtés moindres qu'un quadrant sont en nombre impair (*).

II. Semblablement, à cause de l'équation (17) : *un côté de l'angle droit et l'angle opposé sont de même espèce*, c'est-à-dire tous deux plus petits ou tous deux plus grands que 180 degrés.

43. *Formule empirique de Mauduit.* — Les équations ci-dessus, ou celles qu'on en déduit par un changement de lettres, expriment chacune la relation qui existe entre *les deux éléments connus* et *l'élément cherché*. Or, si l'on fait abstraction de l'angle droit A,

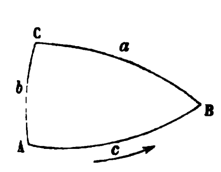
---

tangentes se correspondent ; 3° que le dernier terme du second membre est égal au produit des cosinus des arcs dont les sinus entrent déjà dans la formule.

(*) Cependant, si $a = \frac{\pi}{2}$, un des côtés de l'angle droit, *au moins*, égale $\frac{\pi}{2}$. Et si $b = \frac{\pi}{2}$, l'hypoténuse égale aussi $\frac{\pi}{2}$.

on pourra toujours faire le tour du triangle, de manière que ces trois éléments soient, ou *contigus*, ou *alternatifs*. Cela posé, toutes les équations dont il s'agit sont comprises dans la formule *empirique* suivante :

$$\textit{cos arc intermédiaire} = \textit{produit} \begin{cases} \textit{des sin d'arcs } \text{ALTERNES}, \\ \textit{des cot d'arcs } \text{CONTIGUS}; \end{cases}$$



seulement, en appliquant ce théorème, on doit avoir soin de *remplacer chaque côté de l'angle droit par son complément* (*).

Par exemple, si l'on veut calculer b, c, B, connaissant a et C, on fera le tour du triangle, dans le sens indiqué par la flèche; et l'on aura, successivement,

1°. $$\cos C = \cot a \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \quad (^{**});$$

2°. $$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \quad (^{***});$$

3°. $$\cos a = \cot B \cot C \quad (^{****});$$

ce qui est exact.

44. *Cas douteux.* — Quand on veut *résoudre un triangle rectangle, connaissant un côté de l'angle droit et l'angle opposé*, le problème peut être *impossible*, et il peut admettre *deux solutions* ou *une seule solution*. En effet, les équations (15), (17), (19) donnant

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\tang b}{\tang B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b},$$

il est d'abord visible qu'il n'y aura *aucune solution* si quelqu'une des quantités $\sin a$, $\sin c$, $\sin C$ surpasse l'unité, et qu'il y en

(*) A l'énoncé précédent, que nous copions textuellement dans le *Cours de Mathématiques pures* de Francœur, notre savant et regrettable maître, on peut substituer cette phrase purement *mnémotechnique :*

$$\textit{cos moyen} = \textit{produit} \begin{cases} \textit{des cot contiguës}, \\ \textit{des sin non contigus}. \end{cases}$$

(**) Éléments contigus.

(***) Éléments alternatifs.

(****) Éléments contigus.

aura *une seule* si $b = B$ (*). D'un autre côté, si l'on a $\sin b < \sin B$, on pourra prendre

$$a = \alpha \quad \text{ou} \quad a = \pi - \alpha,$$

α étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et déterminé par $\sin\alpha = \frac{\sin b}{\sin B}$ (**).

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES OBLIQUANGLES.

45. **Premier cas.** — *On connaît les trois côtés a, b, c.*

Les trois angles A, B, C seront déterminés par les équations (1), (2), (3). On tire, de l'équation (1),

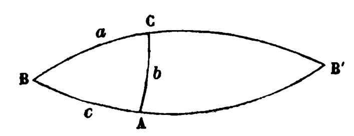
$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Afin de transformer cette formule en une autre qui soit calculable par logarithmes, ajoutons l'unité aux deux membres; nous aurons

$$2\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{\cos a - \cos b\cos c + \sin b \sin c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c};$$

(*) Dans ce cas, les angles A, C sont droits, et les côtés a, c sont égaux à 90 degrés, en sorte que *le triangle* ABC *est la moitié du fuseau qui a pour angle* B.



(**) Soit BCB'A le fuseau qui a pour angle B. Si le triangle rectangle BAC, dans lequel l'hypoténuse $a = \alpha$, satisfait à la question, le triangle B'AC y satisfera pareillement. Or,

$$B'C = \pi - \alpha, \quad B'A = \pi - c, \quad B'CA = 180^\circ - C.$$

Par suite, quand on aura choisi l'une des deux valeurs de a, auquel cas c et C seront déterminés d'*espèce*, les formules (17) et (19) donneront, sans aucune ambiguïté, les valeurs de ces deux éléments.

puis, en représentant par $2p$ le périmètre,

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}. \quad (20)$$

Dans cette formule, le radical doit être pris positivement, parce que $\frac{1}{2}A$ est inférieur à 90 degrés.

46. Si, au lieu d'ajouter 1 à cos A, on forme 1 — cos A, on trouve

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}. \quad (21)$$

Enfin, les équations (20) et (21) donnent, par la division,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \ (*). \quad (22)$$

47. Deuxième cas. — *On connaît les trois angles* A, B, C.

En appliquant l'équation (22) au triangle supplémentaire de ABC, on aura d'abord

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\pi - a) = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi+B-A-C)\sin\frac{1}{2}(\pi+C-A-B)}{\sin\frac{1}{2}(3\pi-A-B-C)\sin\frac{1}{2}(\pi+A-B-C)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}};$$

puis, en posant $A+B+C=2P$,

$$\cot\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{-\cos P\cos(P-A)}} \ (**). \quad (23)$$

48. Troisième cas. — *On connaît deux côtés b, c et l'angle compris* A.

(*) Les trois dernières formules, analogues à celles qui leur correspondent dans la trigonométrie rectiligne, donnent lieu aux mêmes remarques. Nous engageons le lecteur à retrouver, par leur moyen, les conditions

$$a < b+c, \quad b < c+a, \quad c < a+b, \quad a+b+c < 2\pi,$$

nécessaires pour que le triangle soit possible.

(**) L'équation (23) donne lieu, comme la formule (22), à une discussion que nous supprimons, pour abréger.

Les trois autres éléments du triangle seront déterminés par les équations

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (1)$$

$$\cot b \sin c = \cot B \sin A + \cos c \cos A, \quad (7)$$

$$\cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos b \cos A, \quad (10)$$

qu'il s'agit de transformer, de manière à en tirer des formules calculables par logarithmes.

49. 1°. Si l'on met $\cos b$ en facteur dans le second membre de la relation (1), on aura

$$\cos a = \cos b (\cos c + \sin c . \operatorname{tang} b \cos A);$$

et, en posant $\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} b \cos A, \quad (24)$

$$\cos a = \frac{\cos b \cos (c - \varphi)}{\cos \varphi} \ (*). \quad (25)$$

2°. On tire, de l'équation (7),

$$\cot B = \frac{\cot b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A} = \frac{\sin c - \cos c \operatorname{tang} b \cos A}{\sin A \operatorname{tang} b},$$

ou

$$\cot B = \frac{\sin (c - \varphi)}{\sin A \operatorname{tang} b \cos \varphi};$$

ou enfin, à cause de $\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos A}$,

$$\cot B = \frac{\cot A \sin (c - \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (26)$$

3°. En posant $\operatorname{tang} \varphi' = \operatorname{tang} c \cos A$,

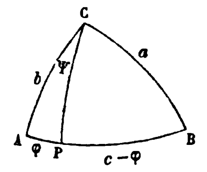
on aurait, pareillement,

$$\cot C = \frac{\cot A \sin (b - \varphi')}{\cos \varphi'}.$$

50. *Remarque.* — Les transformations précédentes équivalent à la décomposition du triangle ABC en deux triangles rectangles. En

(*) En général, pour transformer en produit une expression de la forme $M \cos x + N \sin x$, il suffit d'égaler $\frac{M}{N}$ à la tangente ou à la cotangente d'un arc auxiliaire.

effet, soit CP l'arc mené du sommet C, perpendiculairement à AB. On aura, par la formule de Mauduit,



$$\cos A = \cot b \operatorname{tang} AP.$$

Ainsi, $AP = \varphi$; etc.

51. *Remarque.* — L'emploi de l'arc auxiliaire φ' suppose une seconde décomposition du triangle, obtenue en menant, du sommet B, un arc perpendiculaire à AC. On peut éviter cette nouvelle décomposition en calculant l'angle Ψ formé par CP avec AC. On a effectivement

$$\operatorname{tang} \Psi = \frac{\cot A}{\cos b}, \quad (27)$$

et

$$\operatorname{tang}(C - \Psi) = \frac{\cot B}{\cos a}: \quad (28)$$

les angles Ψ et $C - \Psi$ étant connus, leur somme donnera l'angle C (*).

52. Quatrième cas. — *On connaît un côté a et les deux angles adjacents* B, C.

Ce cas, que l'on ramènerait au précédent par le moyen du triangle supplémentaire, peut aussi être résolu comme il suit :

Le triangle rectangle BPC donne

$$\operatorname{tang}(C - \Psi) = \frac{\cot B}{\cos a}, \quad (28)$$

$$\operatorname{tang}(c - \varphi) = \cos B \operatorname{tang} a, \quad (29)$$

$$\cos(C - \Psi) = \cot a . \operatorname{tang} CP;$$

et, le triangle APC,

$$\operatorname{tang} \Psi = \frac{\cot A}{\cos b}, \quad \operatorname{tang} \varphi = \cos A \operatorname{tang} b, \quad \cos \Psi = \cot b \operatorname{tang} CP.$$

(*) On conclut, des deux dernières formules, cette relation entre les cinq éléments A, B, C, a, b :

$$\operatorname{tang} C = \frac{\cos a \cot A + \cos b \cot B}{\cos a \cos b - \cot A \cot B}.$$

Éliminant tang CP, on a donc

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \frac{\cos(C - \Psi)}{\cos \Psi}, \quad (30)$$

puis

$$\operatorname{tang} A = \frac{\cot \Psi}{\cos b}, \quad (31)$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \cos A \operatorname{tang} b. \quad (24)$$

L'équation (28) sert à calculer l'angle auxiliaire Ψ, après quoi les formules (30) et (31) donnent b et A. Enfin, les équations (29) et (24) déterminent c au moyen de φ et de $c - \varphi$.

53. Cinquième cas. — *On connaît deux côtés a, b, et l'angle* A *opposé à l'un d'eux.*

Pour calculer l'angle B, il suffit d'observer que la première des équations (4) donne

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \sin A, \quad (32)$$

après quoi les formules (24), (29), (27) et (28) détermineront complétement c et C.

54. *Remarque.* — L'angle B étant donné par son sinus, le problème est *impossible* quand le second membre de la formule (32) surpasse, en valeur absolue, l'unité; et quand ce second membre est compris entre $+1$ et -1, le problème peut admettre *deux solutions*, ou *une seule solution*, ou enfin il peut être *impossible*. La discussion complète des différents cas qui peuvent se présenter est fort prolixe; mais, quand a, b et A sont donnés *en nombres*, il est toujours facile de décider si l'on doit admettre ou rejeter l'une ou l'autre des valeurs obtenues pour B. Soient, par exemple,

$$a = 112^\circ 18' 20'', \quad b = 68^\circ 39' 30'', \quad A = 130^\circ 48' 50''.$$

On trouve

$$B = 49^\circ 38' 12'' \quad \text{et} \quad B = 130^\circ 21' 48''.$$

Ces deux valeurs sont admissibles, parce qu'elles sont moindres que A, et que d'ailleurs a surpasse b (*).

Soient ensuite

$$a = 67^\circ 41' 40'', \quad b = 68^\circ 39' 30'', \quad A = 130^\circ 48' 50''.$$

(*) *Dans tout triangle sphérique, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle.*

On trouve encore

$$B = 49^\circ 38' 12'', \quad B = 130^\circ 21' 48''.$$

Ces deux valeurs, étant moindres que A, sont inadmissibles.

Enfin, si l'on prend

$$a = 72^\circ 18' 20'', \quad b = 68^\circ 39' 30'', \quad A = 49^\circ 11' 10'',$$

d'où l'on conclut

$$B = 47^\circ 43' 44'' \quad \text{et} \quad B = 132^\circ 16' 16'',$$

on doit admettre seulement la première valeur de B.

55. Sixième cas. — *On connaît deux angles* A, B, *et le côté a opposé à l'un d'eux.*

Ce cas se résout comme le précédent. Il donne lieu aux mêmes remarques et aux mêmes difficultés.

Analogies de Néper. — Formules de Delambre.

56. Dans les quatre derniers cas, la résolution des triangles obliquangles peut être simplifiée au moyen de relations remarquables, dues à Néper. Pour trouver ces relations, rappelons-nous la formule

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{a - b}{a + b}$$

qui sert *à résoudre un triangle rectiligne, connaissant deux côtés et l'angle compris,* et cherchons par quoi doit être remplacé le rapport $\frac{a - b}{a + b}$ quand le triangle est sphérique.

En développant $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)$, nous aurons d'abord

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} C - \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \operatorname{tang} \frac{1}{2} C}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}.$$

Mais

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(p - b)\sin(p - c)}{\sin p \sin(p - a)}}, \quad (22)$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(p - c)\sin(p - a)}{\sin p \sin(p - b)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin(p - a)\sin(p - b)}{\sin p \sin(p - c)}};$$

donc
$$\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}B = \frac{\sin(p-c)}{\sin p},$$
$$\tang\frac{1}{2}B\tang\frac{1}{2}C = \frac{\sin(p-a)}{\sin p},$$
$$\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}C = \frac{\sin(p-b)}{\sin p},$$

et, conséquemment,
$$\frac{\tang\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin(p-b)-\sin(p-a)}{\sin p+\sin(p-c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c},$$

ou
$$\frac{\tang\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}. \quad (33)$$

Sans nouveau calcul, on peut écrire
$$\frac{\tang\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin p-\sin(p-c)},$$

ou
$$\frac{\tang\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}. \quad (34)$$

Enfin, la considération du triangle supplémentaire donne
$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a-b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}, \quad (35)$$
$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}. \quad (36)$$

Les équations (33), (34), (35), (36) sont les *proportions* ou *analogies de Néper*.

87. *Application à la résolution des triangles.* — Si, par exemple, on connaît deux côtés a, b, avec l'angle compris C, les deux premières analogies donneront la demi-différence et la demi-somme des angles A, B, c'est-à-dire ces angles eux-mêmes ; après quoi l'on obtiendra le côté c au moyen de la troisième analogie ou de la quatrième. De même pour le quatrième cas.

En effet, si l'on connaît trois des quatre éléments a, b, A, B, on obtiendra le quatrième par la *proportion des sinus* (34), et l'on se servira ensuite de deux des analogies pour déterminer C et c.

88. *Formules de Delambre.* — Ces formules, beaucoup moins

importantes que celles de Néper, donnent

$$\sin\frac{1}{2}(A \pm B) \quad \text{et} \quad \cos\frac{1}{2}(A \pm B)$$

au moyen des *quatre derniers éléments* du triangle (*).

On a $$\sin\frac{1}{2}(A \pm B) = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B \pm \sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A,$$

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},$$

$$\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}},$$

$$\cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}};$$

donc

$$\sin\frac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$

$$\pm\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin c}[\sin(p-b) \pm \sin(p-a)];$$

ou $$\sin\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin c}\cdot 2\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\sin\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin c}.2\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}c;$$

ou encore

$$\sin\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}(a-b), \quad (37)$$

$$\sin\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}(a-b). \quad (38)$$

(*) Chacune de ces formules exprimant une relation entre *tous les éléments* d'un triangle sphérique, il paraît assez difficile d'en comprendre l'utilité.

On trouve, de la même manière,

$$\cos\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}(a+b), \quad (39)$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}(a+b). \quad (40)$$

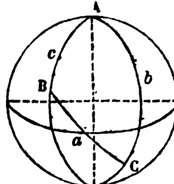
Applications numériques.

59. **Problème I.** — *Trouver la distance de deux points du globe, connaissant leurs latitudes et leurs longitudes.*

Nous prendrons pour exemple la distance de San-Francisco au cap de Bonne-Espérance.

San-Francisco.. Lat. N : 37° 48′ 30″. — Longit. O : 124° 48′ 26″.
Cap........... Lat. S : 33° 56′ 3″. — Longit. E : 16° 8′ 21″.

La terre étant supposée sphérique, les méridiens AB, AC passant par les deux lieux considérés B et C, formeront, avec l'arc de grand cercle BC, un triange sphérique dans lequel



$$A = 124^\circ 48'26'' + 16^\circ 8'21'' = 140^\circ 56' 47'',$$

$$b = 90^\circ + 33^\circ 56'\ 3'' = 123^\circ 56'\ 3'',$$

$$c = 90^\circ - 37^\circ 48' 30'' = 52^\circ 11' 30''.$$

Appliquant les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos A \operatorname{tang} b, \quad (24) \qquad \cos a = \frac{\cos b \cos(c-\varphi)}{\cos\varphi}, \quad (25)$$

on aura

$\log(-\cos A) = \bar{1},890\,173\,2$	$\log(-\cos b) = \bar{1},746\,820\,9 +$
$\log(-\operatorname{tang} b) = 0,172\,089\,5$	$\log\cos(c-\varphi) = \bar{1},999\,364\,6 +$
$\log\operatorname{tang}\varphi = 0,062\,262\,7$	$\log\cos\varphi = \bar{1},816\,129\,7 -$
$\varphi = 49^\circ 5' 35'',2,$	$\log(-\cos a) = \bar{1},930\,055\,8$
$c - \varphi = 3^\circ 5' 54'',8.$	$a = 148^\circ 20' 51'',4.$

Pour évaluer en kilomètres la distance a, il suffit de se rappeler que l'arc de 90 degrés égale 10 000 kilomètres. On trouve ainsi

$$a = 15371^{\text{km}},96.$$

60. *Vérification.* — **Prenons les analogies de Néper :**

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-C)=\cot\frac{1}{2}A\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)=\cot\frac{1}{2}A\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-c)\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)},$$

avec

$$\frac{1}{2}(b-c)=35^\circ 52' 16'',5,$$

$$\frac{1}{2}(b+c)=88^\circ\ 3' 46'',5,$$

$$\frac{1}{2}A=70^\circ 28' 23'',5.$$

$\log\cot\frac{1}{2}A=\bar{1},5497940+$	$\log\cot\frac{1}{2}A=\bar{1},5497940+$
$\log\sin\frac{1}{2}(b-c)=\bar{1},7678723+$	$\log\cos\frac{1}{2}(b-c)=\bar{1},9086650+$
$\log\sin\frac{1}{2}(b+c)=\bar{1},9997518-$	$\log\cos\frac{1}{2}(b+c)=\bar{2},5289430-$
$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-C)=\bar{1},3179145$	$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)=\bar{0},9295160$
$\frac{1}{2}(B-C)=11^\circ 44' 45'',9.$	$\frac{1}{2}(B+C)=83^\circ 17' 30''.$

$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-c)=\bar{1},8592073+$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(B+C)=\bar{1},9970165+$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(B-C)=\bar{1},3087241-$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}a=0,5474997$$

$$\frac{1}{2}a=\ 74^\circ 10' 25'',7,$$

$$a=148^\circ 20' 51'',4;$$

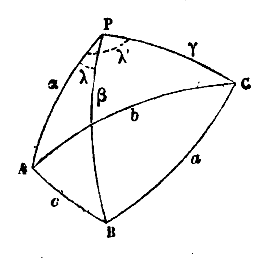
comme ci-dessus.

61. **Problème II.** — *La distance de Paris à Rome est de 1100 kilomètres; celle de Paris à Saint-Pétersbourg est de 2160 kilomètres; de plus, les latitudes de Paris, de Rome et de Saint-Pétersbourg sont, respectivement,*

$$48^\circ 50' 49'',\quad 41^\circ 53' 52'',\quad 50^\circ 56' 31'':$$

quelle est la distance de Rome à Saint-Pétersbourg?

Le problème serait ramené à celui qui précède si l'on pouvait déterminer la *différence de longitude* entre Saint-Pétersbourg et Rome. A cet effet, soit PABC le quadrilatère sphérique ayant pour sommets le pôle nord P et les positions géographiques de Paris, Rome et Saint-Pétersbourg. Dans le triangle APB, on a



$$\alpha = 90^\circ - 48^\circ 50' 49'' = 41^\circ\ 9' 11'',$$
$$\beta = 90^\circ - 41^\circ 53' 52'' = 48^\circ\ 6'\ 8'',$$
$$c = 1100^{km} \qquad = 9^\circ 55' 19'';$$

et, dans le triangle APC,

$$\alpha = \qquad 41^\circ\ 9' 11'',$$
$$\gamma = 90^\circ - 59^\circ 56' 31'' = 30^\circ\ 3' 29'',$$
$$a = 2160^{km} \qquad = 19^\circ 26' 24''.$$

Par conséquent, les angles λ, λ', qui sont les longitudes de Rome et de Saint-Pétersbourg, comptées de Paris, seront donnés par la formule

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

dans laquelle on fera, successivement,

	°	′	″		°	′	″
$a =$	9	55	19	$a =$	19	26	24
$b =$	41	9	11	$b =$	41	9	11
$c =$	48	6	8	$c =$	30	3	29
$2p =$	99	10	38	$2p =$	90	39	4

$$
\begin{array}{ll}
p = 49^\circ 35' 19'' & p = 45^\circ 19' 32'' \\
p - a = 39\ 40\ \ 0 & p - a = 25\ 53\ \ 8 \\
p - b = \ \ 8\ 26\ \ 8 & p - b = \ \ 4\ 10\ 21 \\
p - c = \ \ 1\ 29\ 11 & p - c = 15\ 16\ \ 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\log\sin\ 8^\circ 26' 8'' = \bar{1},166\,4209 + & \log\sin\ 4^\circ 10' 21'' = \bar{2},861\,8898 + \\
\log\sin\ 1\ 29\ 11 = \bar{2},413\,9611 + & \log\sin 15\ 16\ \ 3 = \bar{1},420\,4935 + \\
\log\sin 49\ 35\ 19 = \bar{1},881\,6183 - & \log\sin 45\ 19\ 32 = \bar{1},851\,9387 - \\
\log\sin 39\ 40\ \ 0 = \bar{1},805\,0385 - & \log\sin 25\ 53\ \ 8 = \bar{1},640\,0588 - \\
\hline
\qquad\qquad \bar{3},893\,7252 & \qquad\qquad \bar{2},790\,3858 \\
\frac{1}{2} = \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}A = \bar{2},946\,8626 & \frac{1}{2} = \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}A = \bar{1},395\,1929 \\
\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\lambda = 5^\circ 3' 23'',6, & \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\lambda' = 13^\circ 57' 4'',3, \\
\lambda = 10^\circ 6' 47''. & \lambda' = 27^\circ 54' 9''.
\end{array}
$$

Telles sont les latitudes de Rome et de Saint-Pétersbourg (*), comptées du méridien de Paris. On aura donc, dans le triangle BPC, en conservant les notations habituelles,

$$
\begin{aligned}
A &= \lambda' - \lambda = 17^\circ 47' 22'', \\
b &= \beta \qquad\ = 48\ \ 6\ \ 8, \\
c &= \gamma \qquad\ = 30\ \ 3\ 29.
\end{aligned}
$$

Achevant le calcul comme dans le premier problème, on trouve

$$a = 21^\circ 40' 38'' = 2\,409 \text{ kilomètres.}$$

EXERCICES.

I. Dans tout triangle sphérique équilatéral, on a

$$\cos A = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang} a}.$$

II. Dans tout triangle sphérique rectangle, le carré du sinus de la demi-hypoténuse est égal à la somme des produits des carrés des sinus de chaque demi-côté par le carré du cosinus de l'autre demi-côté.

III. Dans tout triangle sphérique rectangle, les carrés des sinus

(*) Ces valeurs ne sont pas tout à fait exactes.

des côtés sont entre eux comme les sinus des doubles des segments adjacents (déterminés par la hauteur correspondant à l'hypoténuse).

IV. Dans tout triangle sphérique rectangle, le carré du sinus de la hauteur est au produit des sinus des segments déterminés sur l'hypoténuse, comme le *sinus total* est au produit des cosinus de ces mêmes segments.

V. Quelle est la relation qui existe entre les trois faces a, b, c d'un angle trièdre et les angles α, β, γ formés par une même droite avec les trois arêtes?

Réponse :

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha\sin^2 a + 2\cos a\cos\beta\cos\gamma - 2\cos b\cos c\cos\beta\cos\gamma\\ &+ \sin^2\beta\sin^2 b + 2\cos b\cos\gamma\cos\alpha - 2\cos c\cos a\cos\gamma\cos\alpha\\ &+ \sin^2\gamma\sin^2 c + 2\cos c\cos\alpha\cos\beta - 2\cos a\cos b\cos\alpha\cos\beta\\ &+ 2\cos a\cos b\cos c - 2 = 0.\end{aligned}$$

VI. Quelle est la relation qui existe entre les six angles dièdres d'un tétraèdre?

Réponse : Celle qui précède.

VII. Quelles sont les valeurs de l'angle dièdre D dans l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier?

Réponse :

$$D = 109^\circ 28' 16'', \quad D = 116^\circ 33' 54'', \quad D = 138^\circ 11' 35''.$$

VIII. On sait que les trois hauteurs d'un triangle sphérique se coupent en un même point. Quelles sont, en fonction des côtés du triangle, les valeurs des segments déterminés par ce point sur chacune des hauteurs?

IX. En désignant par T la mesure d'un triangle sphérique, par a, b, c les côtés et par p le demi-périmètre, on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{4}T = \sqrt{\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{tang}\frac{p-a}{2}\operatorname{tang}\frac{p-b}{2}\operatorname{tang}\frac{p-c}{2}}.$$

(Théorème de Simon Lhuilier).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE Ier.

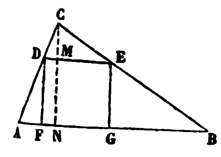
NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Introduction.

1. On peut employer, pour résoudre un problème de Géométrie, deux méthodes principales : la première, la seule qui fût connue des Anciens, pourrait être appelée *méthode géométrique;* l'autre, découverte par le géomètre français Viète, serait convenablement désignée sous le nom de *méthode algébrique*. Pour faire comprendre en quoi consistent ces deux méthodes, nous allons les appliquer à la question suivante :

Inscrire un carré dans un triangle donné ABC.

1°. *Solution géométrique.* — Soit DEFG le carré cherché. Si nous construisons un carré quelconque D'E'F'G' ayant son sommet D' sur AC et sa base F'G' sur AB, les deux carrés, étant semblables et semblablement placés, auront pour centre de similitude le point A; donc les points A, E', E seront en i gne droite. Cette considération fournit la construction connue (*).



2°. *Solution algébrique.* — Représentons par b la base AB du triangle ABC, par h sa hauteur et par x le côté du carré. Pour exprimer que le parallélogramme DEFG est un *losange* inscrit dans le triangle, observons que, dans les deux

(*) *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, page 98.

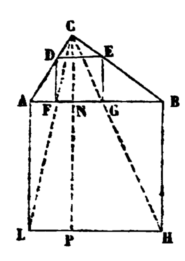
triangles semblables ABC, DEC, les bases sont proportionnelles aux hauteurs. Nous avons donc

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CN}{CM}, \quad \text{ou} \quad \frac{b}{x} = \frac{h}{h-x}.$$

Cette proportion donne, pour la longueur du côté du carré,

$$x = \frac{bh}{b+h}.$$

Ajoutons, pour compléter cette seconde solution, qu'il est facile de conclure, de la valeur de x, une *construction géométrique*.



En effet, x est une quatrième proportionnelle aux droites représentées par $b+h$, h et b. Si donc nous construisons le carré ABLH et que nous menions les droites CL, CH, elles couperont AB en deux points qui seront précisément les sommets F, G du carré cherché; car les deux triangles CLH, CFG, donnent

$$\frac{CP}{CN} = \frac{LH}{FG}, \quad \text{ou} \quad \frac{b+h}{h} = \frac{b}{FG}.$$

2. Sans qu'il soit nécessaire de multiplier les exemples, nous pouvons indiquer dès à présent les traits caractéristiques des deux méthodes :

1°. La méthode géométrique, ou méthode des Anciens, suppose une série de constructions qui s'enchaînent les unes aux autres, sans solution de continuité, au moyen des théorèmes de la Géométrie; elle n'emploie aucun calcul, si ce n'est quelques additions, soustractions et proportions.

2°. Dans la méthode algébrique, ou méthode de Viète, on représente par des lettres les longueurs des lignes, connues ou inconnues, principales ou auxiliaires, qui entrent dans la figure que l'on considère; on cherche, à l'aide des théorèmes de la Géométrie, à établir des équations entre toutes ces lignes, ou plutôt entre les lettres qui les représentent. Lorsque l'on est arrivé à des équations distinctes, en nombre égal à celui des inconnues, *le problème est mis en équation*. Il reste ensuite à *résoudre* ces équations; puis enfin, lorsque cela est possible, à conclure de ces équations, *résolues* ou même non *résolues*, des constructions donnant les

lignes inconnues. Cette troisième partie du problème est appelée *construction des valeurs*.

3. Des trois parties dont se compose la solution algébrique d'un problème, la deuxième, c'est-à-dire la résolution des équations, est exclusivement du ressort de l'Algèbre. Les deux autres parties constituent *l'Application de l'Algèbre à la Géométrie*, que l'on désigne ordinairement, mais peut-être à tort, sous le nom de *Géométrie analytique*, et que l'on pourrait, pour abréger, appeler *Géométrie algébrique*.

4. On ne peut pas donner de règles fixes pour mettre en équation un problème : suivant que celui qui en cherche la solution a plus ou moins d'habitude, plus ou moins de sagacité, il prévoit quelles sont les données et les inconnues qu'il convient d'employer, afin d'arriver au résultat le plus rapidement possible. Au contraire, il existe un petit nombre de procédés réguliers au moyen desquels on peut construire toute expression *linéaire*, rationnelle ou irrationnelle du second degré. Nous les exposerons avec tout le détail nécessaire, après que nous aurons démontré les principes sur lesquels repose l'application de ces procédés.

De l'homogénéité.

5. On sait qu'un polynôme est dit *homogène* quand il a tous ses termes de même *degré*, c'est-à-dire quand les exposants des lettres contenues dans un terme quelconque de ce polynôme ont une somme constante. Par exemple, $a^4 - 3a^2bc + 5b^4$ est homogène et du quatrième degré.

Lorsqu'au lieu d'un polynôme on considère une *fonction* quelconque, la règle indiquée dans la définition précédente peut se trouver en défaut. Elle ne pourrait servir à reconnaître si les fonctions $a + \log a$, $\frac{b}{b^2 - c^2}$, $\frac{\tang a + \tang b}{1 - \tang a \tang b}$ sont ou ne sont pas homogènes. La définition suivante, dans laquelle la première est évidemment comprise, s'applique à tous les cas.

6. *Une fonction* φ *des quantités* $a, b, c, \ldots$, *est homogène lorsque,* λ *étant un nombre quelconque,*

$$\varphi(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \ldots) = \lambda^m \varphi(a, b, c, \ldots):$$

l'exposant m *est le degré d'homogénéité.*

D'après cette définition, les fonctions

$$a^4 - 3a^2bc + 5b^4, \quad \frac{b}{b^2 - c^2}, \quad \sin\frac{a}{b} + \log\frac{a + \sqrt{bc}}{a - \sqrt{bc}}$$

sont homogènes, et leurs degrés sont, respectivement, 4, — 1, 0.

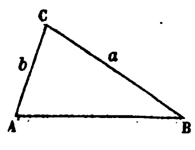
Au contraire, les fonctions $a + \log a$, $\dfrac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}$ ne sont pas homogènes.

7. Théorème. — *Toutes les fois que l'unité de longueur reste arbitraire, chacune des équations du problème doit être homogène.*

En effet, chacune de ces équations est la *traduction* d'un certain théorème de géométrie, exprimant qu'une longueur est égale à la somme de plusieurs longueurs, qu'un rectangle est équivalent à la somme de plusieurs rectangles, etc. A une équation non homogène correspondrait un théorème établissant l'égalité entre des grandeurs d'espèces différentes, ce qui serait absurde.

Par exemple, l'équation $a^3 - 2b^2 + c = 3$, dans laquelle a, b, c représentent les rapports entre des droites et une droite quelconque prise pour unité, exprimerait *que d'un cube on a retranché le double d'un carré,* etc.

8. Il est bien évident que si l'on a pris pour unité de longueur une ligne de la figure, les équations du problème pourront cesser d'être homogènes. Ainsi, supposons que l'on prenne pour unité de longueur le côté AB du triangle ABC et que a, b représentent les rapports de BC et de AC à AB; la relation entre les trois côtés du triangle et le cosinus de l'angle A donnera l'équation



$$a^2 = 1 + b^2 - 2b\cos A,$$

laquelle n'est pas homogène.

9. Si, comme cela arrive dans les questions de Physique mathématique, on est conduit à considérer à la fois des grandeurs de natures différentes, telles que des forces, des vitesses, des temps, des longueurs, etc., il faudra que les équations soient homogènes par rapport à chaque espèce de grandeur. Supposons, par exemple, que a, a', a'', ..., représentent des longueurs, que v, v', v'', ..., représentent des vitesses, que f, f', f'', ..., repré-

sentent des forces, que t, t', t'',..., représentent des temps : l'équation

$$a^2 v f^3 t^2 - 3 a'^2 v' f'^3 t'^2 + 2 a''^2 v'' f''^3 t''^2 = 0$$

sera possible; et, au contraire, l'équation

$$a v^2 f t^2 - 3 a'^2 v' f'^3 t' + 2 a'' v'' f'' t''^2 = 0$$

exprimerait une absurdité.

Si l'on veut s'assurer de ce dernier point, il suffit de mettre l'équation sous la forme

$$vt - 3 \frac{a'}{a} \frac{v'}{v} \frac{f'}{f} \frac{t'}{t} a' f'^2 + 2 \frac{a''}{a} \frac{v''}{v} \frac{f''}{f} \frac{t''}{t} t'' = 0,$$

et alors on voit qu'elle répondrait à l'énoncé suivant :

En multipliant une vitesse par un temps et ajoutant au produit un autre temps, on obtient le même résultat qu'en multipliant une droite par le carré d'une force; ce qui n'a aucun sens (*).

10. Il est bien facile de revenir d'une équation non homogène, obtenue en prenant pour unité une ligne de la figure, à l'équation dans laquelle l'unité serait quelconque. Supposons, en effet, que l'on ait eu à considérer différentes lignes A, B, C,..., et que l'on ait pris A pour unité; soient

$$\frac{B}{A} = b, \quad \frac{C}{A} = c, \quad \frac{D}{A} = d, \ldots;$$

et soit

$$\varphi(b, c, d, \ldots) = 0$$

l'équation du problème, laquelle peut n'être pas homogène.

Pour passer au cas général où l'on prendrait pour unité une droite quelconque L, nommons a', b', c',..., les nombres qui me-

(*) On complète quelquefois l'énoncé du principe de l'homogénéité en disant : l'équation doit être homogène, *ou être la somme de plusieurs équations homogènes*. Ce *complément* nous paraît au moins inutile. Il est est assez visible, en effet, que les équations non homogènes

$$x^2 + y^2 + x^3 + y^3 = a^2 + b^3, \quad x^2 + y^2 - x^3 - y^3 = a^2 - b^3,$$

déduites des équations homogènes

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^3 + y^3 = b^3,$$

ne peuvent pas servir à résoudre ces dernières.

surent alors A, B, C; nous aurons

$$a' = \frac{A}{L}, \quad b' = \frac{B}{L}, \quad c' = \frac{C}{L}, \ldots$$

Ces valeurs, comparées aux précédentes, donnent

$$b = \frac{b'}{a'}, \quad c = \frac{c'}{a'}, \quad d = \frac{d'}{a'}, \ldots$$

Conséquemment, l'équation transformée sera

$$\varphi\left(\frac{b'}{a'}, \frac{c'}{a'}, \frac{d'}{a'}, \ldots\right) = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \ldots\right) = 0,$$

en supposant maintenant que les lettres a, b, d,... représentent les rapports des lignes A, B, C, D,..., à une ligne arbitraire.

Nous voyons que *pour rétablir l'homogénéité dans une équation, il suffit de remplacer chaque longueur par son rapport à la longueur a de la droite qui avait été prise pour unité*. On arrive plus rapidement au même résultat si l'on multiplie les divers termes de l'équation par des puissances convenables de a.

11. Observons que si, comme on le fait quelquefois, on représente par une seule lettre, soit une aire, soit un volume, on devra, pour reconnaître si l'équation est homogène, doubler ou tripler les exposants dont cette lettre pourra être affectée, ou, ce qui vaut mieux, on devra remplacer cette aire ou ce volume par une expression telle que p^2 ou q^3.

12. Le principe de l'homogénéité permet de vérifier à chaque instant, soit les équations du problème, soit les transformations par lesquelles on est obligé de passer pour conclure, de ces équations, les formules définitives. Nous ne saurions trop engager les élèves à en faire constamment l'application.

CHAPITRE II.

CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

13. Supposons que l'inconnue du problème soit une longueur rectiligne représentée par x; supposons, de plus, que l'on ait pu

résoudre les équations du problème, de manière à conclure de ces équations la valeur de x. Cette valeur pourra être rationnelle ou irrationnelle. Dans ce dernier cas, nous admettrons d'abord, pour plus de simplicité, que son expression ne renfermera que des radicaux du second degré, simples ou composés. Enfin, nous supposerons toujours que la formule qui donne x soit homogène : si le contraire arrivait, il serait facile de rétablir l'homogénéité.

Expressions rationnelles.

14. *Monômes ou polynômes entiers.* — 1°. $x = a$. Cette expression signifie que la droite X est égale à l'unité de longueur multipliée par le nombre a, que l'on peut supposer entier : s'il était fractionnaire ou incommensurable, ce cas serait ramené à l'un de ceux qui suivent.

2°. $x = a - b + c$. Les nombres a, b, c, x représentent les longueurs de diverses droites A, B, C, X.

Conséquemment, pour obtenir X, on doit tracer une droite indéfinie MN, sur laquelle, à partir d'un point arbitraire O, on prend, par exemple de *gauche* à *droite*, OP = A ; à partir de ce point P, on prend, de *droite* à *gauche*, PQ = B ; enfin à partir du point Q, et de *gauche* à *droite*, on prend QR = C. La distance OR représente évidemment l'inconnue x, c'est-à-dire qu'elle est égale à X.

15. *Remarque.* — Il est clair que le point Q sera situé à *droite* ou à *gauche* du point O, selon que l'on aura $a > b$ ou $a < b$; c'est-à-dire, selon que la différence $a - b$ sera *positive* ou *négative*. Semblablement, le point R sera à droite ou à gauche du point O, suivant que la valeur de x sera *positive* ou *négative*. Nous voyons donc *que si des distances sont comptées sur une droite à partir d'un point fixe, ces distances doivent être portées dans un sens ou dans le sens opposé, selon que les nombres qui les représentent sont affectés du signe + ou du signe —*. On est généralement convenu de porter de *gauche* à *droite* les distances représentées par des quantités *positives* (*B., Alg.*, 92).

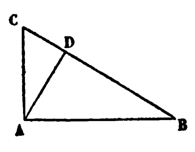
16. *Monômes fractionnaires.* — 1°. $x = \frac{ab}{c}$, $x = \frac{a^2}{b}$. De ces deux valeurs, l'une représente une quatrième proportionnelle aux

longueurs c, a, b; l'autre, une troisième proportionnelle à b et a: elles se construisent donc sans difficulté.

2°. Pour construire $x = \frac{abc}{de}$, on prend une inconnue auxiliaire $y = \frac{ab}{d}$; d'où $x = \frac{cy}{e}$, et la formule se construit par *deux quatrièmes proportionnelles*. Pour $x = \frac{abcd}{efg}$, il y aurait à construire trois quatrièmes proportionnelles; et ainsi de suite.

3°. $x = a\left(\frac{b}{c}\right)^m$. D'après ce qui vient d'être dit, il faudrait, pour obtenir x, construire m quatrièmes proportionnelles. Mais, en s'appuyant sur l'une des propriétés du triangle rectangle, on peut simplifier considérablement la construction.

En effet, l'exposant étant un nombre pair $2p$, soient b', c' deux longueurs telles, que $\frac{b'}{c'} = \left(\frac{b}{c}\right)^p$. Prenons, sur deux droites rectangulaires, $AC = b'$, $AB = c'$; menons l'hypoténuse BC; et, du sommet A, abaissons AD perpendiculaire à BC. Nous aurons



$$\frac{CD}{BD} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{b'}{c'}\right)^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^m.$$

Une quatrième proportionnelle donnera ensuite x.

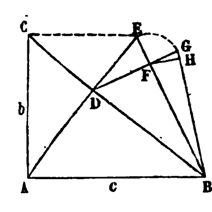
L'exposant m étant un nombre impair $2p+1$, supposons que l'on connaisse deux droites b', c' dont le rapport soit égal à $\left(\frac{b}{c}\right)^{2p}$; nous aurons $x = a\frac{b'}{c'}\frac{b}{c}$; c'est-à-dire que l'inconnue x se construira au moyen de deux quatrièmes proportionnelles.

17. *Application.* $x = a\left(\frac{b}{c}\right)^{13}$. Posons

$$x = a\frac{b}{c}\frac{b'}{c'}, \quad \frac{b'}{c'} = \left(\frac{b}{c}\right)^{12}, \quad \frac{b''}{c''} = \left(\frac{b}{c}\right)^{6}, \quad \frac{b'''}{c'''} = \left(\frac{b}{c}\right)^{3},$$

$$\frac{b^{\text{IV}}}{c^{\text{IV}}} = \left(\frac{b}{c}\right)^{2}.$$

Les constructions s'enchaîneront comme il suit :



On a d'abord $\dfrac{CD}{BD} = \left(\dfrac{b}{c}\right)^2.$

En menant CE parallèle à AB, on a ensuite

$$\frac{DE}{DC} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{ou} \quad \frac{DE}{CD} = \frac{b}{c};$$

donc

$$\frac{DE}{BD} = \left(\frac{b}{c}\right)^3.$$

Abaissant DF perpendiculaire sur BE, on a

$$\frac{EF}{BF} = \left(\frac{b}{c}\right)^6.$$

On porte FE de F en G, on abaisse FH perpendiculaire sur BG ;

d'où

$$\frac{GH}{HB} = \left(\frac{b}{c}\right)^{12}, \text{ etc.}$$

18. *Fractions à termes polynômes.*

1°.

$$x = \frac{ab + cd}{e} = \frac{ab}{e} + \frac{cd}{e}.$$

La droite cherchée est la somme de deux quatrièmes proportionnelles.

2°. $x = \dfrac{abc + def}{gh + kl}.$ Si l'on met ab en facteur dans le numérateur, et gh dans le dénominateur, on aura

$$x = \frac{\left(c + \dfrac{def}{ab}\right) ab}{\left(h + \dfrac{kl}{g}\right) g};$$

puis, en posant $y = \dfrac{def}{ab}$, $z = \dfrac{kl}{g}$:

$$x = \frac{aby}{gz};$$

de sorte que l'on construira y, z et x par une série de quatrièmes proportionnelles.

3°. Soit encore $x = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + a^2}$. On peut écrire $x = b\,\dfrac{\dfrac{a^3}{b^2} + b}{\dfrac{a^2}{b} + b}$.

Si l'on prend deux auxiliaires y et z, telles que $y = \dfrac{a^2}{b}$, $z = \dfrac{a^3}{b^2} = \dfrac{a}{b}y$, on aura

$$x = \frac{b(z+b)}{y+b}.$$

On peut encore observer que

$$x = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 + b^2} = a + b - \frac{(a+b)ab}{a^2 + b^2}.$$

Si donc on remplace a^2 par by, la formule devient

$$x = a + b - \frac{(a+b)a}{y+b},$$

et l'on devra construire seulement une troisième proportionnelle et une quatrième proportionnelle.

Expressions irrationnelles.

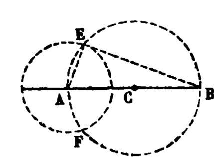
19. Les plus simples sont

$$x = \sqrt{ab}, \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

La première se construit par une moyenne proportionnelle; les deux autres par des triangles rectangles. La dernière peut aussi se construire par une moyenne proportionnelle; car

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

20. *Remarque.* — Ces deux constructions de $\sqrt{a^2 - b^2}$ ne sont pas réellement différentes.



En effet, si sur une droite AB égale à a, prise comme diamètre, on décrit une circonférence; puis que du point A comme centre, avec b pour rayon, on trace l'arc ECF, et que l'on mène AE et BE; on aura

$$\text{BE} = \sqrt{\overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{AE}}^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Mais, d'un autre côté, la droite BE, perpendiculaire au rayon AE, est tangente à la circonférence CED; donc elle est moyenne proportionnelle entre $a+b$ et $a-b$.

21. 1°. $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d^2}$, etc. Il faut évidemment construire des triangles rectangles successifs, attendu que la formule proposée répond à ce problème : *Trouver un carré équivalent à la somme ou à la différence de plusieurs carrés donnés.*

2°. $x=\sqrt{ab+cd-ef}$. On ramène ce problème au précédent, en transformant d'abord chaque rectangle en un carré équivalent.

22. Soit $x=\sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$. En observant que

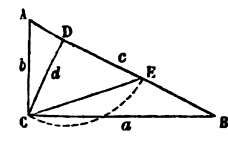
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2,$$

nous aurons
$$x=\sqrt{a^2+b^2-2\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}.$$

On peut faire $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $d=\dfrac{ab}{c}$; ce qui donne

$$x=\sqrt{c^2-2d^2}.$$

Or, si l'on construit un triangle rectangle ACB dans lequel les deux côtés de l'angle droit soient $CB=a$ et $CA=b$, on aura $AB=c$; puis, en abaissant CD perpendiculaire sur l'hypoténuse, $CD=d$; car *dans tout triangle, le rectangle de la base et de la hauteur est constant.*



Prenons maintenant $DE=DC$; menons CE, qui sera égal à $d\sqrt{2}$, et nous n'aurons plus, pour obtenir x, qu'à construire une moyenne proportionnelle entre AB et CE.

23. *Remarque.* — On obtient d'autres constructions de la même formule en écrivant

$$x^2=a^2-b^2+\frac{2b^4}{a^2+b^2},\quad x^2=a^2\frac{a+\dfrac{b^4}{a^3}}{a+\dfrac{b^2}{a}},\quad x^2=a\frac{a^2+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2}{a+\dfrac{b^2}{a}}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de les développer.

24. 1°. Pour construire $x = a\sqrt{m}$, m étant un nombre, on fait passer a sous le radical, ce qui donne

$$x = \sqrt{ma^2} = \sqrt{ma.a};$$

et x est une moyenne proportionnelle entre a et ma.

2°. Soit $x = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Pour construire cette expression, transformons-la d'abord en

$$x = \sqrt{a^2(2-\sqrt{3})} = \sqrt{a(2a-a\sqrt{3})} = \sqrt{a(2a-\sqrt{a.3a})}.$$

Posons maintenant $y = \sqrt{a.3a}$, $z = 2a - y$; et nous aurons

$$x = \sqrt{a(2a-z)}.$$

25. Soit $x = a\sqrt[4]{3}$. On peut écrire $x = \sqrt{a.a\sqrt{3}} = \sqrt{a\sqrt{3\,a.a}}$; et on obtiendra x par deux moyennes proportionnelles.

De même, pour $x = \sqrt[4]{\dfrac{a^7 - 2a^4b^3 + b^7}{a^3 + b^3}}$, en prenant $b^3 = a^2y$, $by^2 = a^2z$, on aura

$$x = \sqrt[4]{a^4\frac{a-2y+z}{a+y}} = \sqrt{a\sqrt{a^2\frac{a-2y+z}{a+y}}}.$$

On obtiendra y et z en résolvant graphiquement les deux proportions $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{b}{y}$, $\dfrac{a^2}{y^2} = \dfrac{b}{z}$. Et si l'on pose $t = a\sqrt{\dfrac{a-2y+z}{a+y}}$, on aura

$$\frac{a+y}{a-2y+z} = \frac{a^2}{t^2};$$

d'où enfin $$x = \sqrt{at}.$$

26. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des expressions rationnelles, ou des expressions irrationnelles renfermant seulement des radicaux carrés, simples ou composés. Ces expressions sont les seules dont nous ayons à nous occuper. En effet, on peut démontrer le théorème suivant :

Toutes les fois qu'un problème de géométrie sera résoluble au moyen de la règle et du compas, les valeurs des inconnues pourront s'exprimer, soit rationnellement, soit au moyen d'un nombre limité de radicaux carrés, simples ou composés.

Il résulte, de ce théorème, que tout problème qui conduit à une équation *irréductible* dont le degré n'est pas une puissance de 2, ne peut être résolu avec la ligne droite et le cercle. Ainsi, *la duplication du cube,* problème célèbre chez les anciens, et dont la solution dépend évidemment de l'équation $x^3 - 2a^3 = 0$, ne peut être résolue par la géométrie élémentaire. Il en est de même, en général, pour la question des *deux moyennes proportionnelles* et pour celle de la *trisection de l'angle.* A plus forte raison ne peut-on, au moyen de la règle et du compas, construire

$$x = a\sqrt[3]{5},\quad x = a\sqrt[3]{5-\sqrt{2}},\quad x = \sqrt[5]{a^2 b^2 \sqrt[3]{a^2 b}},\ \text{etc. } (*).$$

Construction des racines des équations.

27. Il n'est pas nécessaire, pour que l'on puisse construire les racines réelles d'une équation, que cette équation soit résolue. Nous verrons plus tard quels sont les procédés que fournit la théorie des courbes pour la résolution graphique des équations quelconques à une seule inconnue. Quant à présent, bornons-nous à considérer l'équation du second degré et l'équation bicarrée.

28. Soit d'abord l'équation $x^2 + px + q = 0$. En supposant toujours que x représente une longueur, il faut, pour l'homogénéité, que p et q, abstraction faite de leurs signes, soient une longueur a et une aire b^2. Nous devons donc, en ayant égard aux différentes combinaisons de signes, considérer les quatre équations suivantes :

$$x^2 - ax + b^2 = 0, \quad (1)$$

$$x^2 + ax + b^2 = 0, \quad (2)$$

$$x^2 - ax - b^2 = 0, \quad (3)$$

$$x^2 + ax - b^2 = 0. \quad (4)$$

Si l'on remplace x par $-x$, les équations (2) et (4) se changent

(*) Cependant, si dans la dernière formule on supposait $b = a\alpha^{15}$, α étant commensurable, on aurait $x = a\alpha^7$. Ce résultat particulier n'infirme en rien les raisonnements qui précèdent, parce que, dans la théorie des radicaux, comme dans celle des fonctions, on doit toujours supposer que la quantité dont on s'occupe a été mise sous la forme la plus simple possible.

dans les équations (1) et (3). Donc l'équation générale du second degré peut toujours se ramener à l'une ou à l'autre des équations (1) et (3), lesquelles peuvent être écrites ainsi :

$$x(a-x)=b^2, \quad (5) \qquad x(x-a)=b^2. \quad (6)$$

1°. Dans l'équation (5), la somme des facteurs est a, leur produit est b^2; par conséquent, la construction des racines de l'équation (5) revient à la résolution de ce problème connu :

Construire un rectangle équivalent à un carré donné b^2, connaissant la somme a des côtés adjacents.

Si les racines de l'équation (5) sont réelles, elles sont positives, et leurs valeurs sont représentées par les deux côtés du rectangle, attendu que l'équation (5) ne change pas quand on y remplace x par $a-x$.

2°. Dans l'équation (6), le produit des facteurs est b^2, et *l'excès* du premier sur le second est a. Conséquemment, *la racine positive de cette équation* (6) sera représentée par *le plus grand côté du rectangle équivalent au carré donné b^2, et dans lequel la différence des deux côtés adjacents est a* (*).

Quant à la racine négative de cette même équation (6), je dis que sa valeur absolue sera représentée par le plus petit côté du même rectangle. En effet, d'après ce qui précède, cette valeur est donnée par la racine positive de l'équation (4), ou, ce qui est la même chose, par la racine positive de

$$y(y+a)=b^2.$$

Or, cette équation exprime évidemment qu'un rectangle dont l'un des côtés est y, et dont l'autre est $y+a$, équivaut au carré b^2; y est donc le plus petit côté du premier rectangle.

29. Si nous avions résolu l'équation (3), nous aurions trouvé

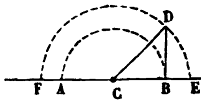
$$x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}.$$

Prenons, sur une droite indéfinie, $AC=CB=\frac{1}{2}a$; élevons la perpendiculaire $BD=b$, et prenons $CE=CF=CD$.

Il est évident que la première valeur de x est représentée par

(*) *Voyez*, pour ces deux problèmes, mes *Éléments de Géométrie*.

AE, et que la seconde, prise positivement, est représentée par *la distance* AF. En même temps, à l'*opposition de signes* des deux valeurs de x, correspond l'*opposition de sens* des deux distances AE, AF. Sous ce point de vue, la construction *modifiée* est préférable à la construction indiquée tout à l'heure.



30. Parmi les équations du quatrième degré, bicarrées, nous prendrons seulement, pour abréger,

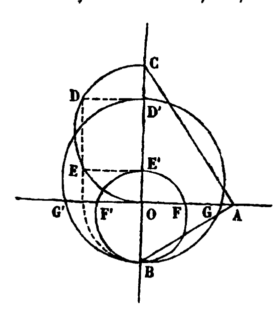
$$x^4 - a^2 x^2 + b^4 = 0.$$

Posons $x^2 = by$; nous aurons

$$y^2 - \frac{a^2}{b} y + b^2 = 0, \quad \text{ou} \quad y\left(\frac{a^2}{b} - y\right) = b^2.$$

Conséquemment, après avoir construit les racines y' et y'' de cette équation du second degré, nous devrons, pour avoir les valeurs de x, chercher les moyennes proportionnelles entre b et chacune de ses racines. De là, résulte la construction suivante :

Sur deux droites perpendiculaires entre elles, prenez OA $= a$, OB $= b$; menez BA; et, à son extrémité, élevez la perpendiculaire AC. Sur OC comme diamètre, décrivez une demi-circonférence. Menez, parallèlement à BC, et à une distance b de cette ligne, la droite DE. Abaissez DD′ et EE′ perpendiculaires sur BC; puis, sur BE′ et BD′, comme diamètres, décrivez deux circonférences. Soient F, F′, G, G′, les points où elles coupent la droite OA : les distances OE, OG, OF′, OG′ représenteront, en grandeur et en signe, les quatre racines de l'équation proposée.



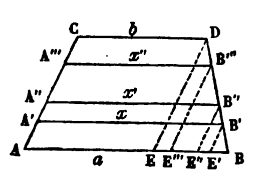
CHAPITRE III.

PROBLÈMES DÉTERMINÉS.

31. Après avoir indiqué quelles sont les règles à suivre pour construire les valeurs des inconnues, revenons sur nos pas, et faisons, sur quelques problèmes convenablement choisis, l'application des préceptes indiqués plus haut (2 et 3). Le premier de ces problèmes, dont la mise en équation ne présente aucune difficulté, sera seulement remarquable par la construction à laquelle il conduit; les autres nous donneront lieu de développer diverses remarques, soit sur *l'interprétation des valeurs négatives*, soit sur l'importance du *choix des inconnues*, soit enfin sur ce qu'on appelle la *discussion des problèmes*.

32. PROBLÈME I. — *Partager un trapèze en parties proportionnelles à des droites données, par des parallèles aux bases.*

Soient, dans le trapèze donné ABCD, A′B′, A″B″,..., les droites cherchées, lesquelles doivent partager la figure en différentes parties proportionnelles à des longueurs données m, m', m'',.... Représentons par a, b et h les deux bases et la hauteur du trapèze. Soient ensuite x, x', x'',..., les longueurs des droites A′B′, A″B″,..., et y, y', y'',..., les hauteurs des trapèzes partiels.



Nous aurons d'abord, en posant $m + m' + m'' + \ldots = s$,

$$\left.\begin{aligned} (a+x)y &= \frac{m}{s}(a+b)h, \\ (a+x')(y+y') &= \frac{m+m'}{s}(a+b)h, \\ (a+x'')(y+y'+y'') &= \frac{m+m'+m''}{s}(a+b)h, \\ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Exprimons maintenant que les points B′, B″, B‴,..., sont sur

le côté BD du trapèze. Pour cela, menons, par ces divers points et par le sommet D, des parallèles à AC : les triangles BB'E', B B''E'',..., semblables au triangle BDE, nous donneront

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a-x}{y}=\dfrac{a-b}{h},\\[2mm]\dfrac{a-x'}{y+y'}=\dfrac{a-b}{h},\\[2mm]\dfrac{a-x''}{y+y'+y''}=\dfrac{a-b}{h},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(2)$$

Il est évident que les équations (1) et (2) sont en nombre égal à celui des inconnues x, x', x'',..., y, y', y'',.... Par conséquent, *le problème proposé est mis en équation.*

33. Pour trouver les valeurs de x, de x', de x'',..., éliminons les inconnues y, y', y'',.... Il suffit, pour effectuer cette élimination, de multiplier la première des équations (1) par la première des équations (2), puis la deuxième des équations (1) par la deuxième des équations (2); et ainsi de suite. On obtient immédiatement

$$a^2-x^2=\frac{m}{s}(a^2-b^2),$$

$$a^2-x'^2=\frac{m+m'}{s}(a^2-b^2),$$

$$a^2-x''^2=\frac{m+m'+m''}{s}(a^2-b^2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et il ne reste plus qu'à construire les valeurs des quantités x, x', x'',....

34. A cet effet, observons que, dans ces diverses formules, a^2-b^2, a^2-x^2, $a^2-x'^2$,..., représentent des carrés, dont le premier est connu. Par conséquent, ces formules expriment que les carrés inconnus sont au carré connu dans des rapports donnés. De cette observation résulte la construction suivante, qui ne diffère pas de celle que l'on obtient par des considérations géométriques :

Prenez, sur la demi-circonférence AB, *la corde* AD'' $= b$; *projetez le point* D'' *en* D''', *etc.* (*).

(*) *Éléments de Géométrie*, page 107.

35. Problème II. — *Partager une droite en moyenne et extrême raison* (*).

On sait que cet énoncé revient à celui-ci : *Partager une droite en deux segments additifs, de manière que l'un d'eux soit moyen proportionnel entre la droite entière et l'autre segment.* Et il est manifeste que ce dernier segment est le plus petit des deux.

Soient donc a la droite donnée et x le plus grand segment. L'équation du problème est

$$x^2 = a(a-x), \quad (1)$$

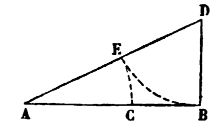
ou

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Cette équation du second degré, ayant son dernier terme négatif, a une racine positive et une racine négative : la racine positive, qui seule peut convenir à la question, a pour valeur

$$x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

Que l'on emploie cette formule, ou que l'on prenne l'équation (1) non résolue, on retombe toujours sur la construction connue, laquelle, en supposant que $AB = a$ soit la droite donnée, donne AC pour le plus grand segment.



36. Nous venons de dire que la racine positive convient seule à la question proposée. En effet, il est évident à priori : 1° que le problème proposé est possible; 2° que le point inconnu C doit être situé sur la droite donnée et non sur son prolongement; 3° que ce point C ne peut occuper qu'une seule position sur cette droite, pourvu que le segment *moyen proportionnel* soit celui qui aboutit à l'extrémité A; ce que l'on peut toujours supposer.

Cependant, comme l'équation qui est la traduction de l'énoncé admet une racine négative

$$x'' = -\frac{a}{2}(1+\sqrt{5}),$$

(*) Nous avons déjà donné, dans la *Trigonométrie*, la solution *géométrique* du problème. Relativement à cette locution : *moyenne et extrême raison*, le lecteur pourra consulter une Note de M. Vincent (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome III, page 1).

nous pouvons nous demander si cette seconde racine, prise *positivement,* ne répondrait pas à un problème ayant une certaine analogie avec le problème proposé. Pour essayer de découvrir l'énoncé de ce nouveau problème, agissons comme on le fait pour les problèmes purement algébriques (*B.*, *Alg.*, 90), c'est-à-dire changeons, dans l'équation (1), x en $-y$; nous obtiendrons ainsi

$$y^2 = a(a + y). \quad (2)$$

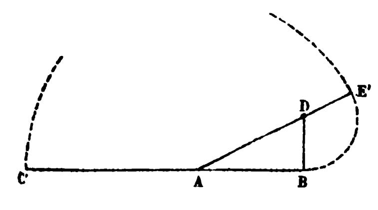
Or, cette équation (2) est évidemment celle que l'on trouverait, si l'on se proposait la question suivante : *Partager une droite en deux segments soustractifs, de manière que l'un d'eux soit moyen proportionnel entre la droite entière et l'autre segment.*

Le segment moyen proportionnel, qui est évidemment plus petit que l'autre, a pour valeur la racine positive de l'équation (2), savoir :

$$y' = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5});$$

et cette valeur est égale à $-x''$.

37. Soit toujours $AB = a$ la droite donnée; admettons encore que le segment *moyen proportionnel* soit celui qui doit aboutir à l'extrémité A de cette droite. En prenant, comme tout à l'heure, la perpendiculaire $BD = \frac{1}{2}a$, menant AD et prolongeant



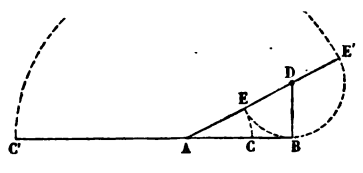
cette droite d'une quantité $DE' = DB = \frac{1}{2}a$, on obtiendra AE', qui représente y' en grandeur. D'ailleurs le segment égal à AE' et aboutissant au point A, est moindre que le segment aboutissant au point B; donc AE' doit être portée à la gauche du point A, de A en C'. Les deux segments soustractifs cherchés sont donc C'A et C'B.

38. Nous avons reconnu que la racine négative de l'équation (1), prise positivement, satisfait à un problème dont l'énoncé est analogue à celui du problème primitif; de plus, nous avons construit l'inconnue de ce nouveau problème. Nous pouvons maintenant,

pour aller plus loin, renfermer les énoncés des deux problèmes ci-dessus dans l'énoncé suivant :

Partager une droite en deux segments, de manière que l'un d'eux soit moyen proportionnel entre la droite entière et l'autre segment. Cet énoncé n'exige plus, comme on voit, que le point de division cherché soit situé entre les extrémités de la droite donnée.

39. De même que nous avons réuni, dans un énoncé général, les questions auxquelles répondaient les racines positives des équations (1) et (2), nous pouvons réunir, sur une même figure, les constructions de ces deux racines. Nous obtenons ainsi C et C′ pour les deux points qui satisfont à l'énoncé généralisé.



40. Remarquons maintenant que AC représentant la racine positive de l'équation (1), la racine négative de cette équation sera représentée par — AC′. De même, AC′ représentant la racine positive de l'équation (2), — AC représentera la racine négative de cette dernière équation. Ainsi, à *l'opposition de signes* entre les racines d'une même équation, correspond encore ici une *opposition de sens* entre les distances qui représentent ces racines. Enfin, si, pour traduire algébriquement l'énoncé du problème général, nous avions supposé le point cherché placé à droite de A, l'existence d'une racine négative dans l'équation de ce problème aurait suffi pour nous avertir qu'indépendamment du point C satisfaisant à l'énoncé, un autre point C′, situé à gauche du point A, y satisfait encore. De plus, la valeur absolue de cette racine négative est représentée par la distance C′A.

41. Les remarques auxquelles vient de donner lieu la question très-simple du *partage d'une droite en moyenne et extrême raison,* se reproduisent dans la plupart des problèmes de Géométrie que l'on résout à l'aide de l'Algèbre; et, sauf un petit nombre de cas dans lesquels l'interprétation des solutions négatives devient épineuse, parce que les problèmes auxquels correspondent ces solutions n'ont plus qu'une liaison éloignée avec la question primitive, il arrive que : 1° *les racines négatives, ou plus généralement*

toutes les racines réelles de l'équation qui donne l'inconnue d'un problème, prises avec leurs valeurs absolues, représentent les inconnues d'autant de problèmes particuliers, ayant une certaine analogie avec le problème proposé, et pouvant, avec celui-ci, être réunis dans un énoncé général; 2° si l'on a pris pour inconnue une distance comptée sur une droite, à partir d'un point fixe, les valeurs négatives de cette inconnue doivent être portées dans un sens opposé à celui que l'on avait d'abord attribué à cette inconnue.

On doit bien observer que ces deux propositions ne sont pas des théorèmes : seulement elles se vérifient presque continuellement. La seconde n'est que l'extension de ce qui a été dit plus haut (15).

42. Au lieu de prendre AC pour inconnue, cherchons la distance du point C à un point O tel, que $AO = b$. En supposant que le point C tombe entre O et B, représentons OC par x; nous aurons

A O C B

$$(b + x)^2 = a(a - b + x). \quad (3)$$

Cette équation devient, étant développée,

$$x^2 - (2b + a)x + b^2 + ab - a^2 = 0.$$

Lorsque le rapport $\frac{b}{a}$ est moindre que $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, le trinôme $b^2 + ab - a^2$ est négatif, et l'équation (3) *a une racine positive et une racine négative;* mais, si b est plus grand que $\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$, l'équation a *deux racines négatives*. Cette circonstance indique évidemment que le point C, au lieu d'être situé entre O et B, comme on l'avait supposé, se trouve entre les points A et O. Ainsi, *il peut arriver que la valeur de l'inconnue d'un problème soit négative, et que cependant l'énoncé n'exige aucune modification.* Dans ce cas, la valeur négative indique seulement que, dans la mise en équation du problème, on a attribué à la distance inconnue un sens contraire à celui qu'elle a effectivement.

43. Prenons, pour fixer les idées, $AO = b = \frac{3}{5}a$; supposons le

point inconnu C situé entre A et O, et représentons CO par x; nous aurons

$$\left(\frac{3}{5}a - x\right)^2 = a\left(\frac{2}{5}a + x\right),$$

ou

$$x^2 - \frac{11}{5}ax - \frac{1}{25}a^2 = 0.$$

La racine positive de cette équation, étant plus grande que a, ne saurait convenir à la question : l'existence d'une racine négative prouve donc que nous avons eu tort de supposer le point C placé à gauche du point O. Ainsi, *il peut encore arriver que les racines négatives d'une équation satisfassent au problème tel qu'il a été énoncé, et que les racines positives satisfassent à l'énoncé modifié.*

44. Admettons enfin que, par inadvertance, on ait supposé le point C à la droite du point B. En représentant par x la distance AC, on a

$$x^2 = a(x - a),$$

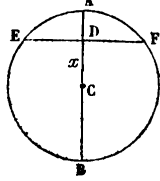
d'où

$$x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{-3}\right).$$

On trouve donc pour l'inconnue x deux valeurs imaginaires, ce qui tient évidemment, non pas à une absurdité dans l'énoncé, mais à l'hypothèse fausse que l'on a faite. Ainsi, *une valeur imaginaire, trouvée pour une inconnue, n'indique pas toujours que le problème proposé soit impossible.*

45. Problème III. — *Couper une sphère par un plan, de manière que les deux segments soient entre eux dans un rapport donné.*

Soit R le rayon de la sphère donnée. Représentons par x la distance CD du centre au plan sécant; nous aurons, pour l'expression du volume du plus petit segment AEDF,



$$\frac{1}{2}\pi(R - x)(R^2 - x^2) + \frac{1}{6}\pi(R - x)^3,$$

et pour celle du plus grand segment BEDF,

$$\frac{1}{2}\pi(R + x)(R^2 - x^3) + \frac{1}{6}\pi(R + x)^3.$$

Si donc m est le rapport du plus petit segment au plus grand, l'équation du problème sera

$$\frac{(R - x)^2 (2R + x)}{(R + x)^2 (2R - x)} = m,$$

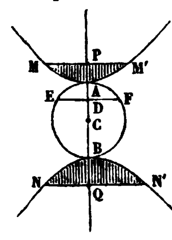
ou, en développant,

$$x^3 - 3R^2 x + 2\frac{1-m}{1+m}R^3 = 0. \quad (1)$$

Cette équation a ses trois racines réelles; car la condition $4p^3 + 27q^2 < 0$ (*Alg.*, 320) devient ici $-1 + \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 < 0$; ce qui est exact, m étant une fraction proprement dite.

L'équation (1) ayant ses trois racines réelles, et son premier membre présentant deux variations de signes, deux de ces racines sont positives et la troisième est négative. De plus, si l'on remplace successivement x par 0 et par R dans la fonction qui forme le premier membre, on trouve que cette fonction est positive pour $x = 0$ et négative pour $x = R$. Donc, des deux racines positives, l'une est plus petite et l'autre plus grande que R. Enfin, comme la somme des trois racines est nulle, la valeur absolue de la racine négative est supérieure à R.

46. Si l'on imagine que le plan EF, d'abord supposé tangent à la sphère, se rapproche du centre, on reconnaîtra que le problème proposé admet toujours une seule solution, à laquelle répond la plus petite racine positive de l'équation (1). Les deux autres racines de cette équation ne peuvent, en aucune manière, satisfaire au problème proposé. Il y a donc lieu de croire qu'elles résolvent un problème analogue à celui-là, mais relatif à un corps différent de la sphère.



Supposons, en effet, qu'après avoir décrit la circonférence ABEF, dans laquelle la perpendiculaire ED, abaissée d'un point de la courbe sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segments *additifs* AD, BD, on considère le lieu des points tels, que la perpendiculaire MP, abaissée de chacun d'eux sur le diamètre AB, soit moyenne pro-

portionnelle entre les deux segments *soustractifs* AP, BP de ce diamètre : ce lieu, qui se compose de deux parties ou *branches* séparées MBM′, NAN′, est appelé *hyperbole*.

Si la figure PAM, QBN tourne autour de l'axe PQ, elle engendre un *hyperboloïde de révolution*. Quoique ce corps ait une forme bien différente de celle de la sphère, il est évident, par la manière dont il est engendré, qu'il a de grandes analogies avec celle-ci.

Par exemple, si l'on considère, dans la sphère et dans l'hyperboloïde, deux segments EBF, MBM′ ayant pour hauteur h, le volume du premier peut être représenté par $\frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$, et le volume du second par $\frac{1}{3}\pi h^2(3R + h)$ (*).

47. Cela posé, proposons-nous de couper l'hyperboloïde par deux plans MM′, NN′, de manière que les deux segments MBM′, NAN′ soient entre eux dans le rapport m, et que leur somme soit équivalente à la sphère AB. x' et x'' représentant les distances CP, CQ, les équations qui déterminent ces deux quantités seront, d'après les formules rapportées tout à l'heure,

$$\frac{\frac{1}{3}\pi(x'-R)^2(x'+2R)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{1+m},$$

$$\frac{\frac{1}{3}\pi(x''-R)^2(x''+2R)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{1+m};$$

ou
$$x'^3 - 3R^2x' + 2\frac{1-m}{1+m}R^3 = 0, \quad (2)$$

et
$$x''^3 - 3R^2x'' - 2\frac{1-m}{1+m}R^3 = 0. \quad (3)$$

Or, ces deux dernières équations se changent dans l'équation (1), si l'on remplace x' par x et x'' par $-x$. Donc les deux dernières racines de l'équation (1) déterminent les segments hyperboliques MBM′ et NAN′ (**).

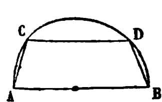
(*) *Voyez* les Traités de Calcul intégral.

(**) Cette élégante interprétation des trois racines de l'équation (1) est due à M. Poinsot. (*Œuvres d'Archimède*, traduction de Peyrard.)

EXERCICES.

I. Couper une sphère par un plan, de manière que le segment obtenu ait, avec le secteur sphérique correspondant, un rapport donné.

II. D'un point pris sur la surface d'une sphère donnée, comme centre, décrire une surface sphérique telle, que le corps compris entre les deux surfaces ait un volume donné.



III. Dans un demi-cercle donné, inscrire un trapèze ABCD, de manière que ce trapèze, tournant autour du diamètre AB, engendre un corps ayant un volume donné.

IV. Inscrire dans un angle donné une droite de longueur donnée, de manière que le triangle résultant soit équivalent à un carré donné.

V. Construire un triangle, connaissant les longueurs des trois bissectrices intérieures.

VI. Étant donné un point extérieur à un cercle donné, mener une sécante telle, que la somme des carrés des segments de cette droite soit équivalente à un carré donné.

VII. Inscrire, à un demi-cercle donné, un trapèze équivalent à un carré donné.

VIII. Inscrire, à un cercle donné, un triangle isocèle équivalent à un carré donné.

IX. Pourquoi les deux derniers problèmes dépendent-ils de la même équation?

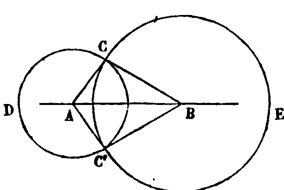
CHAPITRE IV.

THÉORIE DES COORDONNÉES.

Préliminaires.

48. En général, la position d'un point sur un plan est déterminée par l'intersection de deux lignes telles, que tous les points de la première satisfont à une première condition, tandis que tous les points de la seconde satisfont à une autre condition.

Par exemple, pour construire un triangle, connaissant ses trois côtés a, b, c; après avoir pris une droite $AB = c$, on décrit, des points A et B comme centres, avec b et a pour rayons, des circonférences se coupant en C et C′: tous les points de la première circonférence sont à la distance b du point A, tous les points de la seconde sont à la distance c du point B, et il est clair que les sommets C, C′ des deux triangles satisfaisant à la question, sont déterminés de position.



49. Lorsque tous les points d'une ligne satisfont ainsi à une même condition, on dit que cette ligne est le *lieu géométrique* de ces points. Ainsi, la circonférence CDC′ est le lieu géométrique des points dont la distance au point A est égale à b; etc.

50. Si l'on désigne par u et v les distances d'un point quelconque aux points fixes ou *pôles* A et B, le point C sera déterminé si l'on donne les valeurs de u et de v relatives à ce point, c'est-à-dire si l'on écrit $u = a$, $v = b$. Ainsi, un point peut être *représenté algébriquement* par l'ensemble de deux équations. De plus, chacune de ces équations représente un lieu géométrique; car l'équation $u = a$ appartient à tous les points de la circonférence CDC′.

Enfin, quels que soient les lieux géométriques dont on fasse usage pour fixer la position d'un point, on appelle *coordonnées* de ce point les quantités qui déterminent les deux lieux : dans l'exemple précédent, a et b sont les coordonnées du point C (*).

Coordonnées rectilignes.

51. Les lieux géométriques les plus simples, propres à déterminer la position d'un point M, sont deux droites BM, AM parallèles à deux axes fixes Ox, Oy, se coupant en un point O. En effet, étant données les distances a, b du point inconnu aux deux axes (la distance à chaque axe étant comptée parallèlement à l'au-

(*) On peut aller plus loin, et, ainsi que l'ont proposé MM. Sonnet et Frontera, désigner sous le nom de *coordonnées, des grandeurs variables propres à déterminer la position d'un point.*

tre axe), il suffit de prendre $OA = a$, $OB = b$, et de tracer AA', BB' : ces droites se coupent en un seul point M qui est le point cherché.

Les distances a, b, *coordonnées rectilignes* du point M, sont désignées, respectivement, sous les noms d'*abscisse* et d'*ordonnée* de ce point. Les deux droites Ox et Oy sont les *axes de coordonnées*.

Équations d'un point.

52. Si l'on convient de représenter généralement par x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque, le point particulier M sera représenté par le système des équations

$$x = a, \quad y = b.$$

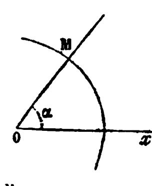
On doit encore remarquer ici que chacune de ces équations représente l'un des deux lieux géométriques dont l'intersection donne le point M. En effet, l'équation $x = a$ représente une parallèle à l'axe Oy; $y = b$ représente de même une parallèle à l'axe Ox.

Coordonnées polaires.

53. D'après la définition donnée ci-dessus (50), il y a autant de systèmes de coordonnées que de moyens de déterminer un point par l'intersection de deux lieux géométriques.

Le système dont nous venons de parler en dernier lieu est le *système rectiligne*; l'autre était le *système bipolaire*.

54. Soit une droite fixe Ox passant par un point fixe ou pôle O.



Un point quelconque pourra être déterminé par l'intersection d'une droite menée du pôle et d'une circonférence ayant ce pôle pour centre.

Cette manière de déterminer la position d'un point constitue un *système de coordonnées polaires :* OM est le *rayon vecteur;* et l'angle MOx, qui détermine la direction de ce rayon, est l'*amplitude*.

Si l'on désigne par ω et u les coordonnées polaires d'un point quelconque, le point particulier M sera déterminé par les équa-

ou $\quad u = +\sqrt{(c+x)^2 + y^2}, \quad v = +\sqrt{(c-x)^2+y^2}.$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (1) donne

$$+\sqrt{(c+x)^2+y^2} + \sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a;$$

d'où, par des simplifications successives,

$$(c+x)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2+y^2} + (c-x)^2,$$

$$a\sqrt{(c-x)^2+y^2} = a^2 - cx,$$

$$a^2y^2 + (a^2-c^2)x^2 = a^2(a^2-c^2); \quad (2)$$

ou enfin, parce que la constante $2a$ doit être plus grande que $2c$,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \ (*). \quad (3)$$

Hyperbole.

63. *L'hyperbole est une courbe telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes est une constante.*

Un calcul semblable au précédent donne, en posant $a^2 - c^2 = -b^2$ (parce que l'on doit avoir $2a < 2c$),

$$a^2y^2 - b^2a^2 = -a^2b^2.$$

(*) Pour éliminer u et v entre les équations

$$u + v = 2a, \quad (1)$$

$$u^2 = (c+x)^2 + y^2, \quad (4) \qquad v^2 = (c-x)^2 + y^2, \quad (5)$$

on peut conclure d'abord, des deux dernières,

$$u^2 + v^2 = 2(c^2 + x^2 + y^2), \quad (6) \qquad (u+v)(u-v) = 4cx; \quad (7)$$

puis, des équations (1) et (7),

$$u = a + \frac{cx}{a}, \quad v = a - \frac{cx}{a}.$$

Ces valeurs, sur lesquelles nous reviendrons plus tard, donnent, par la substitution dans l'équation (6),

$$a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = c^2 + x^2 + y^2,$$

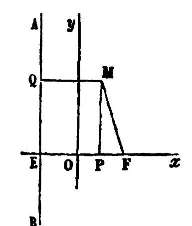
ou

$$a^2y^2 + (a^2-c^2)x^2 = a^2(a^2-c^2);$$

comme ci-dessus.

Parabole.

64. *La parabole est une courbe telle, que chacun de ses points est également distant d'un point fixe* F *et d'une droite fixe* AB.



En représentant par u le rayon vecteur FM et par p la perpendiculaire MQ, on a, pour *équation naturelle* de la parabole,

$$p = u.$$

Cette équation permettrait de construire la courbe par points, au moyen de parallèles à la *directrice* AB et de circonférences ayant pour centre le *foyer* F. Mais ici, comme dans les exemples précédents et dans ceux qui suivent, nous nous proposons de remplacer les coordonnées *naturelles* par des coordonnées *rectilignes :* en d'autres termes, nous voulons effectuer une *transformation de coordonnées*.

Prenons donc, pour axe des abscisses, la perpendiculaire FE à AB, et pour origine le milieu O de EF; nous aurons

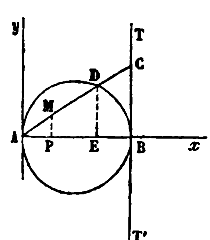
$$p = \text{MC} = \text{EO} + \text{OP} = a + x, \quad u = \sqrt{y^2 + (a - x)^2};$$

d'où

$$y^2 = 4ax.$$

Cissoïde.

65. Par l'extrémité A du diamètre AB, on mène une transversale quelconque ADC qui rencontre en C la tangente TT' au point B. On prend AM = CD. Le lieu du point M est une courbe appelée *cissoïde de Dioclès*.



Prenons le point A pour origine, AB pour axe des x; abaissons DE perpendiculaire sur AB et observons que AM = CD donne AP = BE. Nous aurons, à cause des triangles semblables AMP, ADE,

$$\frac{\text{MP}}{\text{DE}} = \frac{\text{AP}}{\text{AE}};$$

puis, en représentant par a le rayon du cercle,

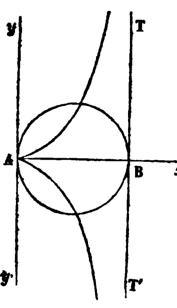
$$\text{DE} = \sqrt{\text{AE}.\text{BE}} = \sqrt{(2a - x).x};$$

donc
$$\frac{y}{\sqrt{(2a-x)x}} = \frac{x}{2a-x};$$

ou, en supprimant le facteur $\sqrt{2a-x}$, qui, égalé à zéro, *représenterait lá tangente* TT',

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

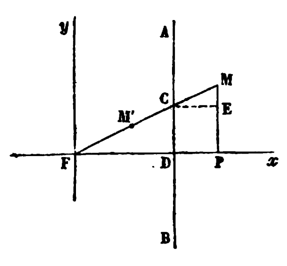
A l'inspection de cette valeur de y on conclut : 1° que AB est un axe de symétrie; 2° que la courbe est comprise tout entière entre yy' et TT'; 3° qu'elle passe à l'origine A; 4° qu'elle s'approche indéfiniment de TT' sans jamais l'atteindre. Toutes ces conséquences, qui résultaient aussi de la définition de la courbe, lui assignent la forme indiquée ci-contre.



66. Nous avons supprimé, comme *solution étrangère*, l'équation $2a - x = 0$. Il est facile de voir à quoi tient la présence de cette solution. En effet, la transversale AC coupe la circonférence AB, non-seulement au point D, mais encore à l'origine A. Si donc on porte, à partir de A, le segment CA, on obtiendra le point C, dont le lieu géométrique est évidemment TT'.

Conchoïde.

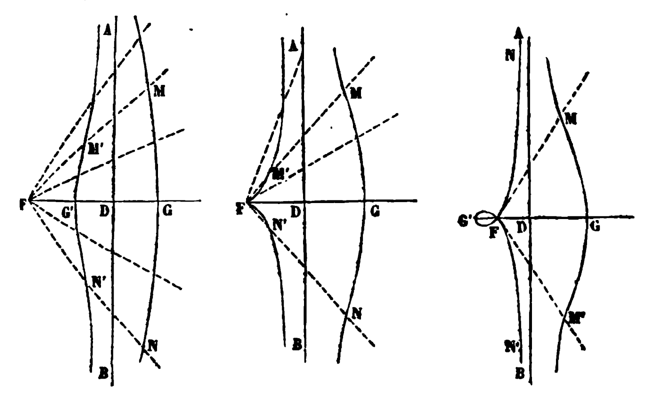
67. D'un point fixe F on mène une transversale quelconque FC, sur laquelle on prend, à partir d'une droite fixe AB, CM = CM' = b. Le lieu des points M ou M' est une courbe appelée *conchoïde de Nicomède*.



En prenant pour origine le point F et pour axe des abscisses FD perpendiculaire à AB, et en représentant par a la distance FD, on trouve, au moyen des triangles semblables MFP, MCE,

$$y = \pm\frac{x}{x-a}\sqrt{b^2-(x-a)^2}.$$

Suivant que b est inférieur, égal ou supérieur à a, la courbe a l'une des trois formes suivantes :



Ellipse de Cassini.

68. Cette courbe est le lieu des points tels, que le rectangle des distances de chacun d'eux à deux points fixes F, F', est équivalent à un carré donné m^2.

L'équation naturelle est

$$uv = m^2 \text{ (*)}.$$

Pour trouver l'équation en coordonnées rectilignes, choisissons les axes comme dans le n° 62; nous aurons

$$u^2 = y^2 + (c + x)^2, \quad v^2 = y^2 + (c - x)^2,$$

puis
$$[y^2 + (c + x)^2]\,[y^2 + (c - x)^2] = m^4,$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à y,

$$y^4 + 2(c^2 + x^2)y^2 + (c^2 - x^2)^2 - m^4 = 0 \text{ (**)}.$$

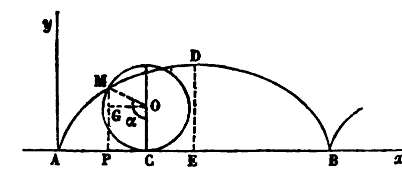
Cycloïde.

69. Lorsqu'un cercle O *roule*, sans glisser, sur une droite fixe AB, un point quelconque M de sa circonférence engendre une courbe appelée *cycloïde*.

(*) Cette équation peut servir à *construire la courbe par points*.

(**) Si $m = c$, la courbe devient la *lemniscate de Bernoulli*.

Soit C le point où la circonférence mobile, dans une de ses positions, touche la droite fixe AB. Si nous portons, à partir de ce point C, CA égal à l'arc CM *rectifié*, A sera la position initiale du point décrivant M.



Prenons AB pour axe des abscisses et la perpendiculaire Ay pour axe des ordonnées; représentons par R le rayon du cercle et par α la mesure de l'angle variable MOC. Nous aurons, en menant l'ordonnée MP et la parallèle OG à AB,

$$x = \mathrm{AP} = \mathrm{AC} - \mathrm{OG} = \mathrm{R}\alpha - \mathrm{R}\sin\alpha,$$

$$y = \mathrm{MP} = \mathrm{PG} + \mathrm{MG} = \mathrm{R} - \mathrm{R}\cos\alpha \ (^*).$$

Cette seconde équation donne

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{R}-y}{\mathrm{R}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\mathrm{R}}\sqrt{2\mathrm{R}y - y^2} \ (^{**}),$$

$$\alpha = \arccos\frac{\mathrm{R}-y}{\mathrm{R}}.$$

En substituant ces deux dernières valeurs dans la première équation, nous obtiendrons

$$x = \mathrm{R}\arccos\frac{\mathrm{R}-y}{\mathrm{R}} \mp \sqrt{2\mathrm{R}y - y^2} \ (^{***}). \quad (1)$$

70. *Remarque.* — A un même cosinus correspondent une infi-

(*) Ces formules subsistent pour toutes les positions du point M, ou, ce qui est équivalent, pour toutes les valeurs de α.

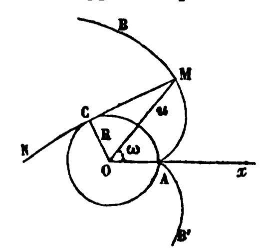
(**) On doit, évidemment, prendre le signe + si α est moindre que π, ou si le point M est à gauche de l'axe DE, et le signe — dans le cas contraire.

(***) D'après ce qui précède, si l'on suppose $\arccos\frac{\mathrm{R}-y}{\mathrm{R}} < \pi$ et que l'on prenne le radical avec le signe —, on aura la moitié AD de la cycloïde; pour obtenir l'autre moitié DB, on doit supposer $\arccos\frac{\mathrm{R}-y}{\mathrm{R}}$ compris entre π et 2π, et adopter le signe + devant le radical.

nité d'arcs. Par conséquent, l'équation (1) représente une infinité d'arcs égaux à ADB. Cette circonstance, qui se rencontre dans un grand nombre de *courbes transcendantes*, était facile à prévoir; car on peut supposer que la circonférence O roule *indéfiniment* sur la droite AB.

Développante du cercle.

71. Supposons qu'un fil soit enroulé sur une circonférence O, de manière que l'une de ses extrémités soit fixe. Si l'on déroule le fil en le tendant continuellement, son extrémité libre M décrira la courbe appelée *développante de cercle*.



On peut donner une autre génération qui se rapproche de celle de la cycloïde :

Si une droite mobile MN roule, sans glisser, sur une circonférence fixe O, un point quelconque M de cette droite engendrera la développante AMB.

Pour trouver l'équation de cette courbe, il suffit d'exprimer que la tangente CM est égale à l'arc CA rectifié, A étant la position initiale du point M.

Prenons le centre O pour pôle, la droite OA pour axe; représentons par u et ω les coordonnées du point quelconque M, et par R le rayon du cercle.

L'angle MOA se compose de COA diminué de MOC. Celui-ci a pour cosinus $\frac{R}{u}$, tandis que COA a pour mesure

$$\frac{CA}{CO} = \frac{CM}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{u^2 - R^2}.$$

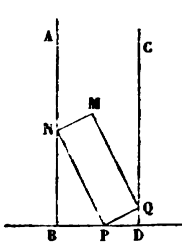
L'équation cherchée est donc

$$\omega = \arccos\frac{R}{u} - \frac{1}{R}\sqrt{u^2 - R^2}.$$

72. Si l'on prend le radical avec le double signe, on obtient tout à la fois l'arc AMB et l'arc AB', symétrique du premier par rapport à OA. Ce résultat est d'accord avec la seconde définition de la courbe.

EXERCICES.

I. Un rectangle MNPQ, dont la base PQ est donnée de grandeur, s'appuie, par trois de ses sommets, sur deux parallèles données AB, CD, et sur une perpendiculaire BD à ces deux droites. Quel est le lieu décrit par le quatrième sommet M?



Équation du lieu : $y = \dfrac{b^2 + ax - 2x^2}{\sqrt{b^2 - x^2}}$.

II. Les deux extrémités d'une droite AB de longueur donnée s'appuient, l'une sur une circonférence donnée, l'autre sur une droite donnée située dans le plan de la circonférence. Quel est le lieu décrit par un point quelconque de AB (*)?

Équation du lieu :

$$[(a+2b)x^2 - 2(a+b)dx + ay^2 + a(b^2+d^2-R^2)]^2 = 4b^2y^2(a^2-x^2).$$

III. En supposant que l'intensité d'une lumière varie en raison inverse du carré de la distance, trouver, dans un plan passant par deux lumières égales, le lieu des points qui reçoivent une quantité donnée de lumière (**).

Equation du lieu :

$$y^4 + 2(x^2 + a^2 - b^2)y^2 + (x^2 - a^2)^2 - 2(x^2 + a^2)b^2 = 0.$$

IV. Même problème, en supposant trois, quatre,..., lumières égales, placées aux sommets d'un *triangle équilatéral*, d'un *carré*, etc. (***).

(*) Ce lieu est un cas particulier de la *courbe à longue inflexion*, de Watt.

(**) Les courbes dont il s'agit sont quelquefois désignées sous le nom de lignes *isophanes*.

(***) Dans le cas du carré, l'équation est

$$\frac{1}{(x-a)^2+(y-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2+(y-a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2+(y+a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2+(y+a)^2} = \frac{1}{b^2}.$$

V. Une infinité de circonférences sont tangentes à une même droite en un même point. On prend sur chacune d'elles, à partir de ce point, un arc de longueur constante. Quel est le lieu des extrémités de ces arcs?

Équation du lieu : $u = 2a\frac{\sin\omega}{\omega}$.

VI. Lieu des points tels, que le produit des distances de chacun d'eux aux trois sommets d'un triangle équilatéral donné, soit équivalent à un cube donné.

Équation du lieu :

$$u^6 - 2\cos\omega(4\cos^2\omega - 3)u^3 + 1 - m^6 = 0.$$

CHAPITRE VI.

CONSTRUCTION DE QUELQUES ÉQUATIONS.

73. Afin de considérer seulement les cas les plus simples, nous supposerons, dans ce qui va suivre, le lieu géométrique rapporté à des coordonnées rectilignes, et son équation mise sous la forme

$$y = f(x).$$

74. Premier exemple. $y = x^3$.

A l'inspection de cette équation, on reconnaît les propriétés suivantes :

1°. *Le lieu passe par l'origine,* car l'équation est vérifiée par $x = 0$, $y = 0$.

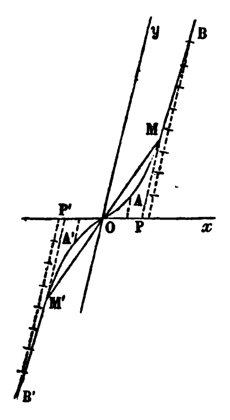
2°. A toute valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y; par conséquent, *toute parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en un point unique.* Cette courbe se compose donc d'*une seule branche* (*), indéfinie dans le sens des abscisses positives et dans le sens des abscisses négatives.

(*) Les mots *branche* et *bras* ayant la même étymologie, on devrait peut-être dire qu'un arc de courbe est composé de *deux branches*, lorsque, à partir d'un même point, cet arc s'étend indéfiniment dans les deux sens. Néanmoins, l'usage contraire a prévalu : on regarde, comme formant *une seule branche,* tout arc indéfini qui ne contient aucun *nœud.*

3°. *L'ordonnée croît beaucoup plus vite que l'abscisse* (*). En effet, si l'on suppose

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \ldots,$$

on trouve $\quad y = 1, \quad y = 8, \quad y = 27, \ldots.$



La courbe s'éloigne donc beaucoup plus rapidement de l'axe des x que de l'axe des y.

4°. L'équation n'est pas altérée quand on change x en $-x$ et y en $-y$, simultanément. Il résulte de là que *la courbe est symétrique par rapport à l'origine*. En effet, soient $x = a$, $y = b$ les coordonnées d'un point quelconque M du lieu; si l'on prend $OP' = OP$, et que par le point P' on mène P'M' égale et parallèle à PM, mais dirigée en sens contraire, le point M' aura pour coordonnées $-a$ et $-b$; donc il appartient au lieu. Cela étant, si l'on mène MO et M'O, on voit aisément que ces deux droites font partie d'une même droite MOM', ayant pour milieu l'origine O.

On exprime ces diverses propriétés, en disant que *la courbe a pour* CENTRE *l'origine.*

5°. De ces remarques résulte la forme très-simple indiquée sur la figure.

75. Deuxième exemple.

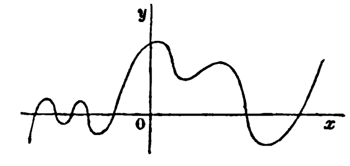
$$y = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m \text{ (**)}.$$

L'ordonnée étant représentée par une fonction entière de x, il s'ensuit, comme dans le premier exemple, qu'*à toute valeur réelle et finie de x correspond une seule valeur de y, réelle et finie.* Donc aussi, *toute parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en un point unique*. Il suit de là que *le lieu se compose d'une seule*

(*) Celle-ci étant supposée supérieure à l'unité.

(**) La courbe que nous venons de construire est un cas particulier de celle-ci.

branche, continue, indéfinie dans le sens des abscisses positives et dans le sens des abscisses négatives, et qui ne revient jamais sur elle-même. En outre, aux valeurs infinies de x correspondent des valeurs infinies de y, dont le signe dépend du coefficient A_0 et de l'espèce de l'exposant m (*Alg.*, **262**). La forme générale de la courbe est donc à peu près celle que l'on voit ci-contre.

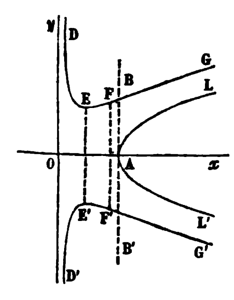


76. TROISIÈME EXEMPLE. $y^2 = x \pm \sqrt{\dfrac{x^2+2x+2}{x}}$.

Cherchons d'abord quelles sont les valeurs que l'on peut attribuer à x.

Pour que y soit réelle, il faut que y^2 le soit, ou que la fraction $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$ soit positive.

Si l'on égale à zéro le numérateur de cette fraction, on trouve que l'équation $x^2+2x+2=0$ a des racines imaginaires; donc le trinôme x^2+2x+2 est essentiellement positif, et la fraction est positive ou négative en même temps que x. La courbe n'aura donc aucun point à gauche de l'axe des y.



Si nous prenons le radical positivement, y sera réelle, quelle que soit la valeur positive attribuée à x. Ainsi, une partie du lieu s'étendra indéfiniment à droite de Oy.

Mais si nous prenons le radical négativement, nous devrons satisfaire à l'inégalité

$$x > \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x}}.$$

Élevons au carré et multiplions de part et d'autre par la quantité positive x; nous aurons

$$x^3 - x^2 - 2x - 2 > 0.$$

Le premier membre s'annule pour une certaine valeur α com-

prise entre 2,2 et 2,3 (*). Donc ce premier membre sera positif pour $x > \alpha$. Conséquemment, si, après avoir adopté une certaine *échelle*, nous prenons, sur l'axe des abscisses, OA proportionnelle à α, et que par le point A nous menions BAB′ parallèle à Oy, la seconde partie de la courbe s'étendra indéfiniment à la droite de BAB′.

Maintenant, faisons croître x indéfiniment, à partir de zéro, dans la formule

$$y^2 = x + \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x}}.$$

1°. Pour des valeurs très-petites de x, la fraction $\frac{x^2+2x+2}{x}$ est très-grande, et lorsque x converge vers zéro, cette fraction croît de manière à dépasser toute limite. Ceci indique évidemment que *la courbe s'approche indéfiniment de l'axe* Oy, *sans jamais l'atteindre*. On dit, pour cette raison, que Oy est une *asymptote de la courbe*.

2°. $x = 1$ donne $y^2 = 1 + \sqrt{5}$, ou $y = \pm 1{,}8$.

3°. $x = 2$ donne $y^2 = 2 + \sqrt{5}$, ou $y = \pm 2{,}0$.

Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on voit que l'arc DEFG, après s'être rapproché de l'axe des abscisses, s'en éloigne indéfiniment, en même temps qu'il s'éloigne de l'axe des ordonnées. D'ailleurs, les valeurs de y sont, deux à deux, égales et de signes contraires; donc, à l'arc DEFG correspond un autre arc D′E′F′G′ symétrique du premier, si les axes sont rectangulaires. Dans tous les cas, *l'axe des abscisses partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'axe des ordonnées*, c'est-à-dire que Ox est un *diamètre* de la courbe.

La formule $y^2 = x - \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x}}$ donne $y = 0$ pour $x = \alpha$. Ainsi, la courbe coupe l'axe des y au point A. A partir de cette valeur α de x, y augmente indéfiniment avec x. En effet, la fonc-

(*) Autrement dit, la *seule* racine positive de l'équation

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

est comprise entre ces deux limites.

tion $\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x}}$ est du degré $\frac{1}{2}$: elle tend donc à devenir nulle par rapport au terme x, qui est du degré 1 (*).

D'après cette remarque, la dernière partie de la courbe est une branche LAL', ayant à peu près la forme indiquée sur la figure.

77. Quatrième exemple. $y^2 = x \pm \sqrt{\frac{5x^2+3x-2}{x+5}}$.

On voit d'abord que l'on ne peut supposer $x < -5$, ni $x > -1$ et $< \frac{2}{5}$. Donc, il n'y aura aucun point de la courbe situé à la gauche de AA', et il n'y en aura aucun non plus entre les droites BB' et CC'.

Dans la formule $y^2 = x + \sqrt{\frac{5x^2+3x-2}{x+5}}$, nous pourrons attribuer à x une valeur arbitraire plus grande que $\frac{2}{5}$; et comme $x = \frac{2}{5}$ donne $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} = \pm 0,63$, il y a une partie DE de la courbe qui part du point D, déterminé par CD $= 0,63$, et qui s'étend indéfiniment dans l'angle C'Cx.

Afin de savoir si nous pouvons supposer x négatif, changeons x en $-x'$, et posons l'inégalité

$$x'^2 < \frac{5x'^2 - 3x' - 2}{5 - x'}.$$

A cause de $x' < 5$, elle se réduit à

$$x'^3 - 3x' - 2 > 0,$$

ou encore, à

$$(x'+1)^2(x'-2) > 0.$$

(*) En général, soit une fraction $z = \frac{Ax^m + \ldots}{A'x^{m'} + \ldots}$ dans laquelle les deux termes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x (entières ou fractionnaires, positives ou négatives). La valeur de cette fraction, pour $x = \infty$, est 0, $\frac{A}{A'}$, ou ∞, suivant que l'on a $A < A'$, $A = A'$, ou $A > A'$.

Le premier membre est positif à partir de $x' = 2$; donc un nouvel arc FG part du point F, situé sur le prolongement de Ox, à la distance 2 de l'origine, et s'approche indéfiniment de la droite AA′, qui en est l'asymptote.

La formule $y^2 = x - \sqrt{\frac{5x^2+3x-2}{x+5}}$, qui exige que x soit positif, donne, par le calcul précédent,

$$x^3 - 3x + 2 > 0,$$

ou

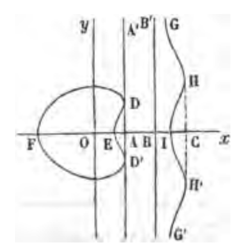
$$(x-1)^2(x+2) > 0.$$

Cette inégalité est vérifiée par toutes les valeurs positives de x, mais son premier membre s'annule pour $x = 1$. D'ailleurs, $x = \frac{2}{5}$ donne, comme ci-dessus, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. Il résulte de là que l'arc ED est *continué* par un autre arc DIH *coupant* (*) en I l'axe des abscisses. Ces deux arcs composent une branche EDH, à laquelle répond une autre branche E′D′H′ symétrique de la première par rapport à Ox.

Enfin, la courbe est complétée par l'arc FG′, symétrique de FG.

78. Cinquième exemple. $y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{2-x}}$.

En opérant absolument comme dans les deux exemples précédents, on trouve que le lieu géométrique représenté par cette nouvelle équation se compose :



1°. D'une *courbe en cœur* DED′F coupant l'axe des abscisses en deux points E, F; 2° d'une branche indéfinie GHIH′G′, qui rencontre cet axe en un point I et qui a pour asymptote une parallèle BB′ à l'axe Oy (**).

(*) La circonstance remarquable qui se présente ici exigerait, pour être complétement évidente, la *théorie des tangentes*.

(**) Les trois derniers exemples appartiennent à la *famille* des courbes

EXERCICES.

I. *Ellipse de Cassini* (68).

II. $y^4 + 2(x^2 + a^2 - b^2)y^2 + (x^2 - a^2)^2 - 2(x^2 + a^2)b^2 = 0.$

III. $y^2 = x \pm \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 3}}, \quad y^2 = x \pm \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 2}{3 - x}},$

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{-x}}, \quad y^2 = x \pm \sqrt{\frac{x^2 + 3x - 2}{x + 1}} \ (^*).$$

IV. $u^3 - 3u\cos\omega + 1 = 0, \quad u^3 - 3u\cos\omega + 2 = 0.$

V. $u^6 - 2\cos\omega(4\cos^2\omega - 3)u^3 + 1 - m^6 = 0$ (**).

VI. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (*chaînette*),

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{x}, \quad y = x e^{\frac{1}{x}}, \quad x^y = 1.$$

VII. $y = \sin x$ (*sinusoïde*), $y = \sin x + \sin 3x,$

$y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x.$

VIII. $y = x \sin\frac{1}{x}, \quad y = x \operatorname{tang}\frac{1}{x}.$

IX. $y = \dfrac{lx}{e^{\frac{1}{x}}}, \quad y = \dfrac{l(x^2)}{l(x^2 - 1)}, \quad ly.lx = 1, \quad y = l.\sin x.$

X. $y^2 = 2\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2} \pm \dfrac{x}{x + 2}\sqrt{\dfrac{4x - 19}{x - 1}},$

$$y^2 = \frac{x^3 - 1}{x^2} \pm \frac{1}{x^2}\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}.$$

---

représentées par l'équation générale

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x + d}}.$$

Cette équation donne lieu à une discussion très-intéressante.

(*) Cas particuliers de $y^2 = x \pm \sqrt{\dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}}$.

(**) *Voyez* les Exercices du chapitre V.

XI. $y^4 - 2000y + x^4 + 8x^3 - 8000 = 0$, $y^4 - y + x^4 - x^3 = 0$.

XII. $u^2 = a^2 \sin^2 2\omega - b^2(1 + \sin 2\omega)$ (*scarabée*) (*).

XIII. $u = a \cos\omega \pm b$ (*Limaçon de Pascal*), $u = \sin \frac{2}{3}\omega$.

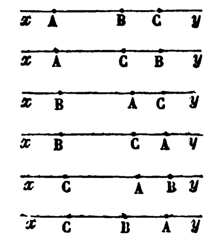
CHAPITRE VII.

THÉORIE DES PROJECTIONS.

---

79. Lemme I. — *La somme des segments* AB, BC,..., MN, NA, *déterminés sur une droite xy par des points* A, B, C,..., M, N, *disposés comme l'on voudra sur cette droite, est égale à zéro* (**).

Pour que cet énoncé ait un sens, certains segments doivent être regardés comme positifs, les autres étant supposés négatifs. La convention habituelle consiste, nous l'avons dit bien des fois, à donner le signe + aux segments dirigés de *gauche à droite*, et le signe — aux segments dirigés de *droite à gauche*.



Cela posé, il est d'abord facile de vérifier la proposition dans le cas où les points sont au nombre de *trois*.

En effet, les points A, B, C peuvent occuper, sur xy, les six positions relatives indiquées ci-contre (***), et donnant lieu, entre les segments *positifs*, aux six équations suivantes :

$$AC = AB + BC, \quad AB = AC + CB, \quad BC = BA + AC,$$
$$BA = BC + CA, \quad CB = CA + AB, \quad CA = CB + BA.$$

(*) Cette courbe est le lieu des projections d'un point appartenant à la bissectrice d'un angle droit, sur une droite qui glisse entre les côtés de l'angle.

(**) Cette proposition est tirée du *Traité de Géométrie supérieure*, par M. Chasles.

(***) Par la considération des *permutations tournantes*, on pourrait réduire ces six cas à *deux*.

Mais, d'après la convention établie,

$$AC = -CA, \quad CB = -BC, \quad BA = -AB;$$

donc nos six relations se réduisent à

$$AB + BC + CA = o.$$

La proposition étant établie pour le cas de trois points, il suffit, pour en démontrer la généralité, de vérifier que *si elle a lieu pour n points, elle subsiste pour* $(n+1)$ *points*. Admettons-la donc dans le cas de n points A, B, C,..., L, M; en sorte que

$$AB + BC + \ldots + LM + MA = o.$$

Si nous introduisons le $(n+1)^{\text{ième}}$ point N, nous aurons, entre les segments déterminés par A, M, N, la relation

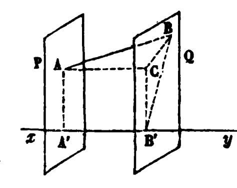
$$AM + MN + NA = o.$$

Ajoutant membre à membre, nous trouverons, à cause de $MA = -AM$,

$$AB + BC + \ldots + LM + MN + NA = o \; (*). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

80. Lemme II. — *La projection d'une droite finie, sur un axe quelconque, est égale au produit de la droite par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'axe.*

Par les extrémités A, B de la droite donnée, menons deux plans P, Q perpendiculaires à l'axe xy. Soient A', B' les points où cet axe perce les deux plans : les droites AA', BB' seront perpendiculaires à xy, et A'B' sera la projection de AB.



Par le point A, menons une parallèle AC à xy, et joignons le point C, où elle perce le plan Q, aux points B, B', par les droites CB, CB'.

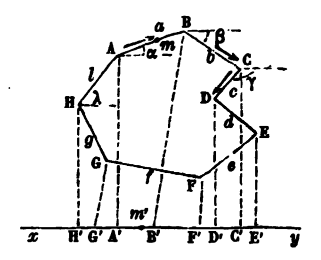
Les droites A'B', AC sont égales, comme parallèles comprises

(*) Peut-être pourrait-on admettre, *sans démonstration*, ce lemme fondamental. En effet, l'équation ci-dessus pourrait être énoncée en ces termes : *Quand un mobile se meut sur une droite, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, de manière à revenir au point de départ; la somme des espaces parcourus dans un sens égale la somme des espaces parcourus dans le sens opposé*; ce qui paraît assez évident.

entre plans parallèles; de plus, le triangle ACB est rectangle en C; donc

$$A'B' = AC = AB \cos BAC.$$

81. Théorème. — *Si l'on projette, sur un axe xy, un polygone fermé quelconque, plan ou gauche, la somme algébrique des projections des côtés de ce polygone est égale à zéro.*



Cet énoncé suppose que le *contour* fermé AB...A est parcouru, toujours dans le même sens, par un mobile m dont la *projection* m' parcourt l'arc xy. Cela posé, le théorème équivaut à l'équation

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'G' + G'H' + H'A' = 0,$$

évidente par ce qui précède.

82. Corollaire. — *La projection de la droite qui ferme un contour polygonal est égale à la somme algébrique des projections des côtés du contour.*

Soit AF la droite qui ferme le contour polygonal ABCDEF; on a

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'A' = 0;$$

mais $F'A' = -A'F'$ (79), donc

$$A'F' = A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F'.$$

83. *Remarque.* — Il n'est pas nécessaire que les projections A', B', C',..., soient *orthogonales* : il suffit qu'elles soient déterminées par des plans parallèles entre eux.

84. *Expression algébrique du théorème précédent.* — Dans le cas des projections orthogonales, si l'on désigne par $a, b, c, \ldots, l$ les longueurs des côtés du polygone, et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ les angles que forment ces côtés avec l'axe, on aura, par le théorème et par le lemme II,

$$a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma + \ldots + l \cos\lambda = 0.$$

85. *Remarque.* — Ainsi qu'on le voit sur la figure, les angles α,

β, γ,..., sont ceux que forment les *directions* AB, BC, CD,..., avec des parallèles à xy, menées par les sommets A, B, C,..., ces parallèles étant toujours dirigées dans le même sens. En effet, ces angles doivent être *aigus* ou *obtus*, suivant que les projections correspondantes A′B′, B′C′, C′D′,..., sont *positives* ou *négatives*.

CHAPITRE VIII.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

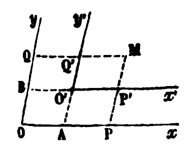
86. La transformation des coordonnées a presque toujours pour objet de simplifier l'équation d'un lieu géométrique donné, en remplaçant le système primitif de coordonnées par un autre système convenablement choisi.

Le problème général à résoudre est celui-ci : *Étant donnée l'équation $f(x, y) = 0$ d'un lieu géométrique, trouver l'équation de ce lieu rapporté à des coordonnées u, v.*

Soient $x = F(u, v)$, $y = F_1(u, v)$ les valeurs des *anciennes* coordonnées x, y en fonction des *nouvelles* coordonnées u, v. Si l'on substitue ces valeurs dans $f(x, y) = 0$, on obtiendra une certaine équation $\varphi(u, v) = 0$, qui sera l'équation demandée.

87. Dans le cas où l'on veut *transformer des coordonnées rectilignes en d'autres coordonnées rectilignes,* la transformation la plus générale consisterait à *changer à la fois l'origine et la direction des axes;* mais, au lieu d'opérer ainsi, on peut faire la transformation en deux fois : *on change* d'abord *l'origine en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes,* après quoi *l'on change la direction des axes sans déplacer l'origine.*

88. Première transformation. — *Transporter les axes parallèlement à eux-mêmes.*



Soit M un point quelconque; soient x, y ses coordonnées par rapport aux axes primitifs Ox, Oy, et x', y' ses coordonnées par rapport aux nouveaux axes O′x', O′y'. Ceux-ci sont évidemment déterminés par les coordonnées a, b de la nouvelle origine.

Cela posé, les deux équations

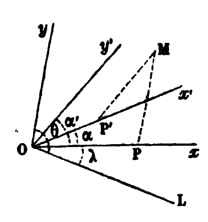
$$OA + AP + PO = 0,$$
$$OB + BQ + QO = 0 \ (79)$$

donnent, dans tous les cas,

$$x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

Ce sont là les formules cherchées.

89. Seconde transformation. — *Passer d'un système d'axes obliques à un autre système d'axes obliques ayant même origine.*



Représentons par θ, α, α' les angles xoy, xox', xoy', ces angles étant, comme en trigonométrie, comptés de 0 à 2π, de *droite à gauche* et de *bas en haut*. Soit M un point quelconque, dont les coordonnées sont x, y, x', y'.

Projetons les deux lignes brisées OPM, OP'M sur une droite OL, faisant avec Ox un angle quelconque λ. Nous aurons (82)

$$x \cos\lambda + y \cos(\lambda + \theta) = x' \cos(\lambda + \alpha) + y' \cos(\lambda + \alpha').$$

Supposons successivement $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$; et nous obtiendrons les formules cherchées :

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}, \quad y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta}. \quad (1)$$

Ces deux formules sont générales, car le principe d'où elles ont été tirées est général.

90. *Cas particuliers.* — 1°. *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques.*

On fait, dans les formules précédentes, $\theta = \frac{\pi}{2}$; et l'on a

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\alpha', \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

2°. *Passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires.*

On a $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$; et les formules (1) deviennent

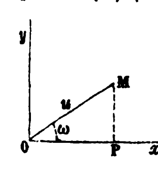
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x \sin(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \\ y &= \frac{x' \sin\alpha + y' \cos\alpha}{\sin\theta}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

3°. *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires.*

Supposons, dans les formules (2), $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$; nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

On peut arriver encore à ces formules en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans les équations (3) (*).

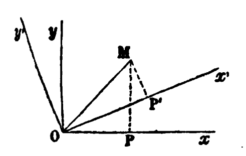


91. Quand on veut *transformer des coordonnées rectilignes en coordonnées polaires*, ou réciproquement, on peut toujours prendre pour pôle l'origine et pour axe polaire l'axe des abscisses; sauf à opérer une transformation auxiliaire. Cela posé, le triangle rectangle OMP donne :

1°. $x = u \cos\omega, \quad y = u \sin\omega,$ (5)

2°. $u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \omega = \text{arc tang}\frac{y}{x}.$ (6)

Cette dernière formule est peu employée : presque toujours l'arc ω entre dans les calculs par ses lignes trigonométriques.



(*) On peut remarquer, comme vérification des formules (4), que

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

C'est ce qui doit avoir lieu, car

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 = \overline{MP'}^2 + \overline{OP'}^2.$$

CHAPITRE IX.

GÉNÉRALITÉS SUR LES COURBES.

92. On partage les courbes *en courbes algébriques* et en *courbes transcendantes :* une ligne appartient à la première classe ou à la seconde, suivant que son équation, *en coordonnées rectilignes*, est algébrique ou transcendante (*Alg.*, **142**, **143**).

93. On distingue les courbes algébriques par le degré de leurs équations : *la ligne droite est une ligne du premier ordre*, son équation étant du premier degré; l'*ellipse*, la *parabole*, l'*hyperbole*, le *cercle* sont des *courbes du deuxième ordre*.

Cette classification n'aurait pas de sens si, par un changement d'axes, on pouvait altérer le degré de l'équation d'une courbe. C'est ce qui n'a pas lieu. Nous allons, en effet, démontrer la proposition suivante :

94. Théorème. — *Un changement de coordonnées rectilignes ne change pas le degré de l'équation d'une ligne algébrique.*

Soit, après la disparition des radicaux et des dénominateurs,

$$\sum \mathrm{A}x^p y^q = 0$$

l'équation de la courbe : la plus grande valeur de $p+q$ est le degré m de cette équation. Cela posé, les formules de transformation ayant la forme

$$x = a + bx' + cy',$$
$$y = a' + b'x' + c'y',$$

le terme $\mathrm{A}x^p y^q$ devient

$$\mathrm{A}(a + bx' + cy')^p (a' + b'x' + c'y')^q;$$

et il est évident que le degré de ce produit ne surpasse pas $p+q$; donc il ne surpasse pas m. Autrement dit, *le degré de l'équation ne pourra pas s'élever.*

Je dis maintenant qu'*il ne pourra pas non plus s'abaisser;* car si l'équation entre x' et y' pouvait être de degré $(m-n)$, en

partant de cette équation et faisant la transformation inverse de la première, on passerait du degré $m-n$ au degré m; ce qui est impossible, d'après la première partie de la démonstration.

95. *Une équation de degré m peut représenter des lieux géométriques d'ordres inférieurs à m.*

Soit $f(x,y) = A.B.C = 0$. L'équation $f(x,y) = 0$ sera vérifiée par $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, équations qui sont de degrés moindres que m. Par exemple, l'équation du second degré

$$(x-y-1)(x+y) = 0$$

est vérifiée par $\quad x-y-1 = 0, \; x+y = 0.$

On a donc deux lignes droites, au lieu d'avoir une courbe du second ordre.

Réciproquement, si $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ sont les équations de plusieurs lignes, on pourra les remplacer par la seule équation $A.B.C = 0$ (*).

96. Soient

$$f(x,y) = 0, \quad (1) \qquad F(x,y) = 0, \quad (2)$$

les équations de deux courbes. Si l'on combine ces équations par voie d'addition ou de soustraction, ou plus généralement, si on les ajoute après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur numérique λ, l'équation résultante,

$$f(x,y) + \lambda F(x,y) = 0, \quad (3)$$

représentera *un lieu géométrique qui passera par les points d'intersection des deux premières lignes.*

En effet, tout système de valeurs de x et de y satisfaisant aux équations (1) et (2) satisfait évidemment à l'équation (3).

(*) Il est bon d'observer que, si l'on multiplie membre à membre les deux équations $A = A'$, $B = B'$, l'équation résultante $AA' = BB'$ ne pourra pas tenir lieu des proposées : seulement, elle représente un lieu géométrique qui passe par les points communs aux lignes représentées par ces dernières. Par exemple, si l'on multiplie membre à membre les équations $x = y + 1$, $x = -y + 2$, qui représentent des droites, on obtient

$$x^2 + y^2 - y - 2 = 0,$$

équation d'un cercle.

Il y a plus: comme l'équation (3), quand on y considère x
comme des inconnues, peut tenir lieu de l'une ou de l'autre
équations (1), (2), il s'ensuit que *deux quelconques des li*
représentées par les équations (1), (2), (3) *ont les mêmes po*
d'intersection.

97. La première proposition subsistera généralement enc
lorsque λ sera une fonction de x et de y, mais la seconde n'a
plus lieu.

Ainsi, soient $x^2+2y^2-2x+y+1=0$, $x+y-1=0$,
équations de deux lignes qui se coupent aux points représen
par $(x=1, y=0)$, $\left(x=\frac{4}{3}, y=-\frac{1}{3}\right)$. Si l'on forme la co
binaison suivante:

$$x^2+2y^2-2x+y+1-(x+y-1)(x+2y)=0,$$

ou

$$3xy-3y+x-1=0,$$

on aura un lieu qui passe par les points d'intersection des deu
autres lignes, mais qui, de plus, coupe le premier lieu aux points
ayant pour équations

$$\left(x=1, y=-\frac{1}{2}\right),\quad \left(x=\frac{2}{3}, y=-\frac{1}{3}\right).$$

98. Théorème. — *Une courbe de degré m ne peut être rencontrée en plus de m points par une droite.*

Dans l'équation $F(x, y)=0$, faisons $y=0$; nous obtiendrons une équation $f(x)=0$ dont les racines réelles nous donneront les points de rencontre de la courbe avec l'axe des x. Or, l'équation $f(x)=0$, dont le degré ne surpasse pas m, a, au plus, m racines réelles; donc la courbe ne peut rencontrer l'axe des abscisses en plus de m points; et comme on peut prendre pour cet axe une droite quelconque, sans que le degré de l'équation de la courbe change (94), la proposition est générale.

99. Corollaire. — *Les lignes du second ordre sont convexes.*

CHAPITRE X.

THÉORIE DE LA LIGNE DROITE.

Préliminaires.

100. THÉORÈME. — *Toute équation du premier degré, entre deux coordonnées rectilignes x, y, représente une ligne droite.*

Soit l'équation $Ax + By + C = 0$. (1)

Si $A = 0$, l'équation du lieu se réduit à $By + C = 0$; et, B étant différent de o, on a $y = -\frac{C}{B}$,

ou $$y = b.$$

Nous avons vu que cette équation représente une parallèle à l'axe des abscisses, menée à la distance b. De même, si B était nul, l'équation $Ax + C = 0$ représenterait une parallèle à l'axe des ordonnées.

Revenant au cas général, nous aurons $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$,

ou $$y = ax + b. \quad (2)$$

Construisons d'abord $y' = ax$: cette équation est vérifiée par $x = 0$, $y' = 0$; donc le lieu passe par l'origine. Prenons ensuite

$$OA = 1,\ AB = a:$$

le point B appartiendra au lieu demandé. Menons OB : cette droite est le lieu représenté par $y' = ax$. En effet, par les triangles semblables ABO, POM, on a

$$MP = \frac{AB}{OA} \cdot OP = ax = y';$$

donc M est un point du lieu.

Pour passer au lieu de l'équation (2), il faut évidemment augmenter chaque ordonnée MP de $MN = b$, ce qui donne une parallèle NE à OBM. Elle rencontre l'axe des ordonnées au point E,

distant de l'origine d'une longueur $OE = b$; c'est pourquoi la constante b est appelée *ordonnée à l'origine*. Si b est positif, E sera au-dessus de l'origine : ce point serait au-dessous si b était négatif.

101. *Le coefficient angulaire a est égal au rapport des sinus des angles que fait la droite* OB *avec les parties positives de l'axe des x et de l'axe des y* (60). Si donc α est le premier angle et que θ soit l'angle des axes,

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - a)}.$$

Quand les axes sont rectangulaires,

$$a = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha.$$

102. *Autre forme de l'équation de la ligne droite.* — Représentons par p et q *l'abscisse et l'ordonnée à l'origine ;* savoir :

$$p = -\frac{C}{A}, \quad q = -\frac{C}{B}; \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{C}{p}, \quad B = -\frac{C}{q}.$$

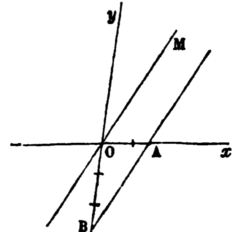
En substituant ces valeurs dans l'équation (1), nous trouvons

$$-\frac{C}{p}x - \frac{C}{q}y + C = 0;$$

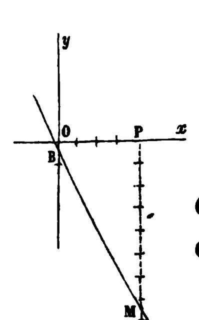
ou, en divisant par C, qui est différent de zéro,

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

103. *Construction de quelques équations particulières.* — 1°. $y = 2x - 3$. On cherche les points de rencontre de la droite avec chacun des deux axes : $x = 0$ donne $y = -3 = OB$; pour $y = 0$, $x = \frac{3}{2} = OA$. Donc AB est la droite demandée.



On aurait pu construire d'abord $y = 2x$, ce qui aurait donné OM, et mener, à une distance -3 de l'origine, une parallèle à cette droite.



2°. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{2}{5}$.

$$x = 0 \text{ donne } y = -\frac{2}{5};$$

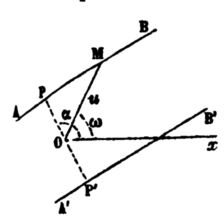
$$x = 4 \text{ donne } y = -6 - \frac{2}{5}.$$

On prend donc, sur le prolongement de Oy, $OB = \frac{2}{5}$; on prend ensuite

$$OP = 4, \quad PM = 6 + \frac{2}{5}:$$

BM est la droite cherchée.

104. *Équation de la ligne droite en coordonnées polaires.* —



Abaissons du pôle, sur la droite donnée AB, la perpendiculaire $OP = p$, et nommons α l'angle de OP avec l'axe polaire Ox. Ces données conviendraient à AB et à la parallèle A'B' : on évitera l'indétermination en supposant positive la distance p et en faisant varier l'angle α de o à 2π.

Cela posé, $OP = p$ est la projection de $OM = u$; l'équation cherchée est donc

$$OP = OM\cos(\alpha - \omega),$$

ou

$$u = \frac{p}{\cos(\alpha - \omega)}.$$

105. Soit, plus généralement,

$$u = \frac{A}{B\sin\omega + C\cos\omega}. \quad (1)$$

Posons $\quad C = \sqrt{B^2 + C^2}\cos\alpha, \quad B = \sqrt{B^2 + C^2}\sin\alpha;$

nous aurons

$$u = \frac{A}{\sqrt{B^2 + C^2}\cos(\alpha - \omega)},$$

ou

$$u = \frac{p}{\cos(\alpha - \omega)},$$

en prenant

$$p = \frac{A}{\sqrt{B^2 + C^2}}.$$

Ainsi, toute équation de la forme (1) représente une ligne droite. On serait arrivé plus simplement à ce résultat en chassant le dénominateur; car

$$Bu\sin\omega + Cu\cos\omega = A \quad \text{équivaut à} \quad By + Cx = A.$$

Problèmes sur la ligne droite.

106. PROBLÈME I. — *Trouver l'équation d'une droite passant par un point donné.* — Cette équation est de la forme

$$y = ax + b.$$

Elle doit être vérifiée par les coordonnées x', y' du point. Donc

$$y' = ax' + b$$

est l'équation de condition entre a et b. Retranchons membre à membre, et nous aurons, pour l'équation demandée,

$$y - y' = a(x - x').$$

107. *Remarque.* — Le coefficient a reste arbitraire : il faudrait, pour le déterminer, assujettir la droite à une autre condition, par exemple à la condition de passer par un second point.

108. PROBLÈME II. — *Trouver l'équation d'une droite passant par deux points donnés.*

La droite passant par le point (x', y'), son équation sera de la forme

$$y - y' = a(x - x').$$

Cette équation doit être vérifiée par les coordonnées x'', y'' du second point; donc

$$y'' - y' = a(x'' - x').$$

Si l'on divise membre à membre, a est éliminé, et l'on obtient

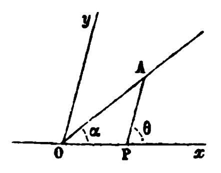
$$\frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{x - x'}{x'' - x'},$$

ou

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

109. PROBLÈME III. — *Étant donnée l'équation d'une droite, trouver les angles que fait cette droite avec les axes.*

Soit $y = ax + b$ l'équation donnée. On a (101)



$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Cette équation donne

$$a(\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta) = \sin\alpha,$$

$$a(\sin\theta - \tang\alpha\cos\alpha) = \tang\alpha;$$

et enfin,
$$\tang\alpha = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta}. \quad (1)$$

110. *Remarques.* — I. Ainsi qu'on l'a déjà vu, l'angle α est celui que forme la partie positive de l'axe des abscisses avec le *segment* de droite situé au-dessus de cet axe, passant par l'origine, et parallèle à la droite donnée.

II. La formule (1) n'est pas calculable par logarithmes, mais il est aisé d'en trouver une autre qui le soit.

En effet, de
$$\frac{a}{1} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

on conclut, par les propriétés des proportions,

$$\frac{a-1}{a+1} = \frac{\sin\alpha - \sin(\theta - \alpha)}{\sin\alpha + \sin(\theta - \alpha)} = \frac{\tang(\alpha - \frac{1}{2}\theta)}{\tang\frac{1}{2}\theta},$$

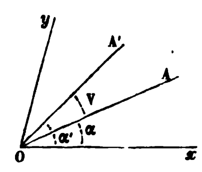
puis
$$\tang\left(\alpha - \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{a-1}{a+1}\tang\frac{1}{2}\theta \ (^*). \quad (2)$$

III. Si l'on résolvait par rapport à x l'équation $y = ax + b$, le coefficient de y deviendrait $\frac{1}{a}$. Conséquemment, pour déterminer l'angle $\theta - \alpha$ formé par la droite OA et par Oy, il suffit de changer a en $\frac{1}{a}$ dans la formule (1). On obtient ainsi

$$\tang(\theta - \alpha) = \frac{\sin\theta}{a + \cos\theta}. \quad (3)$$

(*) Cette dernière formule a été déduite de la valeur de a par le procédé qui sert à *résoudre un triangle rectiligne, connaissant deux côtés et l'angle compris.* Cette identité de solution tient à ce que, dans le triangle OPA, on peut supposer OP = 1, PA = a, et que d'ailleurs OPA = $\pi - \theta$.

111. Problème IV. — *Trouver l'angle de deux droites dont les équations sont données.*



Par l'origine, et *au-dessus* de l'axe Ox, menons des parallèles OA, OA' aux deux droites : l'angle $AOA' = V$ sera égal à deux des quatre angles formés par ces lignes. En conservant les notations précédentes et en supposant, pour fixer les idées, $\alpha' > \alpha$, nous aurons

$$V = \alpha' - \alpha,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\theta}{1+a\cos\theta}, \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{a'\sin\theta}{1+a'\cos\theta};$$

par conséquent,

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha'} = \frac{\left(\dfrac{a'}{1+a'\cos\theta} - \dfrac{a}{1+a\cos\theta}\right)\sin\theta}{1+\dfrac{aa'\sin^2\theta}{(1+a\cos\theta)(1+a'\cos\theta)}},$$

ou enfin, $$\operatorname{tang} V = \frac{(a'-a)\sin\theta}{1+(a+a')\cos\theta+aa'}.$$

112. *Remarques.* — I. On ne doit pas oublier que cette formule donne l'angle formé par les segments de droites dirigés au-dessus de l'axe des abscisses.

II. *Pour que les deux droites soient perpendiculaires,* il faut et il suffit que l'on ait

$$1+(a+a')\cos\theta+aa' = 0,$$

les axes étant obliques. Si les axes sont rectangulaires, cette condition devient

$$1+aa' = 0 \ (*).$$

113. Problème V. — *Calculer la distance* δ *de deux points* M', M'', *connaissant leurs coordonnées* x', y', x'', y''.

Quelles que soient les positions de ces points, nous pourrons construire le triangle

(*) Ces deux conditions exigent, bien entendu, que a et a' soient des quantités finies. Le lecteur pourra supposer $\operatorname{tang} V = \infty$ avec $a' = \infty$. Il trouvera ainsi la *condition exprimant qu'une droite est perpendiculaire à l'axe des ordonnées.*

M'CM", dans lequel

$$\delta^2 = (x'' - x')^2 + (y' - y'')^2 - 2(x'' - x')(y' - y'')\cos\theta,$$

ou

$$\delta = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos\theta}.$$

Si les axes sont rectangulaires, $\cos\theta = 0$; donc

$$\delta = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}.$$

114. *Remarque.* — Pour trouver la distance d'un point à l'origine, il suffit de supposer $x'' = 0$, $y'' = 0$; donc

$$\delta = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta}.$$

115. Problème VI. — *Trouver la distance d'un point donné* M *à une droite donnée* AB.

Soit
$$y = ax + b \quad (1)$$
l'équation de la droite AB, et soient x', y' les coordonnées du point M.

L'équation de la perpendiculaire MP sera de la forme

$$y - y' = a'(x - x'), \quad (2)$$

et l'on aura, entre a et a', la relation

$$1 + (a + a')\cos\theta + aa' = 0;$$

d'où
$$a' = -\frac{1 + a\cos\theta}{a + \cos\theta}. \quad (3)$$

Les coordonnées du pied P de la perpendiculaire sont les valeurs de x et de y qui vérifient les équations (1) et (2); en sorte que la distance cherchée sera donnée par la formule

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta. \quad (4)$$

Le second membre renfermant les différences $x - x'$, $y - y'$, on écrit ainsi l'équation (1):

$$y - y' = a(x - x') - (y' - ax' - b),$$

ou
$$y - y' = a(x - x') - d, \quad (1')$$

en posant, pour abréger,

$$d = y' - ax' - b. \quad (5)$$

Les équations (1') et (2) donnent

$$x - x' = \frac{d}{a - a'}, \quad y - y' = \frac{a'd}{a - a'};$$

en sorte que
$$\delta^2 = \frac{d^2}{(a - a')^2}(1 + 2a'\cos\theta + a'^2). \quad (6)$$

Mais, à cause de la valeur de a', on a

$$a - a' = \frac{1 + 2a\cos\theta + a^2}{a + \cos\theta},$$

$$1 + a'\cos\theta = \frac{a\sin^2\theta}{a + \cos\theta}, \quad a'\cos\theta + a'^2 = \frac{(1 + a\cos\theta)\sin^2\theta}{(a + \cos\theta)^2},$$

$$1 + 2a'\cos\theta + a'^2 = \frac{(1 + 2a\cos\theta + a^2)\sin^2\theta}{(a + \cos\theta)^2}.$$

Par conséquent,
$$\delta^2 = \frac{d^2\sin^2\theta}{1 + 2a\cos\theta + a^2},$$

et enfin,
$$\delta = \frac{(y' - ax' - b)\sin\theta}{\pm\sqrt{1 + 2a\cos\theta + a^2}}.$$

116. *Remarques.* — I. La distance d'un point à une droite est une quantité essentiellement positive; donc on prendra le radical de même signe que $y' - ax' - b$ (*).

II. On peut arriver beaucoup plus rapidement à la formule précédente.

Menons MQ parallèle à Oy; nous aurons $\delta = \text{MD}\sin\text{D}$. Or,

$$\text{MD} = y' - ax' - b, \quad \text{D} = \theta - \alpha, \quad \text{tang}(\theta - \alpha) = \frac{\sin\theta}{a + \cos\theta};$$

donc, etc.

III. Si l'équation de la droite est $Ay + Bx + C = 0$, on trouve, en remplaçant a par $-\frac{B}{A}$ et b par $-\frac{C}{A}$,

$$\delta = \frac{(Ay' + Bx' + C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 - 2AB\cos\theta + B^2}}.$$

(*) A moins cependant que l'on ne veuille distinguer, par le signe de δ, de quel *côté* de la droite est située la perpendiculaire MP.

IV. Dans le cas où les axes sont rectangulaires, on a simplement

$$\delta = \frac{y' - ax' + b}{\pm\sqrt{a^2+1}}, \quad \text{ou} \quad \delta = \frac{Ay' + By' + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

V. La distance de l'origine à une droite donnée a pour expression

$$\delta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}, \quad \text{ou} \quad \delta = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

EXERCICES.

I. Dans tout triangle rectiligne :

1°. Les trois médianes se coupent en un même point (*centre des moyennes distances*);

2°. Les trois hauteurs se coupent en un même point;

3°. Les bissectrices des angles intérieurs se coupent en un même point (*centre du cercle inscrit*);

4°. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés se coupent en un même point (*centre du cercle circonscrit*);

5°. Le point de rencontre des trois hauteurs, le centre des moyennes distances et le centre du cercle circonscrit, sont sur une même droite; la distance des deux premiers points est double de la distance des deux derniers.

II. Soient $y = ax + b$, $y = a'x + b'$, $y = a''x + b''$ les équations des trois côtés d'un triangle : l'aire T du triangle sera donnée par la formule

$$2T = \pm\frac{[b(a' - a'') + b'(a'' - a) + b''(a - a')]^2}{(a - a')(a' - a'')(a'' - a)}.$$

III. Dans tout quadrilatère complet, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite.

IV. Si d'un point, pris dans le plan d'un angle, on mène des transversales quelconques, les points de concours des diagonales des quadrilatères déterminés par ces transversales et par les côtés de l'angle, sont situés sur une même droite qui passe par le sommet.

V. Étant donnés un angle xoy, deux points A, A' en ligne droite avec son sommet, et un point fixe B, si l'on mène une transversale quelconque BCC' qui coupe en C, C' les côtés de l'angle, et que l'on mène les droites AC, A'C', le lieu de leur point de rencontre est une ligne droite.

VI. Si les sommets d'un triangle glissent sur trois droites fixes concourant en un même point, tandis que deux de ses côtés tournent autour de deux points fixes, le troisième côté tournera autour d'un troisième point, en ligne droite avec les deux premiers.

VII. Si d'un point, pris dans le plan d'un triangle, on mène des droites aux trois sommets et des perpendiculaires à ces lignes, les points de rencontre des perpendiculaires avec les côtés correspondants seront situés sur une même droite.

VIII. Si les droites qui joignent les sommets correspondants de deux triangles se coupent en un même point, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

IX. Quand les trois côtés d'un triangle de forme variable tournent autour de trois points fixes, situés en ligne droite, et que deux des sommets parcourent deux droites fixes données, le troisième sommet engendre une ligne droite qui passe par le point de concours des deux premières.

CHAPITRE XI.

CLASSIFICATION DES LIGNES DU SECOND ORDRE.

117. Nous allons examiner quels sont les lieux géométriques représentés par l'équation générale du second degré, à deux variables:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad (1)$$

Si A n'est pas nul, nous aurons, en résolvant par rapport à y,

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(Bx+D)^2 - 4A(Cx^2+Ex+F)},$$

ou

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2 + 2(BD-2AE)x + D^2 - 4AF};$$

ou bien, en posant

$$-\frac{B}{2A} = a, \quad -\frac{D}{2A} = b,$$

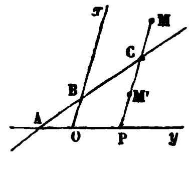
$$B^2 - 4AC = n, \quad BD - 2AE = p, \quad D^2 - 4AF = q,$$

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + 2px + q}. \quad (2)$$

Commençons par construire la droite dont l'équation est

$$y' = ax + b.$$

Cette droite AB étant construite, il suffira d'augmenter et de diminuer l'ordonnée de chacun de ses points, d'une longueur proportionnelle à la valeur du radical.



Il résulte, de cette observation, que la droite AB partage en deux parties égales toutes les cordes telles que MM', parallèles à l'axe des y : pour cette raison, on la désigne sous le nom de *diamètre*.

118. Suivant que le coefficient n sera négatif, positif ou nul, le lieu géométrique représenté par l'équation (1) aura des formes très-différentes. En effet, pour des valeurs de x positives ou négatives suffisamment grandes, le trinôme placé sous le radical prendra le signe de son premier terme (*Alg.*, 262). Si donc n est *positif*, les valeurs de y, répondant à de *très-grandes* valeurs de x, seront réelles, et le lieu sera *illimité*. Si, au contraire, n est *négatif*, les valeurs de x ne pourront pas croître au delà de toute limite, car le radical deviendrait imaginaire, etc. On a donc trois cas à distinguer :

1°. $n < 0$, ou $B^2 - 4AC < 0$;

2°. $n > 0$, ou $B^2 - 4AC > 0$;

3°. $n = 0$, ou $B^2 - 4AC = 0$.

119. *Premier cas :* $B^2 - 4AC < 0$.

Représentons par Y la fonction $\frac{1}{2A}\sqrt{nx^2 + 2px + q}$: Y sera ce qu'on appelle l'*ordonnée comptée à partir du diamètre*. En même temps, remplaçons n par $-k^2$; nous aurons

$$Y = \frac{k}{2A}\sqrt{-x^2 + \frac{2p}{k^2}x + \frac{q}{k^2}}.$$

Afin de savoir s'il existe des valeurs réelles de x qui rendent Y réelle, posons

$$x^2 - \frac{2p}{k^2}x - \frac{q}{k^2} = 0. \quad (3)$$

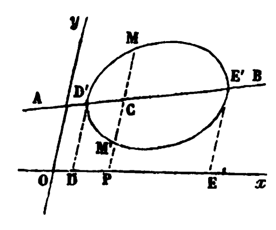
Les racines x', x'' de cette équation peuvent être *réelles* et *inégales*, *réelles* et *égales*, ou *imaginaires*.

1°. Les racines x', x'' étant réelles et inégales, soit x' la plus petite : le trinôme $x^2 - \frac{2p}{k^2}x - \frac{q}{k^2}$ pourra être mis sous la forme $(x - x')(x - x'')$, et nous aurons

$$Y = \frac{k}{2A}\sqrt{(x'' - x)(x - x')};$$

en sorte que les valeurs de x doivent être comprises entre x' et x''.

Si l'on prend donc $OD = x'$, $OE = x''$, et que l'on mène DD' et EE' parallèles à Oy, le lieu géométrique sera compris entre ces deux parallèles : il rencontre le diamètre AB aux points D', E'. Il est continu, car à toute valeur de x comprise entre x' et x'' correspondent deux valeurs réelles de y. De plus, ces valeurs sont finies : la courbe est donc limitée de toute part. Enfin, comme elle est convexe (99), elle a sensiblement la forme indiquée ci-contre. Cette courbe est *l'ellipse*.



2°. Si les racines x' et x'' sont réelles et égales, on a

$$Y = \pm\frac{k}{2A}\sqrt{-(x - x')^2} = \pm\frac{k(x - x')}{2A}\sqrt{-1}:$$

cette quantité est imaginaire pour toutes les valeurs de x, excepté pour $x = x'$, auquel cas $Y = 0$. *Le lieu se réduit* donc *à un point* ayant pour coordonnées $x = x'$, $y = ax' + b$. Cette *variété* de l'ellipse se présentera quand les racines de l'équation

$$nx^2 + 2px + q = 0$$

seront égales ; c'est-à-dire quand on aura

$$(BD - 2AE)^2 = (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF), \quad \text{avec} \quad B^2 - 4AC < 0.$$

3°. Si les racines x' et x'' sont imaginaires, le trinôme

$$nx^2 + 2pk + q$$

est négatif quel que soit x ; par conséquent, les valeurs de y sont

constamment imaginaires. Ainsi, *dans ce cas, l'équation du second degré ne représente aucun lieu géométrique.*

120. *Deuxième cas :* $B^2 - 4AC > 0$.

Le coefficient n étant positif, remplaçons-le par $+k^2$:

$$Y = \frac{k}{2A}\sqrt{x^2 + \frac{2p}{k^2} + \frac{q}{k^2}}.$$

Posons, comme précédemment,

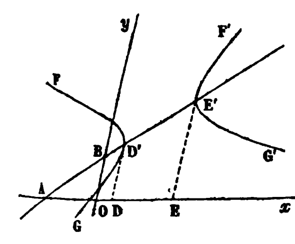
$$x^2 + \frac{2p}{k^2}x + \frac{q}{k^2} = 0;$$

et nous aurons encore trois cas à distinguer.

1°. Les racines x', x'' étant réelles et inégales, soit x' la plus petite :

$$Y = \frac{k}{2A}\sqrt{(x-x')(x-x'')}.$$

Prenons encore $OD = x'$, $OE = x''$; menons DD′, EE′ parallèles à Oy : ces deux droites seront deux limites de la courbe. La variable x croissant indéfiniment à partir de x'', Y croît aussi indéfiniment. La courbe a donc une première branche située à la droite de EE′, qui s'étend vers les abscisses positives et qui, après avoir coupé en E′ le diamètre AB, s'en éloigne indéfiniment.



Si l'on fait $x < x'$, chacun des facteurs $(x - x')$, $(x - x'')$ est négatif; leur produit est positif; et comme chacun d'eux augmente avec x, Y croîtra depuis zéro jusqu'à l'infini. On aura donc, à la gauche de DD′, une autre branche infinie. D'ailleurs, la courbe est convexe; donc, elle a la forme représentée ci-contre. On lui donne le nom d'*hyperbole*.

2°. Les racines x', x'' étant égales, $Y = \pm \frac{k}{2A}(x - x')$,

puis
$$y = ax + b \pm \frac{k}{2A}(x - x').$$

Le lieu se compose donc de deux droites dont les équations sépa-

rées sont

$$y = ax + b + \frac{k}{2A}(x - x'), \quad y = ax + b - \frac{k}{2A}(x - x').$$

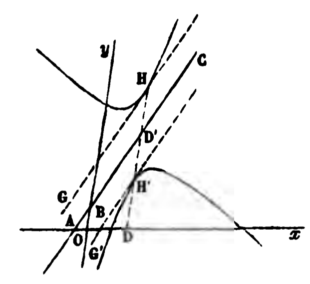
Ces droites se coupent en un même point du diamètre, car si l'on fait $x = x'$, les deux valeurs de y deviennent égales à $ax + b$, ainsi *le système de deux droites concourantes* est une variété de l'hyperbole. L'équation (1) représente cette variété lorsque

$$(BD - 2AE)^2 = (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF), \quad \text{avec} \quad B^2 - 4AC > 0.$$

3°. Si l'équation $x^2 + \frac{2p}{k^2}x + \frac{q}{k^2} = 0$ a ses racines imaginaires, son premier membre est la somme de deux carrés, en sorte que

$$Y = \pm \frac{k}{2A}\sqrt{(x - \alpha)^2 + 6^2},$$

valeur essentiellement réelle, quel que soit x. Le lieu géométrique ne rencontre donc pas son diamètre. En outre, la plus petite valeur de Y correspond à $x = \alpha$. Conséquemment, si l'on mène des parallèles au diamètre AC par les points H, H' déterminés par $x = \alpha$, les deux branches de la courbe seront, l'une au-dessus de HG, l'autre au-dessous de H'G'. Cette courbe, ainsi qu'on pourrait le reconnaître en résolvant l'équation (1) par rapport à x, est encore une hyperbole.



121. *Troisième cas:* $B^2 - 4AC = 0$. La valeur générale de y se réduit à

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{2px + q},$$

et l'ordonnée, comptée à partir du diamètre, devient

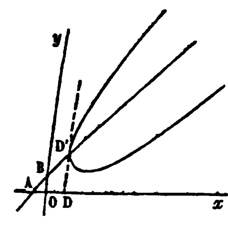
$$Y = \frac{1}{2A}\sqrt{2px + q}.$$

On peut faire trois hypothèses relativement à p : $p > 0$, $p < 0$, $p = 0$.

1°. $p > 0$. Soit x' la racine de l'équation $2px + q = 0$: on aura

$$Y = \pm \frac{1}{2A} \sqrt{2p(x - x')}.$$

On ne pourra donner à x que des valeurs supérieures à x'; par conséquent, si l'on prend $OD = x'$, et que l'on mène DD' parallèle à Oy, la courbe n'aura aucun point à la gauche de cette parallèle. D'ailleurs, $x = x'$ donne $Y = 0$, et Y croît indéfiniment avec x; donc la courbe, qui coupe son diamètre au point D', s'étend indéfiniment au-dessus et au-dessous de cette droite, du côté des abscisses positives. Elle porte le nom de *parabole*.



2°. $p < 0$. La forme du lieu géométrique est la même que dans le cas de p positif; la position seule est changée. Ce lieu est une *parabole* qui s'étend à la gauche de DD'.

3°. $p = 0$. L'équation se réduit à $y = ax + b \pm \frac{1}{2A}\sqrt{q}$.

Il y a encore trois cas à distinguer : $q > 0$, $q = 0$, $q < 0$.

q étant > 0, $\sqrt{q}$ sera réelle, Y sera réelle, mais égale à une constante. On obtiendra le lieu géométrique en portant, au-dessus et au-dessous du diamètre, une longueur constante. Ce lieu est donc composé de *deux droites parallèles*.

Si $q = 0$, $y = ax + b$. La parabole se réduit à son diamètre, ou plutôt les deux parallèles se sont rapprochées et ont fini par se confondre en *une seule droite*.

q étant < 0, Y et y sont imaginaires : *l'équation proposée ne représente aucun lieu géométrique*.

122. Nous avons supposé, dans l'équation (1), A différent de zéro. Si $A = 0$, l'équation, du premier degré par rapport à y, donne

$$y = -\frac{Cx^2 + Ex + F}{Bx + D} \ (*).$$

Si $B = 0$, on a, pour valeur de y, un polynôme du second degré en x. L'équation représente alors une parabole, car $B^2 - 4AC = 0$.

(*) On pourrait résoudre par rapport à x; mais la même difficulté se représenterait si C était nul.

$B^2 - 4AC < 0$, et $p^2 = nq$: le trinôme placé sous le radical sera un carré changé de signe. Pour reformer l'équation (1), multiplions la valeur de y par $2A$, faisons passer $(Bx + D)$ dans le premier membre, et élevons au carré; nous aurons

$$(2Ay+Bx+D)^2-[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF]=0,$$

ou

$$(2Ay+Bx+D)^2+\left[x\sqrt{4AC-B^2}-\frac{BD-2AE}{\sqrt{4AC-B^2}}\right]^2=0. \text{ (*)}$$

V. Si l'on a $B^2 - 4AC > 0$, le premier membre de l'équation (1) est égal, au contraire, à la différence de deux carrés, et il se décompose en deux facteurs du premier degré. Cette équation se décompose donc elle-même en deux équations du premier degré représentant deux droites.

EXERCICES.

I. $3y^2-2xy+x^2-2y=0$, $2y^2+6xy+5x^2-4y-6x+2=0$, $74y^2+2xy+13x^2-32y+18x+11=0$, $y^2+2xy+4x^2+2y-4x+1=0$, $3y^2-7xy+5x^2=0$.

II. $5y^2-2xy-x^2+2y-1=0$, $y^2+xy-x^2-x=0$, $y^2+3xy+2x^2-2y-3x+1=0$, $xy-x^2+2y=0$, $3y^2-7xy+4x^2=0$, $y^2-5xy+4x^2+2y-4x+1=0$,

III. $4y^2-22xy+9x^2-2y-x-1=0$, $x^2-5y+2x-1=0$, $y^2-7y+2x-4=0$, $y^2-4xy+4x^2+2y-4x+1=0$, $4y^2+12xy+9x^2-20y-30x+25=0$, $4y^2+12xy+9x^2-4y-6x+2=0$.

IV. Trouver l'équation de la courbe du second ordre qui passe par les points ayant pour coordonnées :

$x=-2,\ y=2$; $x=1,\ y=0$; $y=2,\ y=-4$;
$x=3,\ y=-18$; $x=5,\ y=44$.

Résultat : $xy-x^2-4y-5x+6=0$.

(*) Cette forme n'est pas la seule sous laquelle on puisse mettre l'équation proposée. En effet, *si un polynôme est égal à la somme de deux carrés, on peut, d'une infinité de manières, le décomposer en deux autres carrés.*

V. Discuter les courbes représentées par l'équation

$$y^2 - 2axy + x^2 - 2y - 2x + 1 = 0,$$

dans laquelle a est un *paramètre variable*.

VI. Même discussion pour l'équation

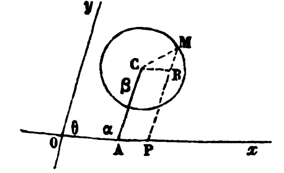
$$ay^2 - 2(a+2)xy + 3(2a+1)x^2 - 2(a+1)y + 2(a-1)x = 0.$$

CHAPITRE XII.

THÉORIE DU CERCLE.

125. Soient α, β les coordonnées du centre, θ l'angle des axes, x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la circonférence. L'équation sera $\overline{MC}^2 = R^2$, ou

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta = R^2. \quad (1)$$



Telle est la forme la plus générale de l'équation du cercle, en coordonnées rectilignes.

Si l'on développe, on a

$$\left.\begin{array}{l} y^2 + 2xy\cos\theta + x^2 - 2(\beta + \alpha\cos\theta)y - 2(\alpha + \beta\cos\theta)x \\ \quad + \beta^2 + x^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - R^2 = 0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

équation de la forme

$$y^2 + 2xy\cos\theta + x^2 + ay + bx + c = 0. \quad (3)$$

126. En comparant cette équation avec

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \ldots = 0,$$

on trouve $\qquad B^2 - 4AC = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta,$

quantité essentiellement négative, quel que soit θ. Ainsi *le cercle est un cas particulier de l'ellipse.*

127. Si les axes sont rectangulaires, $\cos\theta = 0$, et

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = R^2. \quad (4)$$

En effet, $\overline{MC}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{RC}^2$. Si le centre est sur l'un des deux axes, par exemple sur l'axe des abscisses, $\beta = 0$; donc

$$y^2 + (x-\alpha)^2 = R^2. \quad (5)$$

Enfin, si le centre est à l'origine, $\alpha = 0$, $\beta = 0$: l'équation se réduit à

$$y^2 + x^2 = R^2. \quad (6)$$

128. Dans l'équation (2), les coefficients des carrés des variables sont égaux à l'unité, et le coefficient de $xy = 2\cos\theta$; par conséquent, *pour qu'une équation du second degré puisse représenter un cercle, il faut* (après la division par le coefficient de y^2) *que les coefficients de y^2 et de x^2 soient égaux à l'unité et que le coefficient de xy soit le double du cosinus de l'angle des axes.*

Réciproquement, si une équation de la forme (3) représente un lieu géométrique, ce lieu sera un cercle. Pour démontrer cette proposition, cherchons à identifier les équations (3) et (2) ; nous aurons les trois équations de condition

$$-2(\beta + \alpha\cos\theta) = a, \quad -2(\alpha + \beta\cos\theta) = b, \quad (7)$$

$$\beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - R^2 = c : \quad (8)$$

α, β et R sont les trois inconnues. Les deux premières équations donnent

$$\alpha = \frac{-b + a\cos\theta}{2(1-\cos^2\theta)}, \quad \beta = \frac{-a + b\cos\theta}{2(1-\cos^2\theta)}.$$

Le dénominateur égale $2\sin^2\theta$, quantité essentiellement positive ; les deux valeurs de α et de β sont donc déterminées et finies, et, par suite, on peut trouver le centre. Quant au rayon, il sera donné par la formule

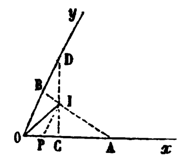
$$R^2 = \beta + \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - c.$$

Si le second membre est positif, R sera réel, et l'on aura *un cercle* dont le centre et le rayon seront connus. Si le second membre est nul, $R = 0$: *le cercle se réduit à un point*. Enfin, si R^2 est < 0, R est imaginaire et *l'équation ne représente rien*.

129. Il n'est pas nécessaire, pour déterminer le centre, de ré-

soudre les équations (7); car si nous regardons α et β comme des variables, chacune de ces équations représentera une droite sur laquelle devra se trouver le centre; donc il sera le point d'intersection de ces deux lignes.

Pour construire la première, faisons $\alpha = 0$; nous aurons



$$\beta = -\frac{1}{2}a = \text{OB}.$$

De même, $\beta = 0$ donne

$$\alpha = -\frac{a}{2\cos\theta} = \frac{\text{OB}}{\cos\theta}.$$

Cette valeur montre que la droite cherchée AB est perpendiculaire à Oy; car $\text{OA} = \frac{\text{OB}}{\cos\theta}$.

Pour avoir la seconde droite, on prend $\text{OC} = -\frac{1}{2}b$, et on élève CD perpendiculaire à Ox.

Ces deux droites AB, CD, perpendiculaires à deux droites qui se coupent, concourent en un point I, lequel est le centre.

130. Nous avons $\overline{\text{OI}}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta = d^2$ (114); donc

$$\text{R}^2 = d^2 - c.$$

Pour l'homogénéité, c doit être de la forme $\pm k^2$; donc

$$\text{R}^2 = d^2 \mp k^2.$$

1°. Si $c = -k^2$, le rayon R est toujours réel; 2°. Si $c = +k^2$, R sera réel quand on aura $d > \text{R}$; 3°. Enfin, $c = 0$ donne $\text{R} = d$: le cercle passe par l'origine.

EXERCICES.

I. Vérifier, par la méthode des coordonnées, les propriétés suivantes :

1°. La perpendiculaire abaissée sur un diamètre, d'un point de la circonférence, est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre;

2°. La corde menée par l'extrémité d'un diamètre est moyenne proportionnelle entre le diamètre et la projection de la corde sur le diamètre;

3°. Tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux entre eux;

4°. Les sécantes qui se coupent hors du cercle sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures;

Etc.

II. Étant données les équations d'un cercle et d'une droite

$$x^2+y^2=R^2, \quad y=ax+b,$$

trouver dans quel cas la droite sera sécante, tangente ou extérieure au cercle. Conclure, de cette discussion, l'équation de la tangente.

III. Trouver, par la méthode des coordonnées, les conditions du contact et de l'intersection de deux cercles.

IV. Trouver l'équation du lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles donnés (*axe radical*) (*).

V. *Théorème.* — Les axes radicaux de trois circonférences considérées deux à deux, se coupent en un même point (*centre radical*).

VI. Construire les points de contact d'une circonférence donnée et d'une tangente passant par un point donné.

VII. Trouver les équations du centre d'une circonférence passant par trois points donnés.

VIII. Dans tout quadrilatère circonscrit, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle (*Théorème de Newton*).

IX. Quel est le lieu décrit par le point de contact mutuel de deux circonférences variables, tangentes à deux circonférences données?

Réponse : Une circonférence.

X. Lieu des points tels, que les polaires (**) de chacun d'eux, par rapport à trois cercles donnés, se coupent en un même point.

XI. On divise les petits côtés AB, BC d'un triangle rectangle, aux points C′, B′, de manière que $\frac{AC'}{BC'}=\frac{CB'}{AB'}$; on mène les droites

---

(*) Le rectangle de la sécante entière par sa partie extérieure, est ce qu'on appelle *puissance* du point.

(**) $x^2+y^2=R^2$ étant l'équation d'un cercle, la *polaire* du point (α, β) est la droite représentée par $\alpha x+\beta y=R^2$.

BB′, CC′. Dans quel cas le lieu de leur point de rencontre sera-t-il un cercle?

XII. Lieu des centres des cercles coupant, sous un même angle, trois cercles donnés (*quatre droites*).

XIII. Étant donnés un cercle C, un point extérieur O, et la tangente OT; on mène, par un point quelconque m de la circonférence, une parallèle mP au diamètre CO; du point P, où cette parallèle rencontre OT, on élève PM perpendiculaire à OT; enfin, on prend OM $= om$. Quel est le lieu du point M?

Réponse : Deux cercles.

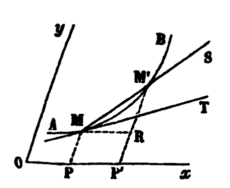
XIV. D'un point fixe A, on mène une droite qui coupe, aux points B, C, les côtés d'un angle xOy donné. On circonscrit une circonférence au triangle OBC; et, du point A, on mène une tangente à cette circonférence. Trouver l'équation du lieu des points de contact.

CHAPITRE XIII.

THÉORIE DES TANGENTES.

Coordonnées rectilignes.

131. Théorème. — *Le coefficient angulaire de la tangente à une courbe, est égal à la dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse.*



On appelle *tangente à une courbe* AB, *la limite* MT *des positions d'une sécante* MS *qui tourne autour de l'un* M *de ses deux points d'intersection avec la courbe, ce point étant supposé fixe, jusqu'à ce que le second point* M′ *d'intersection vienne se confondre avec le premier.*

Cela posé, soient x, y les coordonnées du point M, et $x+h$, $y+k$ celles du point M′, de manière que h représente l'accroissement PP′ de l'abscisse, et k l'accroissement M′R de l'ordonnée. Lorsque le point M′ parcourt l'arc BM en se rapprochant du point B, le coefficient angulaire de la sécante MM′ est, à chaque instant, égal

à $\frac{M'R}{MR}$, c'est-à-dire égal à $\frac{k}{h}$. Donc, d'après la définition précédente, le coefficient angulaire de la tangente TMT' a pour valeur la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{k}{h}$, lorsque les deux termes de ce rapport convergent vers zéro : or cette limite est la *dérivée* de y relative à x (*Alg.*, 179).

132. Si l'équation de la courbe est de la forme $y = f(x)$, on aura donc, en appelant a le coefficient angulaire de la tangente,

$$a = \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x). \quad (1)$$

133. Plus généralement, si l'ordonnée y est une fonction *implicite* de l'abscisse x, c'est-à-dire si l'équation de la courbe est $F(x, y) = 0$, on aura (*Alg.*, 214)

$$F'_x + aF'_y = 0, \quad \text{d'où} \quad a = -\frac{F'_{x'}}{F'_{y'}}. \quad (2)$$

134. *Équation de la tangente.* — Si nous considérons un point particulier dont les coordonnées soient x', y', l'équation de la tangente en ce point sera $y - y' = a(x - x')$, pourvu que, dans l'expression générale de a, on attribue à x et y les valeurs particulières x' et y'. Cette équation sera donc

$$y - y' = -\frac{F'_x}{F'_y}(x - x').$$

Chassant le dénominateur, on obtient

$$yF'_{y'} + xF'_{x'} = y'F'_{y'} + x'F'_{y'} \ (*). \quad (1)$$

Il faut, à cette équation, joindre la relation entre les coordonnées du point de contact, c'est-à-dire

$$F(x', y') = 0.$$

(*) On aurait une notation plus régulière si, continuant de représenter par x, y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, on désignait par X, Y les coordonnées *courantes* de la tangente en ce point ; en effet, l'équation de cette droite serait

$$YF'_y + XF'_x = yF'_y + xF'_x.$$

Dans le cas où $F(x, y)$ est un polynôme entier, on peut, à l'aide de cette relation, simplifier le second membre de l'équation de la tangente. Cette simplification est fondée sur la proposition suivante :

135. **Théorème.** — *U étant une fonction de x et de y, entière, homogène et du degré m, on a*

$$x U'_x + y U'_y = m U.$$

Soit, en effet, $U = \sum A x^p y^{m-p}$; on aura

$$x U'_x = \sum p A x^p y^{m-p}, \qquad y U'_y = \sum (m-p) A x^p y^{m-p};$$

donc

$$x U'_x + y U'_y = \sum (p + m - p) A x^p y^{m-p} = m \sum A x^p y^{m-p} = m U.$$

136. Revenons maintenant à la question des tangentes, et supposons le polynôme $F(x', y')$ décomposé en plusieurs polynômes homogènes $U_m, U_{m-1}, \ldots, U_0$ des degrés $m, m-1, \ldots, 0$; nous aurons, pour le point de contact,

$$F(x', y') = U_m + U_{m-1} + U_{m-2} \ldots + U_0 = 0;$$

puis, en appliquant le *Théorème des fonctions homogènes*,

$$x' F'_{x'} + y' F'_{y'} = m U_m + (m-1) U_{m-1} + (m-2) U_{m-2} + \ldots + U_1.$$

Si nous retranchons du second membre la quantité *nulle*

$$m (U_m + U_{m-1} + \ldots + U_0),$$

nous n'en changerons pas la valeur; donc

$$x' F'_{x'} + y' F'_{y'} = - U_{m-1} - 2 U_{m-2} - 3 U_{m-3} \ldots - m U_0.$$

Au moyen de cette transformation, l'équation de la tangente devient

$$y F'_{y'} + x F'_{x'} = - U_{m-1} - 2 U_{m-2} - 3 U_{m-3} \ldots - m U_0. \quad (2)$$

Cette nouvelle équation est plus simple que l'équation (1), car son second membre est, au plus, de degré $m - 1$.

137. *Application.* — Soit l'équation générale du second degré :

$$A y'^2 + B x' y' + C x'^2 + D y' + E x' + F = 0.$$

La tangente au point x', y', aura pour équation, d'après la formule (1),

$$y(2Ay'+Bx'+D)+x(By'+2Cx'+F)$$
$$=2Ay'^2+2Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'.$$

Retranchant du second membre le double du premier membre de la proposée, on obtient

$$y(2Ay'+Bx'+D)+x(By'+2Cx'+E)=-Dy'-Ex'-2F.$$

Coordonnées polaires.

138. Soit $u=f(\omega)$ l'équation de la courbe. Nous déterminerons la tangente en M par l'angle OMT $=$ V qu'elle forme avec le rayon vecteur. A cet effet, menons la sécante SMM', et soit OM'M $=$ V', de manière que V $=$ lim V' (*). Abaissant MP perpendiculaire à OM', nous aurons

$$\operatorname{tang} V'=\frac{MP}{PM'}.$$

Or, h étant l'accroissement de l'amplitude, et k l'accroissement du rayon vecteur,

$$MP=u\sin h,\quad PM'=OM'-OP=u+k-u\cos h;$$

donc

$$\operatorname{tang} V'=\frac{u\sin h}{u+k-\cos h}.$$

Si l'on supposait immédiatement $h=0$ et $k=0$, on aurait

$$\operatorname{tang} V=\frac{0}{0};$$

mais il est bien facile d'éviter l'indétermination. En effet,

$$\operatorname{tang} V'=\frac{u\sin h}{2u\sin^2\frac{1}{2}h+k}=\frac{u\dfrac{\sin h}{h}}{u\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}+\dfrac{k}{h}},$$

(*) Le triangle OM'M donne

$$V+TMS=V'+h.$$

Mais TMS et h ont pour limites zéro; donc V $=$ lim V'.

d'où, à cause de $\lim \frac{\sin \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} = 1$,

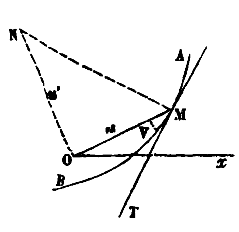
$$\lim \operatorname{tang} V' = \operatorname{tang} V = \frac{u}{\lim \frac{k}{h}},$$

ou enfin

$$\operatorname{tang} V = \frac{u}{u'},$$

en appelant u' la dérivée de u par rapport à ω.

139. De la formule $\operatorname{tang} V = \frac{u}{u'}$, on conclut une assez simple construction de la tangente. MT étant cette droite, menons-lui, par le point de contact M, la perpendiculaire MN (c'est-à-dire la *normale* à la courbe); menons aussi, par le pôle, la perpendiculaire ON au rayon vecteur OM. Nous aurons, dans le triangle rectangle MON,



$$\operatorname{tang} N = \frac{\text{OM}}{\text{ON}} = \frac{u}{\text{ON}}.$$

Mais, évidemment, $N = V$; donc, à cause de la formule ci-dessus,

$$\text{ON} = u'.$$

Ainsi, en prenant la perpendiculaire ON proportionnelle à u', on déterminera la normale NM, et, par suite, la tangente MT.

Problèmes sur les tangentes.

140. Problème I. — *Mener, à une courbe algébrique, une tangente par un point extérieur donné.*

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe. L'équation de la tangente au point de contact inconnu (x', y') est

$$(y - y')F'_{y'} + (x - x')F'_{x'} = 0.$$

Cette droite devant passer par le point donné (α, β), les inconnues x', y' doivent vérifier l'équation

$$(\beta - y')F'_{y'} + (\alpha - x')F'_{x'} = 0. \quad (1)$$

On a, en outre,

$$F(x', y') = 0. \quad (2)$$

On devra donc, dans chaque cas particulier, chercher les systèmes de valeurs réelles de x' et de y' qui satisferont aux équations (1) et (2).

141. *Remarque.* — On a vu ci-dessus que, m étant le degré de l'équation (2), la fonction $y'F'_{y'} + x'F'_{x'}$, de degré m, peut être réduite à un polynôme de degré $m - 1$ au plus. Conséquemment, d'après un théorème dû à *Bezout*, l'élimination de l'une des inconnues, de y' par exemple, donnera une *équation finale* en x' dont le degré ne pourra pas surpasser $m(m-1)$.

En d'autres termes, *le nombre des tangentes que l'on peut mener à une courbe d'ordre m, par un point non situé sur cette courbe, ne peut surpasser* $m(m-1)$.

142. Au lieu de considérer, dans les équations ci-dessus, x' et y' comme des inconnues, on peut les regarder comme des coordonnées courantes; alors l'équation (1), ou plutôt l'équation

$$\beta F'_y + \alpha F'_x + U_{m-1} + 2U_{m-2} + \ldots + mU_0 = 0, \quad (3)$$

obtenue comme il a été dit ci-dessus, est celle d'un lieu géométrique passant par les points de contact.

143. *Application au second ordre.* — Dans le cas où

$$F(x, y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F,$$

l'équation (3) devient

$$\beta(2Ay + Bx + D) + \alpha(By + 2Cx + E) + Dy + Ex + 2F = 0 \ (^*).$$

144. Problème II. — *Mener, à une courbe donnée, une tangente parallèle à une droite donnée.*

a étant le coefficient angulaire de la droite, les coordonnées x, y du point de contact seront données par les deux équations

$$F(x, y) = 0, \quad (1) \quad F'_x + aF'_y = 0. \quad (2)$$

Si la première équation est de degré m, l'autre sera du degré $m-1$; par conséquent, *le nombre des tangentes parallèles à une direction donnée est, au plus,* $m(m-1)$.

(*) Cette équation, du premier degré en x et y, représente *la corde des contacts,* ou *la polaire* du point (α, β).

145. Dans le cas particulier où la tangente cherchée doit être parallèle à l'axe des abscisses, $a = 0$; donc les coordonnées des points de contact seront données par les deux équations

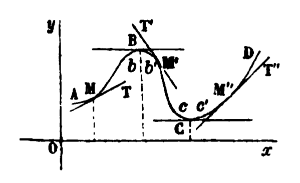
$$F(x, y) = 0, \quad F'_x = 0.$$

De même, les points de contact des tangentes parallèles à l'axe des ordonnées seront déterminés par les équations

$$F(x, y) = 0, \quad F'_y = 0.$$

Application de la théorie des tangentes à la discussion des courbes.

146. La discussion du coefficient angulaire de la tangente peut servir à reconnaître les particularités ou les *affections* principales que présente une courbe. Par exemple, comme *une fonction est croissante ou décroissante selon que sa dérivée est positive ou négative* (*Alg.*, **224**), il s'ensuit qu'*une courbe ayant pour équation* $y = f(x)$, *l'ordonnée* y *augmente ou diminue avec* x, *suivant que* $f'(x)$ *est positive ou négative; c'est-à-dire suivant que la tangente au point* (x, y) *fait, avec la partie positive de l'axe des abscisses, un angle aigu ou un angle obtus* (*). Du reste, ce résultat paraît évident par la figure ci-jointe.



147. *Ordonnées maximums et minimums.* — Au point B, l'ordonnée cesse de croître, pour décroître ensuite : on dit qu'elle atteint un *maximum*, ou qu'elle devient maximum (*Alg.*, **225**). De même, au point C, l'ordonnée est un *minimum*. D'ailleurs, le long des petits arcs bb', cc', $f'(x)$ passe du positif au négatif, ou réciproquement; donc, pour ces points mêmes, on a $f'(x) = 0$ (**). De là le théorème suivant, sur lequel nous reviendrons bientôt:

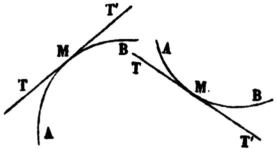
Les valeurs de x *qui rendent* $f(x)$ *maximum ou minimum, sont comprises parmi les racines réelles de l'équation* $f'(x) = 0$.

148. *Sens de la convexité ou de la concavité.* — Quand une

(*) Nous supposons ici, pour plus de simplicité, les axes rectangulaires.

(**) Ceci suppose que $f'(x)$ est continue dans l'intervalle considéré.

courbe AB est située *au-dessous* de sa tangente TT', elle tourne sa *convexité* vers le haut de la figure, et sa *concavité* vers le bas. Le contraire a lieu quand la courbe est *au-dessus* de la tangente.



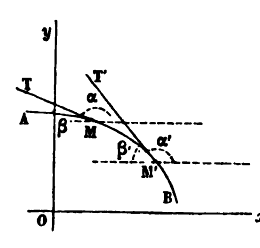
D'un autre côté, il est aisé de voir que, dans le premier cas, le coefficient $f'(x)$ *décroît* avec x, tandis que cette fonction est croissante dans le second cas (*). D'après la règle qui sert à reconnaître si une fonction est croissante ou décroissante, on peut donc affirmer que :

Une courbe dont l'équation est $y = f(x)$, tourne sa convexité vers le haut ou vers le bas de la figure, suivant que la seconde dérivée de l'ordonnée $f''(x)$ est négative ou positive.

149. *Points d'inflexion.* — Il peut arriver que la courbe, après avoir tourné sa convexité dans un sens, la tourne en sens contraire : les points où se fait le changement sont appelés *points d'inflexion*. Le raisonnement employé à propos des points pour lesquels $f(x)$ est maximum ou minimum, est applicable ici, en sorte que :

Les valeurs de x correspondant aux points d'inflexion d'une courbe représentée par $y = f(x)$, sont comprises parmi les racines réelles de l'équation $f''(x) = 0$ (**).

(*) Le cas où l'arc AB aurait la situation indiquée ci-contre pouvant embarrasser le lecteur, nous le considérerons spécialement.



Remarquons d'abord que l'angle α, qui a pour tangente trigonométrique $f'(x)$, s'obtient en menant par le point M une parallèle à l'axe des abscisses, dirigée de gauche à droite, et en considérant le segment MT de la tangente situé *au-dessus* de cette parallèle. Cela posé, il est clair que, le long de l'arc AB, α *diminue* quand x augmente ; donc l'angle *aigu* β, supplément de α, *augmente* avec x. D'ailleurs cet angle aigu varie dans le même sens que sa tangente trigonométrique, dont la valeur est $-f'(x)$. Donc aussi $-f'(x)$ croît avec x; et, par suite, $f(x)$ décroît quand x croît; etc.

(**) Ce théorème suppose que $f''(x)$ est continue le long de l'arc con-

Application de la théorie des tangentes aux questions de maximums et de minimums.

150. Rappelons d'abord que :

1°. *$f(x)$ est maximum pour $x = a$, si l'on a*

$$f(a) > f(a \pm h),$$

h étant une quantité suffisamment petite. De même, *$f(x)$ est minimum pour $x = b$, si l'on a*

$$f(b) < f(b \pm h);$$

2°. *Les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum, sont comprises parmi les racines réelles de $f'(x) = 0$* (*).

151. Ajoutons, pour compléter cette règle, que *l'on distingue le maximum du minimum par le signe de $f''(x)$: suivant que la racine de $f'(x) = 0$ rend cette seconde dérivée négative ou positive, $f(x)$ est maximum ou minimum* (148). Et si cette racine b annule $f''(x)$, alors $f(b)$ n'est, *ordinairement,* ni un maximum ni un minimum de $f(x)$.

152. *Maximum ou minimum d'une fonction de deux variables indépendantes.*

Soit $z = f(x, y)$, et supposons d'abord que y soit une fonction de $x : y = \varphi(x)$. En appliquant la règle relative à la dérivée d'une fonction composée (*Alg.*, 210), on aura, pour déterminer le maximum ou le minimum de z,

$$f'_x + \varphi'(x).f'_y = 0. \quad (1)$$

Pour passer au cas où y est indépendant de x, il suffit de regarder $\varphi(x)$ comme une fonction complétement *arbitraire :* en effet,

---

sidéré. En outre, il peut arriver qu'une racine réelle de $f''(x) = 0$ ne corresponde pas à un point d'inflexion. Par exemple, $y = x^4$.

(*) Observons néanmoins que, dans certains cas, le maximum ou le minimum de $f(x)$ peuvent être déterminés par $f'(x) = \infty$. Si l'on considère, par exemple, la seconde *parabole cubique* représentée par

$$y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2},$$

on voit que l'ordonnée correspondant à $x = 1$ est plus petite que les ordonnées répondant à $x = 1 \pm h$. Ainsi $x = 1$ rend y minimum. Or, cette valeur de x rend *infinie* la dérivée y'.

il est indifférent de supposer qu'à une valeur *quelconque* de x correspond une valeur *quelconque* de y, ou de supposer que ces deux variables sont indépendantes l'une de l'autre. L'équation devant subsister quelle que soit $\varphi'(x)$, se décompose en

$$f'_x = 0, \quad \text{et} \quad f'_y = 0. \quad (2)$$

Ainsi, *pour déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction de deux variables indépendantes, on égale à zéro les dérivées partielles de cette fonction.* La même règle subsiste pour une fonction de plusieurs variables indépendantes.

Afin de ne pas trop nous écarter du Programme, nous passerons sous silence la règle qui sert à distinguer le maximum du minimum.

EXERCICES.

I. Trouver le maximum de $z = \frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$.

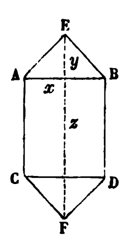
Résultat : $M = 1$.

II. Trouver le maximum ou le minimum de $z = \frac{x^p + y^q}{x^q + y^p}$.

Résultat : Il n'y a ni maximum ni minimum.

III. Inscrire, dans une circonférence, un polygone de périmètre maximum.

Résultat : Le polygone doit être régulier.



IV. Quelles doivent être les dimensions du corps ABCDEF, composé d'un cylindre terminé par deux cônes égaux, pour que, sous une surface donnée, il renferme un volume maximum?

Réponse : $x = \frac{a}{\sqrt[4]{5}}$, $y = z = \frac{2a}{\sqrt[4]{125}}$; $2\pi a^2$ étant l'aire donnée.

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

Préliminaires.

153. En général, si deux courbes ont deux branches infinies qui s'approchent indéfiniment l'une de l'autre sans jamais se rencontrer, on dit que ces courbes sont *asymptotes* (*) l'une à l'autre. Dans les éléments, on ne s'occupe que des asymptotes rectilignes, et alors on appelle *asymptote* d'une courbe, *une droite dont la courbe s'approche indéfiniment, sans pouvoir jamais l'atteindre.*

154. La définition précédente suppose, implicitement, la recherche des *branches infinies* des courbes; et cette recherche, à son tour, est fondée sur la *théorie des racines infinies*. Nous ne pourrions, sans sortir du cadre qui nous est imposé, entrer dans les détails de cette dernière théorie; nous nous contenterons de quelques notions préliminaires (**).

155. Soit l'équation à une seule inconnue

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Sx + T = 0.$$

Supposons, pour plus de simplicité, les coefficients B, C,..., S, T *constants;* supposons, en outre, que le coefficient A, fonction d'une variable a, s'annule pour une valeur réelle α de cette variable. Si, en donnant à a une valeur $\alpha + h$ très-peu différente de α, on fait acquérir à l'équation (2) une racine réelle, positive ou négative, mais très-grande; et si cette racine, constamment réelle, croît au delà de toute limite quand h converge vers zéro, on dit que *l'équation* (2) *a une racine infinie pour* $a = \alpha$, *c'est-à-dire quand le coefficient* A *de son premier terme se réduit à zéro.*

Ainsi, l'équation $ax^3 - 1 = 0$, dans laquelle a est supposé *positif,* a une racine égale à $+\infty$ quand $a = 0$. Cette même équa-

(*) Ou plutôt *asymptotiques.*

(**) Le lecteur pourra consulter sur ce sujet nos *Feuilles d'Application de l'Algèbre à la Géometrie.*

tion admettra une racine égale à $-\infty$ si, après avoir supposé a *négatif*, on fait $a = 0$.

156. *Pour que l'équation* (1) *ait une racine infinie, il faut que le coefficient* A *de son premier terme soit égal à zéro.*

En effet, tant que ce coefficient A est différent de zéro, on peut assigner *une limite supérieure*, soit des racines positives, soit des racines négatives (*Alg.*, chap. XVII).

157. *La condition* $A = 0$ *n'est pas suffisante.*

Il suffit, pour justifier cette proposition, de considérer l'équation $a^2 x^2 + 1 = 0$: les deux racines de cette équation sont imaginaires, quelle que soit la valeur réelle attribuée au paramètre a.

L'équation $a^2 x^4 + x^2 - 1 = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires.

Mais, comme $+1$ et -1 sont *limites* des racines, on ne peut pas dire que cette équation a deux racines infinies pour $a = 0$.

158. Soit actuellement

$$F_0(y)x^m + F_2(y)x^{m-1} + \ldots + F_m(y) = 0, \quad (1)$$

l'équation d'une courbe algébrique. $F_0(y)$, $F_1(y)$, ..., $F_m(y)$ sont des polynômes entiers. Pour chercher, en premier lieu, si l'on peut satisfaire à cette équation au moyen d'une valeur *finie* de y, jointe à une valeur *infinie* de x, on devra, conformément à ce qui vient d'être indiqué, poser $F_0(y) = 0$. En désignant par β une racine réelle de cette équation, on devra remplacer, dans l'équation (1), y par $\beta \pm h$, et examiner (*) si, h diminuant indéfiniment, une ou plusieurs racines réelles de cette équation croîtront au delà de toute limite. Quand il en sera ainsi, la courbe aura une ou plusieurs branches infinies, *parallèles* (**) à l'axe des abscisses.

159. Si, au lieu d'ordonner l'équation de la courbe par rapport aux puissances décroissantes de x, on l'ordonne suivant les puissances décroissantes de y, on obtiendra les *branches infinies pa-*

(*) Nous sommes obligé de passer sous silence l'indication des règles au moyen desquelles on peut faire cet examen.

(**) L'expression de branche infinie, *parallèle* à une certaine direction, signifie que le rayon vecteur, mené de l'origine à un point de la courbe, tend à devenir parallèle à cette direction, quand son extrémité mobile s'éloigne indéfiniment sur la courbe.

rallèles à l'axe des ordonnées, situées à des distances finies de cet axe.

160. Pour obtenir les branches infinies *obliques aux deux axes,* faisons, dans l'équation de la courbe, $x = u\cos\omega$, $y = u\sin\omega$, de manière à passer des coordonnées, supposées rectangulaires, à des coordonnées polaires. L'équation transformée sera

$$A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + A_2 u^{m-2} + \ldots + A_m = 0, \quad (6)$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots$, *étant des fonctions homogènes de* $\sin\omega$ *et* $\cos\omega$, respectivement des degrés m, $m-1$, $m-2, \ldots$. Le terme $A_0 u^m$, par exemple, provient de l'ensemble des termes de degré m, dans lesquels on a remplacé x par $u\cos\omega$ et y par $u\sin\omega$. Après cette substitution, u^m est devenu facteur commun, etc.

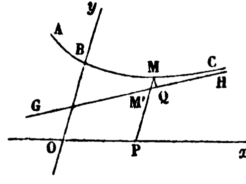
Cela posé, on peut raisonner sur l'équation (6), absolument comme sur l'équation (1). Par conséquent, après avoir tiré de l'équation $A_0 = 0$ une valeur réelle α de l'angle ω, on remplacera ω par $\alpha + h$, et on examinera si, pour des valeurs de h suffisamment petites, l'équation (6) peut acquérir une racine réelle plus grande qu'une quantité donnée. Si cela arrive, il y aura des points de la courbe aussi éloignés qu'on le voudra de l'origine; c'est-à-dire que la courbe aura une branche infinie dans la direction représentée par $\omega = \alpha$.

161. *Remarque.* — La résolution de l'équation $A_0 = 0$ donne, tout à la fois, les branches infinies obliques ou parallèles aux deux axes, et même, parmi ces dernières, *celles qui s'éloignent indéfiniment de l'axe qui leur est parallèle :* les coordonnées polaires ont donc, dans la théorie des branches infinies, un grand avantage sur les coordonnées rectilignes.

Coordonnées rectilignes.

162. *Asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées.* — La recherche des branches infinies parallèles à cet axe (159) donne immédiatement les asymptotes parallèles à ce même axe. En effet, si l'équation de la courbe est vérifiée par une valeur α de x, finie et réelle, et par une valeur infinie de y, il est clair que $x = \alpha$ représente une droite dont la courbe s'approche indéfiniment, sans jamais l'atteindre : en d'autres termes, $x = \alpha$ est l'équation d'une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.

163. *Asymptotes obliques à l'axe des ordonnées* (*méthode de M. Cauchy*). — L'équation de l'asymptote cherchée GH est de la forme $y' = cx + d$. La différence MM' entre les ordonnées MP, M'P de deux points correspondants, a pour expression $\frac{\text{MQ}}{\sin(\theta - \alpha)}$, θ étant l'angle des axes, et α, l'inclinaison de l'asymptote sur Ox. Par la définition de l'asymptote, MQ a pour limite zéro. D'ailleurs $\sin(\theta - \alpha)$ est une constante différente de zéro, attendu que GH est supposée oblique à Oy. Donc, à partir d'une certaine valeur de x, MM' diminue indéfiniment lorsque x augmente. Conséquemment, la valeur de l'ordonnée MP doit être de la forme $y = cx + d + \text{V}$, V étant une quantité qui diminue indéfiniment lorsque x augmente, et qui s'annule pour $x = \infty$.



Divisant tous les termes par x, on a

$$\frac{y}{x} = c + \frac{d}{x} + \frac{\text{V}}{x}:$$

$\frac{\text{V}}{x}$ a pour limite zéro, $\frac{d}{x}$ tend également vers zéro; donc

$$c = \lim \frac{y}{x}. \quad (\text{A})$$

On a ensuite $$d = y - cx - \text{V};$$

d'où $$d = \lim(y - cx). \quad (\text{B})$$

164. Supposons que l'équation de la courbe soit algébrique, et que son premier membre soit décomposé en plusieurs parties homogènes, respectivement des degrés m, $(m-1)$, $(m-2)$,.... Si nous posons $y = cx$, cette équation deviendra, d'après ce que l'on a vu précédemment,

$$\text{F}_0(c)x^m + \text{F}_1(c)x^{m-1} + \text{F}_2(c)x^{m-2} + \ldots = 0. \quad (1)$$

D'après la formule (A), on doit chercher vers quelle limite tend $\frac{y}{x}$ lorsque x croît indéfiniment, ou, ce qui est équivalent, quelle valeur on doit attribuer à c, pour que l'équation (1) ait une racine infinie. Le coefficient c sera donc déterminé par $\text{F}_0(c) = 0$.

En second lieu, posons

$$y = cx + d, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = c + \frac{d}{x};$$

ce qui revient à remplacer, dans l'équation (1), c par $c + \frac{d}{x}$, et à déterminer d par la condition que x ait une seconde valeur infinie. Cette équation devient

$$\mathrm{F}_0\left(c+\frac{d}{x}\right)x^m + \mathrm{F}_1\left(c+\frac{d}{x}\right)x^{m-1} + \mathrm{F}_2\left(c+\frac{d}{x}\right)x^{m-2} + \ldots = 0,$$

ou, en développant chaque terme par le théorème de Taylor,

$$\begin{aligned} &x^m\left[\mathrm{F}_0(c) + \frac{d}{x}\mathrm{F}'_0(c) + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{x^2}\mathrm{F}''_0(c) + \ldots\right] \\ &+ x^{m-1}\left[\mathrm{F}_1(c) + \frac{d}{x}\mathrm{F}'_1(c) + \ldots\right] \\ &+ x^{m-2}\left[\mathrm{F}_2(c) + \ldots\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, on a, en observant que $\mathrm{F}_0(c) = 0$,

$$[d\mathrm{F}'_0(c) + \mathrm{F}_1(c)]x^{m-1} + \left[\frac{1}{2}d^2\mathrm{F}''_0(c) + d\mathrm{F}'_1(c) + \mathrm{F}_2(c)\right]x^{m-2} + \ldots = 0.$$

A cause de la formule (B), cette équation ne doit avoir lieu qu'au moment où x devient infinie; donc

$$\mathrm{F}'_1(c) + \mathrm{F}_1(c) = 0, \quad \text{ou} \quad d = -\frac{\mathrm{F}_1(c)}{\mathrm{F}'_0(c)}.$$

165. Il peut se présenter différents cas :

1°. Si la valeur de d est finie et déterminée, la droite représentée par $y = cx + d$ sera ordinairement une asymptote de la courbe.

2°. Si l'on a $\mathrm{F}_1(c) \gtrless 0$, $\mathrm{F}'_0(c) = 0$, il n'y a pas d'asymptote, car $d = \infty$; ou, si l'on veut, il y a *une asymptote située à l'infini*.

3°. Soit $\mathrm{F}_1(c) = 0$, $\mathrm{F}'_0(c) = 0$: dans ce cas, la valeur de c annule les deux premiers termes de l'équation en x, sans qu'il soit besoin d'attribuer à d aucune valeur particulière. Cette équation descendant au degré $m - 2$, on devra poser

$$\frac{1}{2}d^2\mathrm{F}''_0(c) + d\,\mathrm{F}'_1(c) + \mathrm{F}_2(c) = 0.$$

Si les racines de cette équation sont réelles et finies, il y aura deux asymptotes parallèles à la droite $y = cx$.

4°. Dans le cas où la valeur de c annulerait le terme du degré $(m-2)$, on égalerait à zéro le coefficient du terme en x^{m-3}, etc.

5°. Si l'équation de la courbe ne contient pas de terme du degré $m-1$, $F_1(c) = 0$; donc $d = 0$, et *les asymptotes passent par l'origine.*

Application au second ordre.

166. Soit l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Elle donne

$$F_0(c) = Ac^2 + Bc + C, \quad F_1(c) = Dc + E, \quad F'_0(c) = 2Ac + B.$$

Posons d'abord

$$Ac^2 + Bc + C = 0; \text{ d'où } c = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

1°. $B^2 - 4AC < 0$: les valeurs de c sont imaginaires; donc *l'ellipse n'a pas d'asymptotes;* ce qui était évident à priori.

2°. $B^2 - 4AC = 0$: $c = -\frac{B}{2A}$; ainsi *la parabole a peut-être des asymptotes.*

3°. $B^2 - 4AC > 0$: les valeurs de c sont réelles et inégales; ce qui indique deux directions pour les asymptotes de l'hyperbole.

167. Calculons

$$d = -\frac{F_1(c)}{F'_0(c)} = -\frac{Dc + E}{2Ac + B}.$$

1°. Pour la parabole, $c = -\frac{B}{2A}$; donc $d = -\frac{2AE - BD}{0} = \infty$, pourvu que le numérateur soit différent de zéro. Si $2AE - BD = 0$, l'équation donnée représente deux droites parallèles (**121**). En résumé, *la parabole n'a pas d'asymptotes.*

2°. Dans le cas de l'hyperbole, nous aurons, en remplaçant c par ses deux valeurs,

$$d = \frac{BD - 2AE \pm D\sqrt{B^2 - 4AC}}{\pm 2A\sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

Les asymptotes sont donc représentées par

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} x + \frac{BD - 2AE \mp D\sqrt{B^2 - 4AC}}{\pm 2A\sqrt{B^2 - 4AC}}$$

$$= -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\left[x\sqrt{B^2 - 4AC} + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right].$$

168. *Autre méthode.* — Supposons l'équation de l'hyperbole résolue par rapport à y. Nous aurons

$$y = ax + b \pm \sqrt{nx^2 + 2px + q},$$

n étant positif. Cette formule donne

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} \pm \sqrt{n + \frac{2p}{x} + \frac{q}{x^2}}.$$

Donc
$$\lim \frac{y}{x} = c = a \pm \sqrt{n}.$$

Nous aurons ensuite

$$y - cx = b \pm \left(\sqrt{nx^2 + 2px + q} - x\sqrt{n}\right).$$

Quand on fait x infini, la quantité entre parenthèses devient $\infty - \infty$. Pour éviter l'indétermination, multiplions et divisons par $\sqrt{nx^2 + 2px + q} + x\sqrt{n}$:

$$y - cx = b \pm \frac{2px + q}{\sqrt{nx^2 + 2px + q} + x\sqrt{n}},$$

puis
$$\lim(y - cx) = d = b \pm \frac{p}{\sqrt{n}}.$$

Les équations des asymptotes sont donc

$$y = ax + b \pm \left(x\sqrt{n} + \frac{p}{\sqrt{n}}\right).$$

De là, cette règle très-simple :

L'ordonnée de l'asymptote se déduit de celle de l'hyperbole par le changement du radical en un binôme tel, que les deux premiers termes de son carré soient les deux premiers termes du trinôme placé sous le radical.

169. Il est bon d'observer que les asymptotes de l'hyperbole et

le diamètre représenté par $y = ax + b$, se coupent au point ayant pour abscisse $-\frac{p}{n}$, c'est-à-dire au *centre* de l'hyperbole.

170. On peut vérifier que les deux droites représentées par

$$y_1 = ax + b \pm \left(x\sqrt{n} + \frac{p}{\sqrt{n}}\right)$$

sont asymptotiques à chacune des branches de l'hyperbole dont l'équation est

$$y = ax + b \pm \sqrt{nx^2 + 2px + q}.$$

Pour abréger, nous supprimons cette discussion; mais nous engageons le lecteur à la faire avec soin, en considérant successivement les quatre *demi-branches* de l'hyperbole.

171. L'application des formules du n° 163, faite d'une manière peu intelligente, peut donner quelquefois des asymptotes qui n'existent pas. Pour ne citer qu'un exemple, considérons l'équation

$$(y^2 - x^2)^2 + y^2 + x^2 - 1 = 0.$$

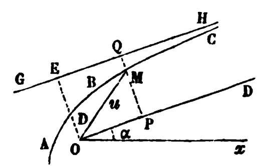
Elle donne $$F_0(c) = (c^2 - 1)^2, \quad F_1(c) = 0,$$

d'où $$c = \pm 1, \quad d = 0.$$

Ainsi, il semblerait que les droites représentées par $y = \pm x$ soient des asymptotes. Mais il est facile de voir que la courbe représentée par l'équation ci-dessus n'a pas de branches infinies; donc elle ne saurait avoir d'asymptotes.

Coordonnées polaires.

172. Remarquons d'abord que, *si une branche infinie* ABC *a une asymptote* GH, *la limite des directions des rayons vecteurs qui rencontrent la courbe, est la droite* OD, *menée par l'origine, parallèlement à l'asymptote.*



Menons MP perpendiculaire à OD. Quand le point M s'éloigne indéfiniment sur la branche ABC, le rayon vecteur OM et sa projection OP croissent au delà de toute limite, tandis que MP tend vers une

limite finie, égale à la perpendiculaire OE abaissée de l'origine sur l'asymptote. Donc *lim. angle* MOP = o.

Cela posé, si $f(u, \omega) = 0$ est l'équation de la courbe, on cherchera les valeurs *finies* α, α', α'',..., de l'amplitude ω, qui rendent *infini* le rayon vecteur u, et l'on aura ainsi les *directions des asymptotes*. Il ne restera plus, pour déterminer complétement ces droites, qu'à chercher leurs distances à l'origine. Or, soient α l'angle de GH avec Ox, et d la distance OE; on aura, par ce qui précède,

$$d = \lim u \sin(\omega - \alpha) \quad \textit{pour} \quad \omega = \alpha.$$

173. *Remarques.* — I. Le produit $u \sin(\omega - \alpha)$ se présente nécessairement sous forme indéterminée quand on y fait $\omega = \alpha$; car pour cette valeur de ω, $u = \infty$, et $\sin(\omega - \alpha) = 0$. Quand l'équation de la courbe est résolue par rapport à u, on peut aisément trouver la valeur de d.

En effet, supposons que la valeur de u ait été mise sous la forme $\frac{1}{\varphi(\omega)}$, en sorte que α soit une racine réelle de l'équation $\varphi(\omega) = 0$. Reprenons l'expression générale de MP : $u \sin(\omega - \alpha) = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\varphi(\omega)}$; et, avant de supposer $\omega = \alpha$, remplaçons ω par $\alpha + h$. Nous aurons

$$\text{MP} = \frac{\sin h}{\varphi(\alpha + h)};$$

ou, en retranchant du dénominateur la quantité $\varphi(\alpha)$, *identiquement nulle*, et en divisant ensuite les deux termes par h,

$$\text{MP} = \frac{\frac{\sin h}{h}}{\frac{\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha)}{h}}.$$

La limite du numérateur est l'unité, et la limite du dénominateur est $\varphi'(\alpha)$; donc

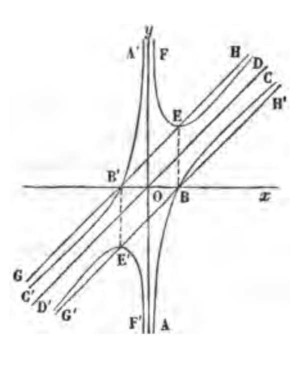
$$d = \lim \text{MP} = \frac{1}{\varphi'(\alpha)} \quad (*).$$

(*) Plus généralement, soit une fraction $y = \frac{f(x)}{F(x)}$ qui devient $\frac{0}{0}$ quand on attribue à x une valeur particulière a. On aura, par le même

II. Si $\varphi'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire *si α n'est pas une racine simple de l'équation* $\varphi(\omega) = 0$, la distance MP croît au delà de toute limite : *il n'y a pas d'asymptote.*

Applications.

174. 1°. $y = x \pm \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - 2x + 2}$. La discussion de cette formule montre que la courbe se compose de quatre branches infinies, symétriques deux à deux par rapport à l'origine. L'axe des y est asymptotique aux quatre arcs EF, E'F', AB, A'B'. D'ailleurs,



$$\frac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4}};$$

donc $c = 1$. Ensuite,

$$y - cx = y - x = \pm\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}};$$

d'où $d = \pm 1$. Les asymptotes obliques sont donc les droites GH, G'H', représentées par $y = x \pm 1$. *Elles coupent la courbe* aux points B, B', E, E' donnés par $x = \pm 1$.

2°. $y^2 = x^2 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 2}$. La courbe a quatre branches infinies. Elle a pour *axes de symétrie* les axes coordonnés (supposés

---

calcul,

$$y = \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\dfrac{F(a+h) - F(a)}{h}};$$

et, pour $x = a$,

$$y = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Ainsi, *pour obtenir la vraie valeur de la fraction, on prend le quotient des dérivées des deux termes, et on y remplace x par a.*

Si ce nouveau quotient se présente aussi sous la forme $\frac{0}{0}$, la vraie valeur est $\frac{f''(a)}{F''(a)}$; etc.

rectangulaires). L'application de la règle générale donne d'abord $c = \pm 1$, puis

$$y - cx = \sqrt{x^2 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \mp x = \frac{\left(x^2 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right) - x^2}{\sqrt{x^2 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \pm x}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}} \pm 1}.$$

Les deux quantités représentées par cette dernière formule ont pour limite $\pm \frac{1}{2}$. Conséquemment, l'équation des asymptotes est $y = \pm\left(x \pm \frac{1}{2}\right)$. La courbe a donc *quatre* asymptotes.

3°. $y^2 = x^2 \pm x\sqrt{x}$. La courbe a deux branches infinies passant par l'origine.

On trouve, comme ci-dessus, $c = \pm 1$. Mais comme

$$y - cx = \pm \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{1}{x}}} \pm 1},$$

quantités qui peuvent croître au delà de toute limite, *la courbe n'a pas d'asymptote*.

4°. $u = \frac{1}{1 - 2\sin\frac{1}{2}\omega}$. On a $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$;

donc $\alpha = 60°$ et $\alpha = 300°$.

Considérons, par exemple, la direction déterminée par $\alpha = 60°$.

$$\varphi'(\omega) = -\cos\frac{1}{2}\omega; \quad \text{d'où} \quad \varphi'(\alpha) = -\cos 30° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Nous aurons ensuite $d = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$ (en valeur absolue). La première asymptote est donc complétement déterminée. On trouverait de même la seconde.

5°. $u = \frac{1}{\omega}$. Cette équation est celle de la *spirale hyperbolique*, qui tourne indéfiniment autour du pôle, sans jamais l'atteindre.

Pour cette raison, le pôle est appelé *point asymptotique*. La condition $u = \infty$ donne $\omega = 0$. Ainsi la courbe a deux branches infinies, parallèles à l'axe polaire. La formule $d = \frac{1}{\varphi'(x)}$ donne $d = 1$. Les deux branches ont donc pour asymptotes des droites parallèles à l'axe.

6°. $u = \frac{\cos\omega - \cos 2\omega}{\cos\omega + \cos 2\omega} = \operatorname{tang}\frac{3}{2}\omega . \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$. Les directions des branches infinies sont données par $\alpha = \pm 60°$ et $\alpha = \pm 180°$. Considérons la valeur $\alpha = 60°$. Nous aurons

$$u \sin(\omega - 60°) = \frac{\sin\frac{3}{2}\omega . \sin\frac{1}{2}\omega . \sin(\omega - 60°)}{\cos\frac{3}{2}\omega . \cos\frac{1}{2}\omega}.$$

Le facteur $\frac{\sin(\omega - 60°)}{\cos\frac{3}{2}\omega}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $\omega = 60°$. Sa vraie valeur, d'après la règle démontrée ci-dessus, est $-\frac{2}{3}$.

Conséquemment,

$$d = -\frac{2}{3}\operatorname{tang} 45° = -\frac{2}{3}.$$

Le signe — indique que l'asymptote est située au-dessous du rayon vecteur incliné de 60° sur l'axe polaire.

Les branches parallèles à l'axe polaire n'ont pas d'asymptotes.

EXERCICES.

I. Trouver les branches infinies et les asymptotes des courbes ayant pour équations,

$$y^3 - 3yx^2 + 2x^3 + y + x = 0,$$

$$(y^3 - 3y + 2)x^3 - 2(y - 1)^2 x + 1 = 0,$$

$$(y - x)^3(y + x) - 2(y - x)^3 + (y - x)x + 1 = 0,$$

$$x^3 - 3y^2 x + 2y^3 - 1 = 0,$$

$$4(x^2 + x - 2)y^4 - 8(x^3 - 1)y^2 + 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0,$$

$$y = x - l(e^x - 1),$$

$$u = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}\cos 6\omega}, \quad u = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\cos\frac{2}{5}\omega},$$

$$u = \frac{\sin 3\omega - \sin\omega}{\omega}.$$

II. Valeur de $y = \frac{(3 + x^2)\,\text{arc tang}\,x - 3x}{x^3}$, pour $x = 0$.

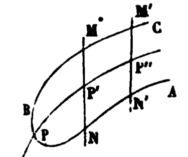
III. Soit $u = \frac{1}{\varphi(\omega)}$ l'équation d'une courbe dont l'asymptote est déterminée par $\varphi(\alpha) = 0$, $d = \frac{1}{\varphi'(\alpha)}$; soit δ la distance comprise entre la courbe et l'asymptote, cette distance étant comptée sur le rayon vecteur; on aura, pour $\omega = \alpha$,

$$\delta = \frac{\varphi''(\alpha)}{2[\varphi'(\alpha)]^2}.$$

CHAPITRE XV.

THÉORIE DES DIAMÈTRES.

175. On appelle *diamètre* d'une courbe ABC, une ligne PP'P" qui partage en deux parties égales toutes les cordes MN, M'N', parallèles à une direction donnée.



Recherche des diamètres d'une courbe.

176. Soit
$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$
l'équation de la courbe; les cordes parallèles à la direction donnée pourront être représentées par

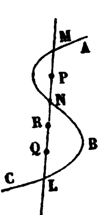
$$y = mx + \alpha, \quad (2)$$

m étant une constante et α un *paramètre* variable. Pour avoir les abscisses des points où la droite rencontre la courbe, on élimine y entre les équations (1) et (2); ce qui donne

$$F(x, mx + \alpha) = 0. \quad (3)$$

Remarquons actuellement que si la droite MN rencontre ABC

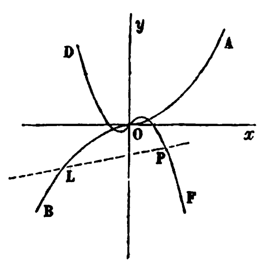
en plusieurs points M, N, L,..., ces points, considérés deux à deux, déterminent des cordes MN, ML, NL,.... Dans chacune, d'elles l'abscisse du milieu est égale à la demi-somme des abscisses des extrémités. Ainsi, x' et x'' étant deux racines réelles de l'équation (3), l'abscisse x_1 du milieu de la corde correspondante sera donnée par $x_1 = \frac{x' + x''}{2}$. Il faudra donc, pour obtenir les abscisses de tous les points milieux P, R, Q,... déterminés par la droite MNL,..., former *l'équation aux demi-sommes* des racines de l'équation (3). Soit



$$\varphi(x_1) = 0 \quad (4)$$

cette nouvelle équation. On aura, entre les coordonnées x_1 et y_1 d'un même point du diamètre, la relation $y_1 = mx_1 + \alpha$. Si donc, entre ces deux dernières équations, on élimine α qui varie avec la position de la droite mobile MNL, on aura l'équation du diamètre.

177. *Application.* — Prenons *la première parabole cubique* ABC, représentée par



$$y = x^3. \quad (1)$$

L'équation (3) sera

$$x^3 - mx - \alpha = 0.$$

Ordinairement, la recherche de l'*équation aux demi-sommes* est un calcul pénible. Mais ici on peut recourir à un procédé particulier. En effet, x', x'', x''' étant les trois racines, on a

$$x' + x'' + x''' = 0;$$

donc $\qquad x' + x'' = -x''', \quad \frac{x' + x''}{2} = -\frac{x'''}{2},$

et enfin $\qquad x_1 = -\frac{x'''}{2}.$

Ainsi, l'abscisse du point P est égale à la moitié de l'abscisse du point L, prise en signe contraire. Remplaçant x par $-2x_1$, on a

$$-8x_1^3 + 2mx_1 - \alpha = 0.$$

L'élimination de α donne ensuite

$$y_1 = 3mx_1 - 8x_1^3.$$

La courbe DOF, représentée par cette équation, a la forme indiquée sur la figure (m étant supposé compris entre o et 1).

178. *Application aux courbes du second ordre.* — Les équations (1) et (2) étant

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \quad (1)$$

$$y = mx + \alpha; \quad (2)$$

si l'on élimine y, on obtiendra une équation de la forme

$$Rx^2 + 2Sx + T = 0. \quad (3)$$

Soient x' et x'' ses racines; l'abscisse du point milieu de la corde est

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2}.$$

Mais $$x' + x'' = -\frac{2S}{R}; \quad \text{donc} \quad x_1 = -\frac{S}{R},$$

ou $$Rx_1 + S = 0. \quad (4)$$

Cette équation (4) étant la dérivée de l'équation (3), on peut, pour la former, prendre la dérivée complète de l'équation (1), en considérant y comme une fonction de x égale à $mx + \alpha$, et remplacer ensuite y par cette valeur. Le premier calcul donne, par le principe des fonctions composées,

$$(2Ay + Bx + D)m + By + 2Cx + E = 0. \quad (5)$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin : l'équation (5) représente le diamètre. En effet, si, conformément à ce qui vient d'être dit, nous remplacions, dans cette équation, y par $mx + \alpha$, il nous resterait ensuite, pour éliminer α, à écrire y au lieu de $mx + \alpha$. Nous retomberions donc sur l'équation (5).

179. *Remarques.* — I. L'équation (5) étant du premier degré, il s'ensuit que, *dans les courbes du second ordre, tous les diamètres sont des lignes droites* (*).

(*) En général, *si l'équation de la courbe donnée est algébrique, et du degré n, le degré de l'équation du diamètre sera* $\frac{n(n-1)}{2}$.

II. Si l'on représente par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (1), on pourra écrire l'équation du diamètre sous cette forme abrégée :

$$mf'_y + f'_x = 0.$$

Propriétés des diamètres, dans les courbes du second ordre.

180. En partant des équations

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \quad (1)$$

$$y = mx + \alpha, \quad (2)$$

nous avons trouvé, pour équation du diamètre,

$$(2Ay + Bx + D)m + By + 2Cx + E = 0. \quad (3)$$

Voici quelques-unes des propriétés qui résultent immédiatement de cette équation :

1°. *La tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales.* En effet, l'équation (3) donne

$$m = -\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D},$$

x et y étant les coordonnées du point commun au diamètre et à la courbe. Or cette valeur est précisément celle du coefficient angulaire de la tangente en ce point. Donc cette tangente est parallèle aux cordes. Cette propriété peut aussi être démontrée géométriquement.

2°. *Dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles entre eux.* Si m' est le coefficient angulaire du diamètre, on a, par l'équation (3),

$$m' = -\frac{Bm + 2C}{2Am + B}.$$

Mais

$$2C = \frac{B^2}{2A};$$

donc

$$m' = -\frac{B(2Am + B)}{2A(2Am + B)} = -\frac{B}{2A} \text{ (*)}.$$

(*) Si l'on avait $2Am + B = 0$, on ne pourrait plus supprimer le facteur commun ; mais il est facile de voir que, dans ce cas, l'équation (3)

Les diamètres de la parabole ont donc pour coefficient angulaire la quantité constante $\left(-\frac{B}{2A}\right)$.

181. *Diamètres conjugués.* — En représentant par m le coefficient angulaire d'une série de cordes, et par m' le coefficient du diamètre correspondant, nous venons de trouver

$m' = -\frac{Bm + 2C}{2Am + B}$, ou, ce qui est équivalent,

$$2Amm' + B(m + m') + 2C = 0.$$

Cette relation est *symétrique* par rapport à m et m', c'est-à-dire qu'elle ne change pas quand on y remplace m par m' et m' par m. Il résulte de là que si l'on considère (dans une ellipse ou dans une hyperbole) deux diamètres dont les coefficients angulaires soient m et m', *chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre*. C'est pour cette raison que ces diamètres sont dits *conjugués*.

Des axes.

182. Examinons si, parmi les diamètres d'une courbe du second ordre, il en est un qui soit perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales : ce diamètre prend le nom d'*axe*. Supposons, pour plus de simplicité, les axes coordonnés rectangulaires : nous devrons avoir, entre les coefficients m et m', la relation $m' = -\frac{1}{m}$ (114); donc le coefficient angulaire des cordes devra vérifier l'équation $-\frac{1}{m} = \frac{Bm + 2C}{2Am + B}$,

ou $$m^2 - 2\frac{A - C}{B}m - 1 = 0. \quad (1)$$

Le dernier terme est négatif; donc il y a deux valeurs réelles de m et deux directions de *cordes principales*.

---

se réduit à $BD - 2AE = 0$, relation qui ne saurait avoir lieu si la courbe donnée est une parabole. Par conséquent, *aux droites dont le coefficient angulaire est* $-\frac{B}{2A}$, *ne correspond aucun diamètre*. Ce résultat tient à ce que *chacune des droites* dont il s'agit *rencontre la parabole en un seul point*.

De plus, ces deux directions sont perpendiculaires entre elles; car le produit des valeurs de m est égal à -1.

183. Si, dans l'équation générale des diamètres :

$$(2Ay + Bx + D)m + (By + 2Cx + E) = 0, \quad (2)$$

nous remplaçons m successivement par les deux racines de l'équation (1), nous obtiendrons les équations des axes de la courbe donnée. Mais si l'on veut représenter les deux axes par une seule équation, il vaut mieux tirer, de l'équation (2), la valeur de m et la substituer dans l'équation (1). On trouve ainsi

$$B(By+2Cx+E)^2+2(A-C)(2Ay+Bx+D)(By+2Cx+E) - B(2Ay+Bx+D)^2 = 0.$$

184. L'équation (1) donne, en général,

$$m = \frac{A - C \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B}.$$

Dans le cas où la courbe donnée est une parabole, $B^2 = 4AC$; donc

$$m = \frac{A-C}{B} \pm \sqrt{\frac{(A-C)^2 + 4AC}{B}} = \frac{B - C \pm (A + C)}{B};$$

savoir; $\qquad m_1 = \frac{2A}{B}, \quad m_2 = -\frac{2C}{B} = -\frac{B}{2A}.$

Cette seconde valeur ne répond à aucune corde (180, 2°); donc la direction des cordes principales est donnée par $m = m_1 = \frac{2A}{B}$, et l'équation de l'*axe de la parabole* est

$$y = -\frac{B}{2A}x - \frac{2AD + BE}{4A^2 + B^2}.$$

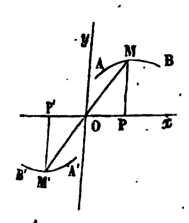
185. En résumé, *l'ellipse a deux axes perpendiculaires entre eux;* il en est de même pour l'hyperbole; mais *la parabole a un seul axe.*

186. *Le cercle a une infinité d'axes.* En effet, les axes coordonnés étant rectangulaires, on a $B = 0$ et $C = A$; donc l'équation $Bm^2 + 2(C - A)m - B = 0$ se réduit à $0 = 0$; donc *pour toute direction de cordes, il y a un axe.* C'est ce que l'on sait par les éléments de Géométrie.

CHAPITRE XVI.

THÉORIE DU CENTRE.

187. On appelle *centre* d'une courbe un point tel, que les points de la courbe sont, deux à deux, symétriquement placés par rapport à ce point.



188. Quand l'origine est un centre de la courbe, les coordonnées des deux points symétriques M, M' sont évidemment égales et de signes contraires. Réciproquement, si les coordonnées des points M, M' sont égales et de signes contraires, ces deux points sont symétriquement placés par rapport à l'origine.

189. Il résulte de là que *si l'équation de la courbe ne change pas* quand on remplace x et y par $-x$ et $-y$, *l'origine est un centre*. En particulier, *si la courbe est algébrique et que son équation ne renferme que des termes de même parité, l'origine est un centre.*

190. *La réciproque n'est pas nécessairement vraie*; c'est-à-dire qu'*une courbe dont l'équation contient des termes de parités différentes, peut avoir pour centre l'origine.*

Considérons, par exemple, l'équation $x^4+y^4-1=0$, qui représente une courbe rapportée à son centre comme origine; et supposons que l'on multiplie le premier membre par

$$(x+1)^2+(y-1)^2+1.$$

L'équation résultante

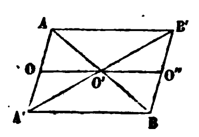
$$(x^4+y^4-1)\left[(x+1)^2+(y-1)^2+1\right]=0,$$

qui, développée, contient des termes de degré pair et des termes de degré impair, équivaut à l'équation primitive; car le facteur $(x+1)^2+(y-1)^2+1$, égalé à zéro, ne représente aucun lieu géométrique.

Dans ce qui suit, nous supposerons, pour plus de simplicité, que l'équation proposée soit *irréductible*. En même temps, nous admettrons la proposition suivante :

Si une courbe algébrique, dont l'équation est irréductible, a pour centre l'origine des coordonnées, tous les termes de cette équation seront de même parité.

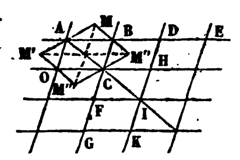
191. Théorème I. — *Si une courbe a deux centres, elle en a une infinité distribués uniformément sur une droite.*



Soient O, O' deux centres d'une courbe à laquelle appartient le point A. Si nous menons les droites AO, AO', et que nous prolongions chacune d'elles d'une longueur égale, les points A', B appartiendront à la courbe. Menons A'O'B' et prenons B'O' = A'O' : B' sera sur la courbe. Enfin, si nous menons encore BB' et OO'O", nous obtiendrons ainsi un parallélogramme AA'BB', dans lequel O"B = O"B', et O'O" = OO'. Par suite, le point O", dont la position est indépendante de la direction attribuée à AA', partage en deux parties égales toutes les cordes telles que BB' : ce point est donc un centre. En répétant la construction, on voit que la courbe a une infinité de centres distribués uniformément sur le prolongement de OO'.

192. Théorème II. — *Si une courbe a trois centres* A, B, C *non situés en ligne droite, elle en admet une infinité distribués uniformément dans son plan.*

Sur la droite indéfinie AB, prenons BD = AB, DE = AB, etc.



Par les points A, D, E,..., menons des parallèles à BC. Coupons ces parallèles par les droites CH, FI, GK,..., parallèles à AB et équidistantes. Les points de rencontre de ces deux systèmes de droites seront autant de centres.

En effet, M étant un point de la courbe, construisons les points M', M" symétriques de M relativement aux centres A, B; construisons ensuite le point M'" symétrique de M" par rapport au centre C. Il est facile de voir que les points M', M'" seront symétriquement placés relativement au quatrième sommet O du parallélogramme ABCO. Le point O est donc un centre; etc.

193. Théorème III. — *Une courbe algébrique ne peut avoir plus d'un centre.*

Il résulte, en effet, de la construction ci-dessus (191), que si une courbe a pour centre les points O, O', la droite A'B rencontrera cette courbe en une infinité de points; ce qui ne peut avoir lieu pour une courbe algébrique (98).

Détermination du centre.

194. Pour savoir si une courbe dont l'équation est $f(x, y) = 0$ a un centre, on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière que l'origine soit le centre inconnu. Si a et b sont les coordonnées de la nouvelle origine, il faudra que chacune des deux équations

$$f(x'+a, y'+b) = 0, \quad f(-x'+a, -y'+b) = 0,$$

représente la courbe. Par suite, en éliminant x' ou y' entre ces dernières équations, on devra parvenir à une équation qui serait *identique*, si la nouvelle origine était effectivement un centre.

On exprimera donc que cette même équation est vérifiée par une valeur arbitraire de y' ou de x', et l'on obtiendra ainsi des équations entre a et b. Si l'on y peut satisfaire par un système de valeurs réelles et finies de a et de b, la courbe aura un centre unique. Dans les autres cas, elle n'aura aucun centre ou elle en aura une infinité.

195. Soit, par exemple, la *sinusoïde*, représentée par $y = \sin x$. L'élimination de y', entre

$$y'+b = \sin(x'+a) \quad \text{et} \quad -y'+b = \sin(-x'+a),$$

donne

$$b = \sin a \cos x.$$

Pour que cette équation soit identique, il faut que l'on ait

$$b = 0, \quad a = k\pi.$$

Par conséquent, *la sinusoïde a une infinité de centres, situés à l'intersection de la courbe avec l'axe des x.*

Application au second ordre.

196. Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad (1)$$

Changeons x en $x+a$, y en $y+b$; nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} Ay^2+Bxy+Cx^2+2Ab \\ \qquad\qquad\qquad\quad +\ Ba \\ \qquad\qquad\qquad\quad +\ D \end{array}\right| \begin{array}{l} y+\ Bb \\ \ +2Ca \\ \ +\ E \end{array} \left| \begin{array}{l} x+Ab^2 \\ +Bab \\ +Ca^2 \\ +Db \\ +Ea \\ +F \end{array}\right\} = 0.$$

Avant d'aller plus loin, comparons l'équation transformée et l'équation primitive :

1°. *Les termes du second degré n'ont pas changé;* 2° *le coefficient de y est la dérivée du premier membre de l'équation proposée, prise par rapport à y, dans laquelle on remplace x par a, y par b;* 3° *le coefficient de x a une composition analogue;* 4° *le terme indépendant est la fonction proposée, dans laquelle on remplace x par a, y par b.*

Pour que la nouvelle origine soit un centre, il faut (190) que les termes du premier degré disparaissent, ou que l'on ait

$$2Ab+Ba+D=0, \quad (2) \qquad Bb+2Ca+E=0. \quad (3)$$

Ce sont là les *équations du centre*. Elles donnent

$$b=\frac{-BE+2CD}{B^2-4AC}, \quad a=\frac{-BD+2AE}{B^2-4AC}.$$

197. Ces valeurs seront finies et déterminées tant qu'on aura $B^2-4AC \gtrless 0$; donc 1° *l'ellipse et l'hyperbole ont chacune un centre unique*. Si $B^2-4AC=0$, les valeurs de a et b sont infinies; donc 2° *la parabole n'a pas de centre.*

Si l'on avait $B^2-4AC=0$, $BD-2AE=0$, l'équation (1) représenterait le système de deux droites parallèles, et le *lieu des centres* serait la droite menée à égales distances des deux autres droites.

198. On peut déterminer le centre de la courbe (1) par l'intersection des deux droites représentées par les équations (2) et (3). Chacune de ces droites est un diamètre de la courbe. En effet, si dans

$$(2Ay+Bx+D)m+(By+2Cx+E)=0, \quad (4)$$

équation générale des diamètres, on suppose $m = 0$, on a

$$By + 2Cx + E = 0,$$

équation qui ne diffère de (3) que par le changement de x en a et de y en b. On verrait de même que l'équation (2) représente le diamètre conjugué des cordes parallèles à l'axe des y.

199. Théorème. — *Tous les diamètres passent par le centre.*

En effet, l'équation (4) peut être regardée comme une conséquence des équations (2) et (3).

EXERCICES.

I. Trouver le centre de la courbe représentée par

$$(y + x)^3 + 3(y + x)^2 + 6y + 10 = 0.$$

II. Trouver les centres des courbes dont les équations sont

$$\cos x + \cos y = 1,$$
$$\sin y = 2 \sin x.$$

CHAPITRE XVII.

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ.

Disparition des termes du premier degré.

200. Pour étudier les propriétés des courbes du second ordre, on cherche d'abord à ramener l'équation de ces courbes à la forme la plus simple possible. C'est là le but de la *réduction de l'équation générale du second degré*.

Soit $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad (1)$$

l'équation de la courbe donnée. Supposons d'abord que cette courbe soit une ellipse ou une hyperbole. En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière à prendre le centre pour nouvelle origine, nous aurons (196), au lieu de (1),

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0, \quad (2)$$

en posant $$F' = Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F.$$

On peut simplifier cette expression de F′. En effet, les équations du centre étant

$$2Ab + Ba + D = 0, \quad Bb + 2Ca + E = 0;$$

si l'on multiplie la première par b, la seconde par a, et qu'on ajoute les résultats, on trouve

$$2Ab^2 + 2Bab + 2Ca^2 + Db + Ea = 0,$$

ou

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 + \frac{Db}{2} + \frac{Ea}{2} = 0;$$

donc

$$F' = \frac{Db}{2} + \frac{Ea}{2} + F \ (^*).$$

Ainsi, *le terme indépendant des variables, dans l'équation transformée, se compose du terme indépendant primitif, augmenté de la demi-somme des termes du premier degré, dans lesquelles on aurait remplacé x et y par les coordonnées du centre* (**).

Disparition du rectangle.

201. Supposons maintenant les axes rectangulaires : s'ils ne l'étaient pas, on commencerait par faire tourner l'axe des y autour de l'origine, ce qui n'introduirait aucun terme du premier degré dans l'équation (2).

Pour faire disparaître le rectangle des variables, changeons la direction des axes, en les laissant perpendiculaires entre eux.

Les formules de transformation étant :

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

la substitution donne

$$\left.\begin{array}{l} A\cos^2\alpha \\ -B\sin\alpha\cos\alpha \\ +C\sin^2\alpha \end{array}\right| y'^2 + \left.\begin{array}{l} 2A\sin\alpha\cos\alpha \\ +B\cos^2\alpha \\ -B\sin^2\alpha \\ -2C\sin\alpha\cos a \end{array}\right| x'y' + \left.\begin{array}{l} A\sin^2\alpha \\ +B\sin\alpha\cos\alpha \\ +C\cos^2\alpha \end{array}\right| x'^2 + F' = 0.$$

(*) Si l'on remplace a et b par leurs valeurs (196), on obtient

$$F' = F + \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC}.$$

(**) Cette simplification, analogue à la réduction de l'équation de la tangente (136), est fondée, comme celle-ci, sur le *théorème des fonctions homogènes* (135).

L'angle α, que fait le nouvel axe des abscisses avec l'ancien, sera déterminé par l'équation

$$(A - C)\, 2 \sin\alpha \cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \ (^*), \quad (3)$$

ou
$$(A - C) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha = 0;$$

d'où
$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{B}{A - C}. \quad (4)$$

202. Cette formule donne toujours pour 2α une valeur réelle, attendu que la tangente peut passer par tous les états de grandeur; donc la réduction proposée est possible.

Il n'y a qu'une manière de l'effectuer (**). En effet, soit $2\alpha'$ le plus petit angle positif ayant pour tangente $\left(-\frac{B}{A-C}\right)$: les valeurs de 2α seront

$$2\alpha = 2\alpha', \quad 2\alpha = 2\alpha' + \pi, \quad 2\alpha = 2\alpha' + 2\pi, \quad 2\alpha = 2\alpha' + 3\pi \ldots.$$

On aura donc

$$\alpha = \alpha', \quad \alpha = \alpha' + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \alpha' + \pi, \quad \alpha = \alpha' + \frac{3\pi}{2}, \ldots.$$

Ces valeurs de α répondent à deux droites perpendiculaires et aux prolongements de ces droites; elles déterminent donc un seul système d'axes.

Équation des courbes à centre.

203. Au moyen de la transformation précédente, et en posant, pour abréger,

$$M = A \cos^2\alpha - B \sin\alpha \cos\alpha + C \sin^2\alpha, \quad (5)$$

$$N = A \sin^2\alpha + B \sin\alpha \cos\alpha + C \cos^2\alpha, \quad (6)$$

(*) Si l'on divise tous les termes par $\cos^2\alpha$, on obtient

$$\operatorname{tang}^2\alpha - 2\frac{A-C}{B} \operatorname{tang}\alpha - 1 = 0,$$

équation qui ne diffère pas de $m^2 - 2\frac{A-C}{B} m - 1 = 0$. (182) Ce résultat était évident à priori.

(**) Excepté quand on a en même temps, $A = C$, $B = 0$. Mais alors la courbe donnée est un cercle.

on change l'équation (2) en

$$My'^2 + Nx'^2 + F' = 0:$$

la courbe est actuellement rapportée *à son centre et à ses axes.*

204. *Calcul des coefficients* M, N. — Les formules (5) et (6) donnent

1°. $M + N = A + C$ (7),

2°. $M - N = (A - C)\cos 2\alpha - B\sin 2\alpha$.

Mais, par la formule (4),

$$\sin 2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}}.$$

Au moyen de ces valeurs, on obtient

$$M - N = \sqrt{(A-C)^2 + B^2}; \quad (8)$$

puis

$$M = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right],$$

$$N = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right].$$

On peut observer que ces deux quantités sont les racines de l'équation

$$z^2 - (A + C)z - \frac{B^2 - 4AC}{4} = 0.$$

205. *Remarques.* — I. Dans les valeurs de $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$ écrites ci-dessus, le radical peut être pris avec le signe + ou avec le signe —. Nous conviendrons de le prendre positivement, ce qui revient à supposer $\sin 2\alpha$ *de signe contraire à* B.

II. D'après l'équation (7), *si l'on change la direction des axes rectangulaires, la somme des coefficients des carrés des variables reste constante.*

III. Les coefficients M, N sont de même signe quand la courbe est une ellipse, et de signes contraires dans le cas de l'hyperbole; car la condition $B^2 - 4AC \gtrless 0$ se réduit ici à $-4MN \lessgtr 0$.

IV. Il y a plus : la fonction $B^2 - 4AC$ est identiquement égale à $-4MN$; car

$$(M + N)^2 - (M - N)^2 = 4MN = 4AC - B^2;$$

donc, *si l'on fait tourner les axes rectangulaires, la fonction* $B^2 - 4AC$ *reste constante*.

Réduction dans le cas de la parabole.

206. *Disparition du rectangle.* — Si l'équation proposée représente une parabole, nous ne pourrons plus faire disparaître les termes du premier degré; mais alors le calcul précédent, appliqué à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

donne une équation de la forme

$$My'^2 + Nx'^2 + Ry' + Sx' + F = 0,$$

dans laquelle un des coefficients M, N *devra être nul*. En effet, on doit avoir $-4MN = 0$. Du reste, les formules (7) et (8) deviennent

$$M + N = A + C,$$

$$M - N = \sqrt{(A-C)^2 + 4AC} = \sqrt{(A+C)^2} = \pm (A + C).$$

Nous pouvons supposer $A > 0$, d'où $C > 0$, *sans quoi l'équation ne représenterait pas une parabole*; donc, pour prendre le radical positivement, nous écrirons $M - N = A + C$. Ces valeurs donnent

$$M = A + C, \quad (9) \qquad N = 0. \quad (10)$$

On voit donc que, *dans le cas de la parabole, si l'on fait disparaître le rectangle des variables, l'un des carrés disparaît en même temps.*

207. L'équation transformée est, en supprimant les accents,

$$My^2 + Ry + Sx + F = 0.$$

Il reste à calculer les valeurs de

$$R = D\cos\alpha - E\sin\alpha,$$
$$S = D\sin\alpha + E\cos\alpha.$$

Or, $\cos 2\alpha = \dfrac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} = \dfrac{A-C}{A+C}$;

d'où $\sin\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{C}{A+C}}$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{A}{A+C}}$. (11)

Nous avons supposé A et C positifs. Quant au coefficient B, il peut être positif ou négatif.

1°. $B > 0$ donne $\sin 2\alpha < 0$, $2\alpha > \pi$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha < 0$;

2°. $B < 0$ donne $\sin 2\alpha > 0$, $2\alpha < \pi$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha > 0$.

On prendra donc $\cos\alpha$ *de signe contraire à* B, et l'on aura, sans ambiguïté, R et S.

208. *Seconde réduction.* — Transportons maintenant les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière à faire disparaître le terme en y' et le terme indépendant : nous ne pourrions pas annuler le coefficient de x', parce que l'équation transformée ne contiendrait plus que y'.

Au moyen des valeurs $x = x' + a$, $y = y' + b$, l'équation réduite devient

$$\left.\begin{array}{l} My'^2 + 2Mb \\ + R \end{array}\right| y' + Sx' + \left.\begin{array}{l} Mb^2 \\ +Rb \\ +Sa \\ +F \end{array}\right\} = 0.$$

Posons les équations

$$2Mb + R = 0, \quad Mb^2 + Rb + Sa + F = 0.$$

La seconde, simplifiée au moyen de la première, devient

$$Rb + 2Sa + 2F = 0.$$

Nous aurons donc, pour les coordonnées de la nouvelle origine,

$$b = -\frac{R}{2M}, \quad a = \frac{R^2 - 4MF}{4MS}.$$

Ces valeurs sont finies et déterminées; car si l'on avait $M = 0$ ou $S = 0$, l'équation donnée représenterait une droite ou deux droites.

Équation de la parabole.

209. Il est donc toujours possible de faire disparaître le terme en y' et le terme indépendant, et de ramener l'équation d'une parabole à la forme $My'^2 + Sx' = 0$. L'axe des abscisses est précisément *l'axe* de la parabole, car les coordonnées sont rectangulaires, et, pour chaque valeur de x', on a deux valeurs de y' égales

et de signes contraires. L'origine, située sur la courbe, en est le *sommet*.

Enfin, l'axe des ordonnées est la *tangente au sommet*.

210. En résumant ce qui précède, on conclut que : 1° dans le cas de *l'ellipse* ou de *l'hyperbole*, l'équation de la courbe peut être ramenée à la forme $My^2 + Nx^2 = P$; 2° l'équation de *la parabole* peut toujours être réduite à la forme $My^2 + Sx = 0$.

EXERCICES.

I. Réduire, à la forme la plus simple, l'équation

$$4y^2 + 2xy - x^2 + 2y - 6x - 1 = 0.$$

Résultat : $$\left(\sqrt{29} + 3\right)y^2 - \left(\sqrt{29} - 3\right)x^2 + \frac{72}{5} = 0.$$

II. Simplifier l'équation

$$y^2 - 2xy - 2x = 0.$$

Résultat : $$\left(\sqrt{5} + 1\right)y^2 - \left(\sqrt{5} - 1\right)x^2 - 2 = 0.$$

III. Simplifier l'équation

$$4y^2 + 4xy + x^2 + y - 2x + 1 = 0.$$

Résultat : $$5y^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}x = 0.$$

IV. Même recherche pour l'équation

$$16y^2 + 24xy + 9x^2 + 2y - 6x + 1 = 0.$$

Résultat : $$25y^2 + 6x = 0.$$

V. Dans quels cas les équations

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0,$$

représentent-elles deux courbes égales? (Les axes sont supposés rectangulaires.)

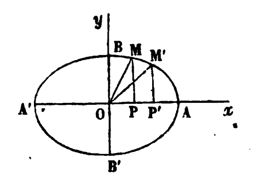
CHAPITRE XVIII.

THÉORIE DE L'ELLIPSE.

Préliminaires.

211. *Conditions nécessaires pour que l'équation* $My^2 + Nx^2 = P$ *représente une ellipse.* — Il faut d'abord que les coefficients M et N soient de même signe; et, cela étant, on peut les supposer positifs. Il faut ensuite que P soit positif; car si P est négatif, l'équation ne représente rien, et si P est nul, l'équation représente l'origine.

212. *Détermination des sommets et des axes.*



$y = 0$ donne $x = \pm\sqrt{\frac{P}{N}} = \pm a$. Les points A, A', ainsi déterminés, sont deux *sommets;* $AA' = 2a$ est l'un des axes.

$x = 0$ donne $y = \pm\sqrt{\frac{P}{M}} = \pm b$: B et B' sont les deux autres sommets.

On peut supposer $a > b$, alors $2a$ est le *grand axe* et $2b$ le *petit axe*.

213. *Équation réduite.* — Si l'on remplace M et N par $\frac{P}{b^2}$ et $\frac{P}{a^2}$, on obtient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Telle est l'équation la plus simple de l'ellipse; elle a de l'analogie avec l'équation de la ligne droite : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

214. L'équation (1) devient, par la disparition des dénominateurs,

$$a^2y^2 + b^2a^2 = a^2b^2. \quad (2)$$

Si $a = b$, on a $x^2 + y^2 = a^2$, équation d'un cercle; donc *le cercle est un cas particulier de l'ellipse : c'est une ellipse dans laquelle les deux axes sont égaux entre eux.*

215. La discussion de l'équation (2) est trop facile pour que nous nous y arrêtions. Nous ferons seulement les deux remarques suivantes :

1°. Soit MP l'ordonnée d'un point de l'ellipse. D'après l'équation (1),

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(a+x)(a-x) = \frac{b^2}{a^2}\cdot \mathrm{A'P.AP}.$$

Pour un autre point M', on aurait

$$\overline{\mathrm{M'P'}}^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot \mathrm{A'P'.AP'}.$$

Conséquemment, $$\frac{\overline{\mathrm{MP}}^2}{\overline{\mathrm{M'P'}}^2} = \frac{\mathrm{A'P.AP}}{\mathrm{A'P'.AP'}}.$$

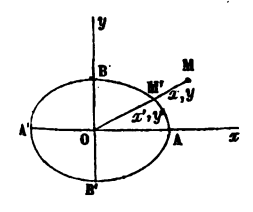
En d'autres termes : *Dans l'ellipse, les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'un des axes sont entre eux comme les rectangles des segments correspondants formés sur cet axe.*

2°. Si nous menons le rayon OM, nous aurons

$$\mathrm{OM} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{OM} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}.$$

Conséquemment, *la distance du centre à un point de l'ellipse augmente avec l'abscisse de ce point.*

216. *Condition pour qu'un point soit extérieur ou intérieur à l'ellipse.* — Suivant qu'un point est sur l'ellipse, extérieur à l'ellipse, ou intérieur à l'ellipse, la fonction $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2$ est *nulle*, *positive* ou *négative*.



Soit, par exemple, le point M extérieur à l'ellipse. Si l'on mène OM, on aura, M' étant le point d'intersection,

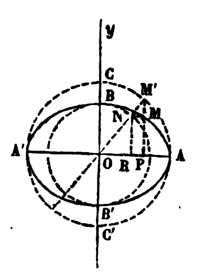
$$a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 = 0.$$

Mais, évidemment, $y'^2 < y^2$, $x'^2 < x^2$; donc

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 > 0, \text{ etc.}$$

217. *Analogies entre l'ellipse et le cercle circonscrit.* — L'équa-

tion (2) donne $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}y'$, en appelant y' l'ordonnée du cercle ACA'C', correspondant à l'abscisse x. Si donc le cercle était tracé, il suffirait, pour avoir les points de l'ellipse, de diminuer les ordonnées des points du cercle dans un rapport constant (*). De là, ce moyen de construire l'ellipse :



Sur les deux axes, comme diamètre, on trace deux circonférences. On mène un rayon quelconque ; par le point M', où il coupe la grande circonférence, on mène une parallèle au petit axe, et par le point N, où il coupe la petite circonférence, on mène une parallèle au grand axe. Le point M, intersection de ces deux lignes, appartient à l'ellipse.

En effet, $\frac{M'P}{NR} = \frac{OM'}{ON}$, ou $\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}$,

EXERCICES (**).

I. *Théorème.* — Si une droite, de longueur constante, glisse entre les côtés d'un angle donné, un point quelconque de cette droite décrit une ellipse ayant pour centre le sommet de l'angle.

II. *Théorème.* — Si une droite, de longueur constante, glisse entre les côtés d'un angle donné, un point quelconque, invariablement lié à cette droite, engendre une ellipse ayant pour centre le sommet de l'angle.

III. Quelles sont, en grandeur et en direction, les axes de l'ellipse engendrés par le sommet d'un triangle dont la base glisse entre les côtés d'un angle donné?

(*) On exprime quelquefois cette relation entre les deux courbes, en disant que l'ellipse est un cercle *contracté*, ou que le cercle est une ellipse *dilatée*. Le *principe de la dilatation* est un cas très-particulier de l'*homographie*.

(**) A cause de l'étendue de ce chapitre, et des divisions tranchées qu'il présente, nous plaçons, après chacune d'elles, les exercices qui s'y rapportent. La même remarque s'applique aux chapitres XIX et XX.

Des foyers et des directrices.

218. *On appelle* foyer *d'une courbe du second ordre, un point dont la distance à un point de la courbe est une fonction rationnelle et du premier degré des coordonnées rectilignes de ce dernier point.*

Il résulte, de cette définition, qu'à chaque foyer correspond une droite nommée *directrice*, telle, que *les distances d'un point quelconque de la courbe au foyer et à la directrice correspondante sont dans un rapport constant.* En effet, soit δ la distance du foyer à un point quelconque (x, y) de la courbe. D'après la définition, on doit avoir $\delta = my + nx + p$. D'un autre côté, si l'on considère la droite représentée par $my + nx + p = 0$, la distance du point (x, y) à cette droite sera

$$d = \frac{my + nx + p}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \text{ou} \quad d = \frac{\delta}{\sqrt{m^2 + n^2}};$$

donc

$$\frac{\delta}{d} = \sqrt{m^2 + n^2} = \text{const.}$$

Ainsi l'équation $my + nx + p = 0$ représente une directrice.

219. *Recherche des foyers d'une courbe dont l'équation est donnée.* — Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad (1)$$

cette équation.

En représentant par α, β les coordonnées du foyer, et en supposant les axes rectangulaires, nous devons avoir, d'après la définition des foyers,

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = my + nx + p,$$

ou

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (my + nx + p)^2.$$

Cette relation entre x et y, appartenant à tous les points de la courbe, doit pouvoir être identifiée avec l'équation (1). Développée, elle devient

$$\left.\begin{array}{l}(1-m^2)y^2 - 2mnxy + (1-n^2)x^2 - 2(\beta + mp)y \\ \quad - 2(\alpha + np)x + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Il faut donc que les coefficients de l'équation (2) soient égaux à

ceux de l'équation (1), multipliés respectivement par un même facteur λ. Par suite,

$$\lambda A = 1 - m^2, \quad (3) \qquad \lambda D = -2(\beta + mp), \quad (6)$$
$$\lambda B = -2mn, \quad (4) \qquad \lambda E = -2(\alpha + np), \quad (7)$$
$$\lambda C = 1 - n^2, \quad (5) \qquad \lambda F = \alpha^2 + \beta^2 - p^2. \quad (8)$$

220. Sans vouloir résoudre ces six équations par rapport aux six inconnues α, β, m, n, p, λ, nous ferons les remarques suivantes :

1°. Si l'on retranche (5) de (3) et qu'on divise par (4), on obtient

$$2\frac{A - C}{B} = \frac{m}{n} - \frac{n}{m};$$

ou, en posant $\frac{m}{n} = v$,

$$v^2 - 2\frac{A - C}{B}v - 1 = 0.$$

Cette équation a ses racines réelles (*).

2°. Les équations (3), (5) donnent $\frac{1 - \lambda A}{1 - \lambda C} = \frac{m^2}{n^2}$. Et comme le rapport $\frac{m}{n} = v$ est réel, λ sera *réel*.

3°. Les équations (3), (4), (5) donnent encore

$$\lambda^2(B^2 - 4AC) = 4(m^2 + n^2 - 1).$$

Cette dernière relation, dans laquelle λ^2 est *positif*, prouve que dans le cas de l'ellipse, on a $m^2 + n^2 < 1$. Or, on a trouvé $d = \frac{\delta}{\sqrt{m^2 + n^2}}$; donc $d > \delta$: *chaque point de l'ellipse est plus près du foyer que de la directrice correspondante.* Pour l'hyperbole, c'est le contraire, à cause de $d < \delta$. Enfin, dans le cas de la parabole, on a $m^2 + n^2 = 1$, $d = \delta$; donc *chaque point de la parabole est également distant du foyer et de la directrice.* Ce dernier résultat s'accorde avec ce que l'on a vu au n° 64.

(*) Cette équation est celle qui donne les directions des axes principaux (**182**). Par conséquent, *la directrice est perpendiculaire à l'un de ces axes.*

221. Nous remarquerons encore que si $B = 0$, l'équation (4) devient $mn = 0$; ce qui exige que $m = 0$ ou $n = 0$; donc, dans ce cas, la quantité $my + nx + p$ se réduit à $my + p$, ou à $nx + p$. Ainsi, quand la courbe est rapportée à des axes parallèles aux siens, la distance d'un point quelconque au foyer est une fonction rationnelle de l'abscisse ou de l'ordonnée du point.

222. Pour étudier les propriétés des foyers, nous pouvons supposer que l'équation de la courbe soit ramenée à la forme la plus simple. En effet, les formules relatives à la transformation des coordonnées rectilignes renfermant ces quantités au premier degré seulement, il s'ensuit que *si un point est un foyer par rapport à un certain système d'axes, il sera également un foyer par rapport à tout autre système.*

223. Cela étant, supposons l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et voyons si la distance du foyer à un point (x, y) de la courbe peut s'exprimer par une fonction rationnelle de l'abscisse (221).

On a $\quad \delta^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \quad$ et $\quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$

δ devant se réduire à une fonction rationnelle de x, il en doit être de même, à plus forte raison, pour δ^2, ce qui ne peut avoir lieu que si $\beta = 0$; donc, *s'il y a un foyer, il est situé sur l'axe des abscisses.*

La substitution donne

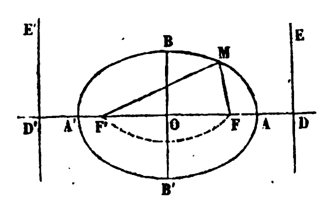
$$\delta^2 = (x - \alpha)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + b^2.$$

Pour que δ soit rationnel, il faut que le trinôme soit un carré parfait; donc $\alpha^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)(\alpha^2 + b^2)$,

ou $$\alpha = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ces valeurs seront réelles si a surpasse b; donc *l'ellipse a deux foyers situés sur le grand axe, de part et d'autre du centre, à une distance de ce point égale à* $\sqrt{a^2 - b^2}$.

224. Pour construire les foyers F, F', il suffit de décrire, de l'extrémité B du petit axe comme centre, avec a pour rayon, un arc FF'.



La distance $OF = OF' = \sqrt{a^2 - b^2}$ est quelquefois appelée *excentricité ;* on la représente ordinairement par c.

225. Soit maintenant δ la distance d'un point M de l'ellipse *au foyer de droite*, et δ' sa distance au *foyer de gauche*. Nous aurons

$$\delta^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2, \quad \delta'^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + x^2,$$

d'où $$\delta = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right), \quad \delta' = \pm\left(\frac{c}{a}x + a\right).$$

A cause de $c < a$, la quantité comprise dans la première parenthèse sera *toujours négative*, tandis que la quantité comprise dans la seconde parenthèse sera *toujours positive*. D'ailleurs, δ et δ' représentant des *longueurs*, sont des quantités essentiellement *positives*. Donc nous devons prendre

$$\delta = a - \frac{c}{a}x, \quad \delta' = a + \frac{c}{a}x.$$

226. *Remarques.* — I. Chacune de ces dernières équations représente l'ellipse : les coordonnées d'un point quelconque sont ses distances au foyer et au petit axe.

II. On conclut, des valeurs de δ et δ', $\delta + \delta' = 2a$; donc, *dans l'ellipse, la somme des rayons vecteurs menés de chaque point aux deux foyers est égale au grand axe* (*).

III. La propriété précédente appartient exclusivement aux points de l'ellipse ; c'est-à-dire que : 1° *si un point est intérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est moindre que le grand axe ;* 2° *quand un point est extérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers surpasse le grand axe.*

1°. Le point M étant intérieur à l'ellipse AA', prolongeons le rayon vecteur F'M jusqu'à sa rencontre avec la courbe, et menons MF, mF. Nous aurons

$$F'm + mF = 2a, \quad MF < Mm + mF;$$

(*) Cette propriété est souvent prise pour définition de l'ellipse (62).

d'où, en ajoutant membre à membre et réduisant,

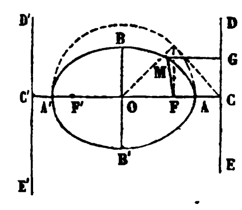
$$F'M + MF < 2a.$$

2°. Dans le cas d'un point extérieur M', la même construction donne

$$F'm + mF = 2a, \quad mM' + M'F > mF;$$

donc $\qquad F'M' + M' > 2a.$

227. *Directrice.* — Cette droite étant généralement représentée par $my + nx + p = 0$ (218), $a - \frac{c}{a}x = 0$ est l'équation de la directrice DE correspondant au foyer F; donc *la directrice de l'ellipse est perpendiculaire au grand axe.* On la construira facilement, car sa distance au centre est une troisième proportionnelle à c et à a. Il y a une autre directrice D'E' qui correspond au foyer F', et dont l'équation est $a + \frac{c}{a}x = 0$.

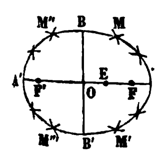


228. Soit d la distance d'un point M de la courbe à la directrice DE: $d = \frac{a^2}{c} - x$. Or, $\delta = a - \frac{c}{a}x$; donc

$$\frac{d}{\delta} = \frac{a(a^2 - cx)}{c(a^2 - cx)} = \frac{a}{c}.$$

Nous retrouvons ainsi cette propriété : *le rapport des distances de chaque point de la courbe au foyer et à la directrice est constant.* De plus, ce rapport est celui de l'excentricité au demi grand axe.

229. *Construction de l'ellipse à l'aide des foyers.* — Les axes étant donnés, les foyers F, F' seront déterminés (224). Prenons, sur le grand axe, une distance quelconque AE; du foyer F, avec AE pour rayon, traçons un arc de cercle; du foyer F', avec A'E pour rayon, traçons un arc de cercle qui coupe le premier en M : le point M appartient évidemment à l'ellipse.



La somme des rayons étant plus grande que FF', les circonférences se couperont si la différence des rayons est moindre que FF'. Or $A'E = A'F' + F'E$, $AE = AF \pm FE$, selon que le point E est à gauche ou à droite du foyer F. Donc $A'E - AE = F'E \mp FE$, puis $F'E \mp FE < FF'$; ce qui exige que le point E soit pris *entre les deux foyers*.

Chaque ouverture du compas donne quatre points de la courbe.

230. On peut construire l'ellipse d'une manière continue : les extrémités d'un fil sont attachées en deux points fixes, etc. (*B.*, *Géom.*)

EXERCICES.

I. Déterminer les foyers de l'ellipse représentée par

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 4x - 1 = 0,$$

les axes étant rectangulaires.

II. Même question, en supposant l'angle des axes égal à 60°.

III. *Théorème.* — Si, d'un point M de la circonférence d'une ellipse, on mène deux cordes MFN, MF'N' passant par les deux foyers, la somme $\frac{MF}{FN} + \frac{MF'}{F'N} = \text{const.}$

IV. Construire une ellipse, connaissant un point, un foyer, et les grandeurs des axes.

V. Construire une ellipse, connaissant un foyer, la directrice correspondante, et un point.

De la tangente et de la normale.

231. *Équation de la tangente.* — Cette équation est généralement

$$y - y' = \frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}(x - x');$$

donc l'équation de la tangente à l'ellipse, au point (x', y'), sera

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x').$$

Si on la simplifie au moyen de la relation

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2, \quad (1)$$

elle devient

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2. \quad (2)$$

232. *La tangente n'a qu'un point de commun avec l'ellipse.* — En effet, si l'on retranche de l'équation (1) le double de l'équation (2), on trouve

$$a^2(y'^2 - 2yy') + b^2(x'^2 - 2xx') = -a^2b^2;$$

d'où $$a^2(y-y')^2 + b^2(x-x')^2 = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2.$$

Le premier membre est essentiellement positif; donc tous les points de la tangente satisfont à la condition $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 > 0$; donc ces points sont extérieurs à l'ellipse. Il n'y a d'exception que pour le point (x', y'), lequel est, en effet, le point de contact.

233. Le coefficient angulaire de la tangente est

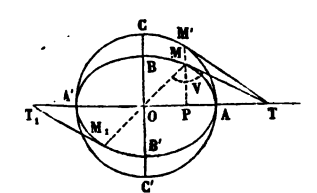
$$-\frac{b^2x'}{a^2y'} = \operatorname{tang}\alpha.$$

Si le point M est sur le premier quadrant de l'ellipse, x' et y' sont positifs; donc $\operatorname{tang}\alpha$ est négative, et l'angle α est obtus.

Si le point M se confond avec le sommet A, $\operatorname{tang}\alpha = -\infty$, ou $\alpha = 90°$. Ainsi *la tangente à l'extrémité du grand axe est perpendiculaire à cet axe.* Si le point M s'avance vers la gauche, x' diminue, y' augmente, $\operatorname{tang}\alpha$ diminue, mais cette tangente est négative; donc l'angle α augmente. Enfin, quand le point M arrive au sommet B, $x' = 0$, $y' = b$, $\operatorname{tang}\alpha = 0$, $\alpha = 180°$; etc.

234. *Les tangentes menées aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles entre elles;* car l'expression de $\operatorname{tang}\alpha$ ne change pas si l'on change x' et y' en $-x'$ et $-y'$. On pouvait prévoir ce résultat; car ces tangentes sont parallèles aux cordes que le diamètre divise en deux parties égales (180).

235. *Relations entre la tangente et le diamètre passant par le point de contact.*



1°. α' étant l'angle formé par le rayon OM avec le grand axe, $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{y'}{x'}$; donc

$$\operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

2°. En appelant V l'angle OMT, on a

$$V = \alpha - \alpha';$$

donc $$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\alpha'}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'} = \frac{\dfrac{-b^2x'}{a^2y'} - \dfrac{y'}{x'}}{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$$

$$= -\frac{b^2x'^2 + a^2y'^2}{a^2x'y' - b^2x'y'} = \frac{-a^2b^2}{c^2x'y'}.$$

Cette quantité est négative; donc l'angle V est obtus : il n'y a d'exception que pour les sommets A et B, auquel cas $V = 90°$. Il résulte de là que l'angle V a un *maximum*.

236. *Rencontre de la tangente avec les axes.* — Si, dans l'équation (2), on fait $y = 0$, on trouve $x = \frac{a^2}{x'} = \text{OT}$, valeur indépendante de b. Conséquemment, la tangente à toute autre ellipse ACA' ayant AA' pour axe, menée au point M' dont l'abscisse est x, passera par le même point T. Si l'on considère, en particulier, la circonférence décrite sur AA' comme diamètre, et qu'on lui mène la tangente M'T, la tangente MT à l'ellipse sera déterminée (*).

237. PROBLÈME. — *Mener à l'ellipse une tangente par un point extérieur* (α, β). — Soient x', y' les coordonnées du point de contact : l'équation

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$$

devra être vérifiée par $x = \alpha$, $y = \beta$; donc

$$\alpha^2\beta y' + b^2\alpha x' = a^2b^2. \quad (1)$$

On a, en outre,

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2. \quad (2)$$

Ces deux équations donnent

$$x' = a^2\frac{b^2\alpha \pm \beta\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2},$$

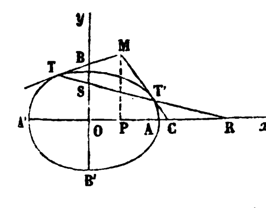
$$y' = b^2\frac{a^2\beta \mp \alpha\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Ces valeurs sont réelles, et le problème est possible, quand

(*) Cette construction résulte, immédiatement, de ce que *l'ellipse est un cercle contracté ou dilaté dans un sens* (217).

on a $a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2 > 0$; c'est-à-dire quand le point (α, β) est extérieur à l'ellipse. Si le point est sur l'ellipse, on n'a plus qu'une tangente. Enfin, il n'est pas possible de mener à l'ellipse une tangente par un point intérieur.

238. On peut résoudre géométriquement la question précédente. On considère chacune des deux équations (1) et (2) comme représentant un lieu géométrique : l'équation (2) appartient à l'ellipse; l'autre représente une droite qui passe par les points de contact, attendu que cette équation est vérifiée par les coordonnées de ces deux points. Cette droite existe toujours, même si le point (α, β) est à l'intérieur de l'ellipse : on l'appelle *polaire* du point (α, β).



Pour construire cette polaire TT', on cherche les points où elle rencontre les axes.

$$y = 0 \text{ donne } x = \frac{a^2}{\alpha} = \text{OR};$$

$$x = 0 \text{ donne } y = \frac{b^2}{\beta} = \text{OS}.$$

239. Si le point M est sur le grand axe, on a $\beta = 0$; donc $x = \dfrac{a^2}{\alpha}$, équation qui représente une perpendiculaire au grand axe. Ainsi, *la polaire d'un point situé sur l'un des axes est perpendiculaire à cet axe.*

Si le point (α, β) est le foyer F, on a $\alpha = c$, puis $x = \dfrac{a^2}{c}$; donc *la polaire d'un foyer est la directrice correspondante.*

240. *Rencontre d'une droite avec l'ellipse.* — Les équations de ces deux lignes sont

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad y = mx + p;$$

elles donnent, par l'élimination de y,

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mpx + a^2(p^2 - b^2) = 0.$$

Cette équation aura ses racines réelles si l'on a

$$a^2m^2p^2 - (p^2 - b^2)(a^2m^2 + b^2) > 0, \quad \text{ou} \quad p^2 < a^2m^2 + b^2.$$

Lorsque cette condition est vérifiée, la droite est sécante. Dans le

cas de $p^2 > a^2m^2 + b^2$, la droite est extérieure à l'ellipse. Enfin

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

représente deux tangentes à l'ellipse. Cette équation est très-commode pour résoudre certains problèmes.

241. *Équation de la normale.* — La *normale* en un point d'une courbe étant la perpendiculaire à la tangente en ce point (139), la normale au point (x', y') sera représentée par

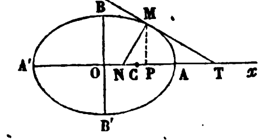
$$y - y' = \frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}(x - x'),$$

les axes étant rectangulaires : s'ils étaient obliques, l'équation serait plus compliquée. L'équation de la normale à l'ellipse est donc

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'). \quad (1)$$

On y doit joindre la relation

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2. \quad (2)$$



Le coefficient angulaire de la normale MN étant $\frac{a^2y'}{b^2x'}$, on voit que pour tous les points de l'arc AB, l'angle MNx est aigu ; etc.

242. *Expression de la sous-normale.* — Pour avoir la *sous-normale* NP, il suffit de prendre la valeur de $x' - x$ répondant à $y = 0$. On trouve ainsi $\text{NP} = \frac{b^2x'}{a^2}$. Cette quantité, nulle pour $x' = 0$, c'est-à-dire pour le sommet B, croît avec x' ; et pour $x' = a$, elle se réduit à $\frac{b^2}{a}$. Ainsi, à mesure que le point M se rapproche du sommet A, le pied de la normale se rapproche du point C, distant de ce sommet d'une quantité égale à $\frac{b^2}{a}$. On trouverait de même que la limite des points de rencontre des normales avec le petit axe est un point situé au-dessous du grand axe, à une distance du sommet B égale à $\frac{a^2}{b}$.

243. **Problème.** — *Mener à l'ellipse une normale parallèle à une droite donnée.*

L'équation (1) peut s'écrire :

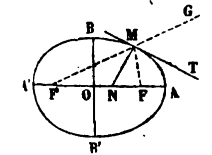
$$y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x - \frac{c^2 y'}{b^2}.$$

Si l'on veut que la normale soit parallèle à une droite dont le coefficient angulaire est m, il faudra que l'on ait $\frac{a^2 y'}{b^2 x'} = m$. Cette relation, jointe à l'équation (2), donne $y' = \pm \frac{b^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}$. Substituant dans l'équation (1), on obtient cette forme particulière de l'équation de la normale :

$$y = mx \mp \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}.$$

On voit qu'il y a toujours deux normales parallèles à une direction donnée.

244. **Théorème.** — *La normale* MN *en un point de l'ellipse divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs menés à ce point.*



Pour démontrer cette propriété, il suffit de vérifier la proportion

$$\frac{\mathrm{F'M}}{\mathrm{MF}} = \frac{\mathrm{F'N}}{\mathrm{NF}}.$$

Or, $\mathrm{F'M} = \delta' = a + \frac{c}{a} x'$, $\mathrm{FM} = \delta = a - \frac{c}{a} x'$; et, d'un autre côté, en faisant $y = 0$ dans l'équation (1) de la normale, on obtient

$$x = \mathrm{ON} = x' - \frac{b^2}{a^2} x' = \frac{c^2}{a^2} x'.$$

Par suite, la proportion ci-dessus se réduit à l'identité

$$\frac{a + \frac{c}{a} x'}{a - \frac{c}{a} x'} = \frac{c + \frac{c^2}{a^2} x'}{c - \frac{c^2}{a^2} x'}.$$

245. Corollaire. — *La tangente* MT *divise en deux parties égales l'angle* FMG *formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.*

Cette propriété caractéristique de l'ellipse peut être démontrée géométriquement. En effet, si nous prenons sur la tangente MT un point quelconque M' différent du point de contact M, nous aurons, puisque ce point est extérieur à la courbe,

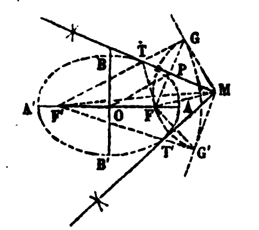
$$F'M' + M'F > 2a;$$

d'où
$$F'M + MF < F'M' + M'F.$$

Ainsi, le point de contact M doit être situé sur la tangente MT, de manière que la somme des distances de ce point aux deux points fixes F et F' soit un minimum, etc.

246. *Construction, au moyen des foyers, de la tangente à l'ellipse.*

Supposons que l'on veuille mener une tangente par un point extérieur M. Soit T le point de contact inconnu. Menons F'T, FT, et abaissons FPG perpendiculaire sur MT. A cause de l'égalité des angles FTP, GTP, MT est perpendiculaire sur le milieu de FG; donc



$$MG = MF, \quad TG = TF;$$

puis
$$F'G = F'T + TF = 2a.$$

Si donc, du point M comme centre, avec MF pour rayon, nous décrivons une circonférence, et que du foyer F' comme centre, avec $2a$ pour rayon, nous décrivions une autre circonférence, le point G devra se trouver à l'intersection de ces deux lignes.

247. Pour que les circonférences se coupent, on doit avoir:

1°. $$F'M < 2a + FM,$$

2°. $$F'M > 2a - FM \quad \text{ou} \quad F'M > FM - 2a,$$

suivant que FM sera $< 2a$ ou $> 2a$.

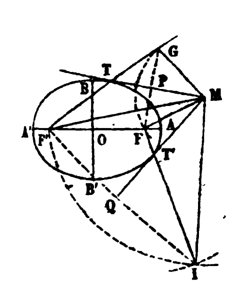
La première condition est toujours satisfaite, car le triangle F'MF donne $F'M < 2c + FM$. Quant à la seconde, elle est vérifiée seulement quand le point M est extérieur.

Dans ce dernier cas, les deux circonférences se couperont donc

en deux points G, G′ symétriquement placés par rapport à F′M. Pour avoir les tangentes, il suffira d'abaisser MT, MT′ perpendiculaires sur FG, FG′; de plus, si l'on mène F′G, F′G′, on obtiendra les points de contact T, T′. D'après cette construction, *on peut obtenir la tangente et les points de contact sans que l'ellipse soit tracée.*

248. *Remarques.* — I. Si nous menons OP, cette droite, passant par les milieux de F′F et de FG, sera égale à la moitié de F′G; donc OP $= a$: *le lieu des projections* P *du foyer* F *sur les tangentes à l'ellipse, est la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.*

II. Les deux droites F′G, F′G′ sont symétriques par rapport à F′M; donc *le rayon vecteur mené au point de concours de deux tangentes, divise en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs menés aux points de contact.*



III. MT et MT′ étant toujours les deux tangentes menées par le point donné M, prenons les points G, I, respectivement symétriques de F et de F′ par rapport à MT, MT′. Les deux triangles GMF′, FMI sont égaux à cause de GF′ $= 2a =$ FI, GM $=$ MF et F′M $=$ MI; donc les angles GMF′, FMI sont égaux; donc

$$\text{GMF}' + \text{F}'\text{MF} = \text{FMI} + \text{F}'\text{MF},$$

ou

$$\text{GMF} = \text{F}'\text{MI}.$$

Ces deux derniers angles étant égaux, leurs moitiés TMF, T′MF′ sont égales; donc, en retranchant la partie commune F′MF,

$$\text{TMF}' = \text{FMT}'.$$

De là ce théorème : *Les tangentes menées par un point extérieur font, avec les rayons vecteurs menés à ce point, des angles respectivement égaux.*

IV. Les triangles rectangles MPF, MQF′, moitiés de triangles isocèles semblables, sont semblables; donc $\frac{\text{FP}}{\text{F}'\text{Q}} = \frac{\text{MF}}{\text{MF}'}$. Ainsi *les distances des deux foyers à deux tangentes issues d'un même point, sont entre elles comme les rayons vecteurs menés à ce point.*

EXERCICES.

I. Lieu du sommet d'un angle donné, circonscrit à une ellipse donnée.

II. Lieu des projections du centre de l'ellipse, sur les normales à cette courbe.

Équation du lieu :

$$u = \pm \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}}{c^2 \sin^2 \cos^2}.$$

III. Une ellipse glisse sur une droite fixe donnée, de manière que le point de contact soit fixe sur la droite; quelle est la courbe décrite par le centre de l'ellipse?

Résultat : $$x^2 = \frac{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}{y^2}.$$

IV. Quelle est la courbe décrite par le foyer d'une ellipse donnée, glissant sur les côtés d'un angle droit?

V. *Théorème.* — Le rectangle des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur une tangente quelconque est équivalent au carré du demi petit axe.

VI. *Théorème.* — La somme des carrés des inverses des distances du centre à deux tangentes conjuguées quelconques (c'est-à-dire parallèles à deux diamètres conjugués) est constante.

VII. *Théorème.* — La somme des rectangles des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur deux normales conjuguées quelconques (c'est-à-dire menées par les extrémités de deux diamètres conjugués) est constante.

VIII. *Théorème.* — Le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à deux ellipses homofocales est une circonférence.

IX. *Théorème.* — Si, par les deux foyers d'une ellipse, on fait passer une circonférence coupant la courbe en M et le petit axe en C, D, les cordes MC, MD seront l'une la tangente et l'autre la normale en M.

X. *Théorème.* — Soit MNPQ le quadrilatère ayant pour sommets les points de contact d'une ellipse avec un rectangle ABCD circonscrit à cette droite :

1°. Deux côtés consécutifs de ce quadrilatère sont également inclinés sur la tangente qui passe par leur extrémité commune.

2°. La somme de ces côtés est constante.

3°. Le quadrilatère MNPQ est circonscrit à une ellipse homofocale avec l'ellipse donnée.

XI. Si, par un point M, on abaisse quatre normales sur une ellipse donnée, les pieds A, B, C de trois de ces normales et le point D', diamétralement opposé au pied D de la quatrième, sont situés sur une même circonférence. (Théorème de Joachimsthal.)

XII. Construire une ellipse, connaissant un foyer et trois tangentes.

XIII. Lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont normaux à une ellipse donnée.

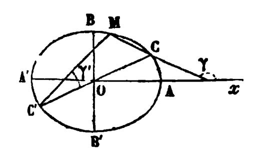
Équation du lieu : $u = \dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \dfrac{b^2 \cos^2 \omega - a^2 \sin^2 \omega}{b^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin^2 \omega}.$

XIV. Lieu décrit par le foyer d'une ellipse donnée, continuellement tangente à deux droites rectangulaires données.

Équation du lieu : $(y^2 - b^2)^2 x^2 + (x^2 - b^2) y^2 = 4 c^2 x^2 y^2.$

Cordes supplémentaires.

249. On appelle *cordes supplémentaires* celles qui joignent un point de l'ellipse aux extrémités d'un même diamètre.



Il existe une relation simple entre les inclinaisons γ, γ' de deux cordes supplémentaires quelconques MC, MC'.

En effet, en appelant x', y' les coordonnées du point M, et x'', y'' celles du point C, on aura

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Pour avoir $\operatorname{tang} \gamma'$, il suffit évidemment de changer x'' et y'' en $-x''$, $-y''$; donc

$$\operatorname{tang} \gamma' = \frac{y' + y''}{x' + x''}.$$

On déduit, de ces valeurs,

$$\operatorname{tang} \gamma \operatorname{tang} \gamma' = \frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2}.$$

Autrement dit : *si un diamètre est parallèle à une corde, son conjugué est parallèle à la corde supplémentaire de la première.*

256. Les propriétés précédentes, et les propriétés des cordes supplémentaires, permettent de résoudre très-facilement les problèmes suivants :

1°. *Connaissant un diamètre, construire son conjugué ;* 2° *trouver le centre d'une ellipse donnée ;* 3° *construire deux diamètres conjugués formant entre eux un angle donné ;* 4° *construire les axes d'une ellipse donnée.*

257. *Ellipse rapportée à des diamètres conjugués.* — Soit

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes. Les formules de transformation sont

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha',$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'.$$

D'ailleurs, l'équation transformée doit évidemment avoir la même forme que l'équation (1) ; donc le coefficient de $x'y'$ devra être nul. Effectuant, on trouve

$$\left.\begin{array}{l|l|l} a^2\sin^2\alpha' & y'^2 + a^2\sin^2\alpha & x'^2 = a^2b^2, \\ +\, b^2\cos^2\alpha' & \quad +\, b^2\cos^2\alpha & \end{array}\right\} \quad (2)$$

avec la condition

$$a^2\sin\alpha\sin\alpha' + b^2\cos\alpha\cos\alpha' = 0. \quad (3)$$

Cette équation de condition, pouvant être mise sous la forme

$$\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2},$$

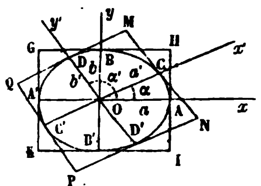
équivaut à $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$. Nous retrouverons ainsi, par une seconde méthode, la relation entre les inclinaisons de deux diamètres conjugués.

258. L'équation (2) donne,

$$\textit{pour } y' = 0, \quad x'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} = \overline{OC}^2,$$

$$\textit{pour } x' = 0, \quad y'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha'} = \overline{OD}^2.$$

Par conséquent, les formules qui déterminent les longueurs a', b' des demi-diamètres conjugués OC, OD, sont



$$\left.\begin{aligned} a'^2 &= \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}, \\ b'^2 &= \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha'}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

On doit toujours joindre à ces formules la relation (3).

Si nous introduisons les valeurs (4) dans l'équation (2), elle deviendra

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2. \quad (5)$$

259. *Diamètres conjugués égaux.* — Cherchons si l'on peut avoir $a' = b'$. Cette condition entraîne la suivante :

$$a^2 \sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha = a^2 \sin^2\alpha' + b^2 \cos^2\alpha';$$

d'où $$a^2(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha') + b^2(\cos^2\alpha - \cos^2\alpha') = 0,$$

puis $$(a^2 - b^2)(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha') = 0:$$

a est différent de b, donc

$$\sin\alpha = \pm \sin\alpha'.$$

On ne peut pas prendre le signe inférieur, parce que les angles α, α' peuvent être supposés moindres que 180°. Ils sont donc supplémentaires; et comme $\tang\alpha \tang\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$,

$$\tang\alpha = +\frac{b}{a}, \quad \tang\alpha' = -\frac{b}{a}.$$

Par conséquent, *l'ellipse a un seul système de diamètres conjugués égaux, lesquels coïncident en direction avec les diagonales du rectangle circonscrit.*

Chacun de ces diamètres a pour longueur $\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Théorèmes d'Apollonius.

260. Théorème I. — *Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques est équivalent au rectangle des axes.*

Le parallélogramme MNPQ a pour mesure $2a'.2b'\sin(\alpha'-\alpha)$. Le rectangle GHIK a pour mesure $2a.2b$; il suffit donc, pour démontrer le théorème, de vérifier l'équation

$$a'b'\sin(\alpha'-\alpha)=ab. \quad (1)$$

Or, les équations (4) donnent

$$a'^2b'^2=\frac{a^4b^4}{b^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha'+a^4\sin^2\alpha\sin^2\alpha'+a^2b^2(\sin^2\alpha\cos^2\alpha'+\sin^2\alpha'\cos^2\alpha)}.$$

Pour simplifier le dénominateur, faisons usage de l'équation (3): elle donne

$$a^4\sin^2\alpha\sin^2\alpha'+b^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha=-2a^2b^2\sin\alpha\sin\alpha'\cos\alpha\cos\alpha';$$

donc

$$a'^2b'^2=\frac{a^2b^2}{-2\sin\alpha\sin\alpha'\cos\alpha\cos\alpha'+\sin^2\alpha\cos^2\alpha'+\sin^2\alpha'\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{a^2b^2}{(\sin\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha'\cos\alpha)^2}=\frac{a^2b^2}{\sin^2(\alpha-\alpha')}; \text{ etc.}$$

261. Théorème II. — *La somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est équivalente à la somme des carrés des axes.*

Pour démontrer que $a'^2+b'^2=a^2+b^2$, il suffit évidemment d'éliminer α et α' entre les équations (3) et (4). La première des équations (4) donne, si l'on chasse les dénominateurs et que l'on divise par $\cos^2\alpha$,

$$a^2b^2(1+\operatorname{tang}^2\alpha)=a'^2b^2+a^2a'^2\operatorname{tang}^2\alpha,$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\alpha=\frac{b^2(a^2-a'^2)}{a^2(a'^2-b^2)}.$$

On trouverait, de la même manière,

$$\operatorname{tang}^2\alpha'=\frac{b^2(a^2-b'^2)}{a^2(b'^2-b^2)}.$$

Multipliant membre à membre, et égalant le produit à $\frac{b^4}{a^4}$, on obtient, successivement,

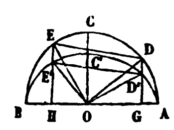
$$(a^2-a'^2)(a^2-b'^2)=(a'^2-b^2)(b'^2-b^2),$$

$$a^4-a^2(a'^2+b'^2)=b^4-b^2(a'^2+b'^2),$$

$$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a'^2+b'^2),$$

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2. \quad (2)$$

262. Les théorèmes d'Apollonius peuvent être démontrés plus simplement, comme il suit :



Soient, dans le demi-cercle ACB, OD et OE deux rayons *conjugués*, c'est-à-dire perpendiculaires entre eux. Si nous diminuons les ordonnées de la figure dans un rapport donné, la demi-circonférence sera transformée en une demi-ellipse AC'B (217), et les rayons OD, OE deviendront, dans cette demi-ellipse, deux rayons conjugués OD', OE' (*).

1°. Posons $OA = a$, $OC' = b$, $OD' = a'$, $OE' = b'$; nous aurons, à cause des deux triangles rectangles OGD, EHO *égaux entre eux*,

$$a'^2 = \overline{OG}^2 + \overline{GD'}^2 = \overline{OG}^2 + \frac{b^2}{a^2}\overline{GD}^2,$$

$$b'^2 = \overline{OH}^2 + \frac{b^2}{a^2}\overline{HE}^2 = \overline{GD}^2 + \frac{b^2}{a^2}OG^2;$$

donc

$$a'^2 + b'^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\left(\overline{OG}^2 + \overline{GD}^2\right) = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)a^2 = a^2 + b^2.$$

2°. Si nous menons DE et D'E', les deux triangles D'OE', DOE seront entre eux dans le rapport de b à a. Or,

$$\text{triangle D'OE'} = \frac{1}{2}a'b'\sin\theta, \quad \text{triangle DOE} = \frac{1}{2}a^2,$$

donc

$$\frac{a'b'\sin\theta}{a^2} = \frac{b}{a},$$

et enfin

$$a'b'\sin\theta = ab.$$

263. Problème. — *Connaissant un système de diamètres conjugués, trouver les axes, en grandeur et en direction.*

Les équations (1), (2) donnent, par une combinaison simple,

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\theta,$$

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\theta.$$

A cause de l'analogie de ces formules avec celle qui donne le troi-

(*) Ce dernier point devient évident au moyen des plus simples théorèmes de la Géométrie.

sième côté d'un triangle au moyen des deux autres côtés et de l'angle qu'ils comprennent, on les écrit ainsi :

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),$$

$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

De là, la construction suivante due à M. Chasles : AB et CD étant les diamètres conjugués donnés, abaissons CP perpendiculaire sur AB ; prenons CF = CE = OA = a' ; menons OE et OF : ces deux droites seront égales, l'une à $a-b$, l'autre à $a+b$. Effectivement,

$$\overline{OE}^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos OCE = (a-b)^2,$$

$$\overline{OF}^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b'\cos OCE = (a+b)^2.$$

On aura ensuite

$$2a = OF + OE, \quad 2b = OF - OE.$$

Les axes sont donc déterminés en grandeur. Quant à leur direction, elle résulte des remarques suivantes, également dues à M. Chasles.

264. Ox étant la direction inconnue du grand axe, abaissons CG et BH perpendiculaires sur cette droite. Nous aurons, par les considérations précédentes,

$$CG = \frac{b}{a}OH, \quad BH = \frac{b}{a}OG;$$

puis, dans les deux triangles semblables CBG, OBH,

$$\frac{CR}{OB} = \frac{CG}{OH}, \quad \text{d'où} \quad CR = a'\frac{b}{a}.$$

Cette valeur de CR donne

$$\frac{RF}{RE} = \frac{a' + a'\frac{b}{a}}{a' - a'\frac{b}{a}} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{OF}{OE}.$$

Donc Ox *est la bissectrice de l'angle des diamètres conjugués.*

265. *Remarques.* — I. La tangente au point C de l'ellipse serait parallèle au diamètre AB, conjugué de CD; donc ECF *est la normale en* C. Nous avons trouvé, pour *la valeur du segment compris entre l'ellipse et le grand axe,*

$$CR = a'\frac{b}{a}.$$

II. En prolongeant cette normale jusqu'à sa rencontre avec la direction du petit axe, on trouverait $CQ = a'\frac{a}{b}$;

donc $$CR.CQ = a'^2:$$

le rectangle des segments déterminés par les axes sur une normale à l'ellipse est équivalent au carré du demi-diamètre perpendiculaire à la normale.

III. Soit CP le segment intercepté sur la normale par le diamètre AB; nous aurons, par le second théorème d'Apollonius,

$$CP = \frac{ab}{a'}; \quad \text{donc} \quad CP.CR = b^2.$$

Ainsi, *le rectangle des segments déterminés sur une normale, par le diamètre qui lui est perpendiculaire et par l'un des axes, est équivalent au carré de la moitié de l'autre axe.*

IV. *Si l'on construit une ellipse ayant* $2a$ *pour grand axe et les points* E, F *pour foyers, cette courbe passera par le centre* O *de l'autre ellipse, et aura pour tangente en ce point le petit axe de celle-ci :* les deux ellipses sont donc, pour ainsi dire, *conjuguées.*

266. *Autres propriétés.* — Les théorèmes démontrés dans le cas de l'ellipse rapportée à ses axes, subsistent pour l'ellipse rapportée à des diamètres conjugués, pourvu que ces théorèmes soient indépendants de l'angle des axes. Ainsi :

1°. Selon qu'un point est sur l'ellipse, extérieur à l'ellipse, ou intérieur à l'ellipse, la fonction $a'^2y^2 + b'^2x^2 - a'^2b'^2$ est nulle, positive ou négative.

2°. Les carrés des ordonnées parallèles à un diamètre sont entre eux comme les rectangles des segments correspondants déterminés sur son conjugué.

3°. L'équation de la tangente, en un point (x', y'), est

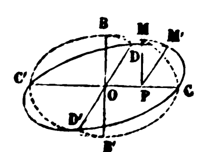
$$a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2.$$

4°. La relation entre les coefficients angulaires m et m' de deux diametres conjugués quelconques est

$$mm' = -\frac{b'^2}{a'^2};$$

et cette relation subsiste pour une tangente et le diamètre mené au point de contact; et encore pour deux cordes supplémentaires quelconques. Seulement, m et m' ne sont plus des tangentes, mais bien des rapports de sinus.

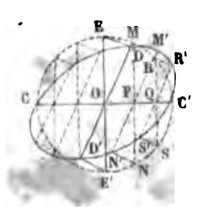
267. Problème. — *Connaissant deux diamètres conjugués, construire l'ellipse.*



Soient CC', DD' ces deux diamètres. Menons BB' perpendiculaire à CC' et égale à DD'; traçons l'ellipse dont CC' et DD' seraient les axes. Prenons ensuite un point M sur cette courbe; abaissons l'ordonnée MP; menons PM' parallèle à DD' et égale à MP: le point M' appartiendra évidemment à l'ellipse cherchée.

268. Pour simplifier cette construction, décrivons sur CC' une circonférence; menons EOE' perpendiculaire à CC'; joignons les points E, E' aux extrémités D, D' du second diamètre donné.

Si nous menons ensuite les ordonnées MN, RS,..., du cercle, puis que, par les points P, Q,..., nous menions M'N', R'S',..., ces droites, coupées par MM', RR',..., parallèles à ED, donneront les points M', R',....



269. Problème. — *Construire une ellipse, connaissant un diamètre* CC', *la direction de son conjugué* DD' *et un point* M' *de la courbe.* Ce problème ne diffère du précédent qu'en ce que le point D, extrémité du diamètre DD', est remplacé par le point M'.

EXERCICES.

I. *Théorème.* — Le rectangle des segments déterminés sur une tangente à l'ellipse, par deux diamètres conjugués quelconques, est équivalent au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

II. *Théorème.* — Le parallélogramme construit sur deux dia-

metres de l'ellipse est équivalent au parallélogramme construit sur les diamètres respectivement conjugués.

III. *Théorème.* — Le rectangle des distances de deux diamètres conjugués, à un point de l'ellipse, est équivalent au rectangle de leurs distances au point conjugué du premier. (C'est-à-dire situé à l'extrémité du diamètre conjugué de celui qui passe par le premier point.)

IV. *Théorème.* — La somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur un même diamètre, des extrémités de deux diamètres conjugués, est constante.

V. Lieu des sommets des ellipses qui ont un diamètre donné de grandeur et de position, et son conjugué, donné de grandeur seulement.

Équation du lieu :

$$u^4 - (b^2 + 2a^2\cos^2\omega)u^2 + a^2(a^2+b^2)\cos^2\omega = 0.$$

VI. Lieu de la projection d'un point de l'ellipse sur le diamètre conjugué de celui qui passe par ce point.

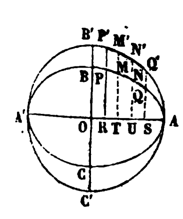
Équation du lieu :

$$u = \pm \frac{c^2 \sin\omega \cos\omega}{\sqrt{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}}.$$

VII. Pourquoi ce lieu est-il identique avec le lieu des projections du centre sur les normales?

Quadrature de l'ellipse.

270. Considérons d'abord un segment PQRS et le segment correspondant du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.



Dans l'arc PQ, inscrivons une ligne brisée, prolongeons les ordonnées de ses sommets jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'arc P'Q', et prenons les points ainsi obtenus pour sommets d'une ligne brisée correspondante, inscrite dans le cercle. Il est facile de voir que deux trapèzes correspondants quelconques, respectivement situés dans le cercle et dans l'ellipse, sont entre eux dans le rapport de a à b. Conséquemment leurs sommes, et par suite les limites de leurs sommes, sont dans le même rapport.

Donc, en appelant S l'aire du segment elliptique et S' l'aire du segment circulaire correspondant, on aura aussi

$$\frac{S}{S'} = \frac{b}{a}, \quad \text{ou} \quad S = S'\frac{b}{a}.$$

271. S'il s'agit de l'ellipse entière, soit E son aire, C étant celle du cercle : on aura $E = C\frac{b}{a}$; mais $C = \pi a^2$; donc $E = \pi ab$. Ainsi, *l'aire de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre les aires des cercles décrits sur les deux axes comme diamètres.*

272. On arrive à des conséquences tout à fait semblables quand on considère une ellipse rapportée à deux diamètres conjugués.

CHAPITRE XIX.

THÉORIE DE L'HYPERBOLE.

Préliminaires.

273. *Conditions nécessaires pour que l'équation* $My^2 + Nx^2 = P$ *représente une hyperbole.* — Il faut d'abord que M et N soient de signes contraires (205).

Il faut ensuite que P soit différent de zéro; car l'équation $My^2 - Nx^2 = 0$ représente deux droites passant par l'origine.

Si P est positif, faisons $x = y'$, $y = x'$: l'équation

$$My^2 - Nx^2 = P$$

deviendra

$$Mx'^2 - Ny'^2 = P, \quad \text{ou} \quad Ny'^2 - Mx'^2 = -P.$$

Il suffit donc de considérer l'équation

$$My^2 - Nx^2 = -P \quad (1)$$

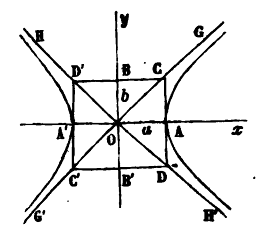
dans laquelle M, N, P sont positifs.

274. L'équation (1) donne, pour $y = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{P}{N}} = \pm a$: les points A, A', ainsi déterminés, sont *les sommets.*

$x = 0$ donne

$$y = \pm\sqrt{-\frac{P}{M}} = \pm\sqrt{-b^2} = \pm b\sqrt{-1}.$$

Ainsi, l'hyperbole ne rencontre pas l'axe des y. Les points B, B', obtenus en prenant $OB = OB' = b$, sont quelquefois appelés *sommets imaginaires*. AA' est l'*axe transverse*, BB' l'*axe non transverse*.



275. En remplaçant M et N par $\frac{P}{b^2}$ et $\frac{P}{a^2}$, on change l'équation (1) en $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1$, ou

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2. \quad (2)$$

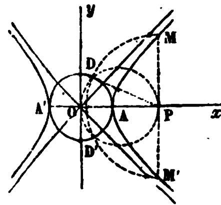
Celle-ci ne diffère de $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ que par le changement de b^2 en $-b^2$. Cette remarque permet de déduire, des propriétés de l'ellipse, un certain nombre de propriétés analogues dans l'hyperbole.

276. La règle du n° 168 donne, pour équation des asymptotes GG', HH' : $y = \pm\frac{b}{a}x$. Ces droites sont donc les diagonales du rectangle CDC'D' construit sur les deux axes. Si $b = a$, le rectangle se transforme en un carré : les asymptotes se confondent avec les bissectrices des angles formés par les axes coordonnés, c'est-à-dire qu'elles sont perpendiculaires entre elles. En même temps, l'équation (2) devient

$$y^2 - x^2 = -a^2, \quad (3)$$

et l'hyperbole est dite *équilatère*. Elle est, à l'égard de toutes les hyperboles, ce qu'est le cercle relativement aux ellipses.

277. *Construction de l'hyperbole. Première méthode.* — L'équation (2) donne



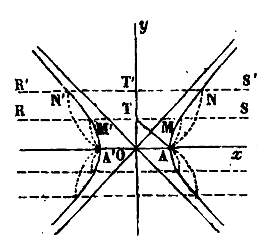
$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}y',$$

en appelant y' l'ordonnée de l'hyperbole équilatère représentée par l'équation (3). Pour construire cette courbe auxiliaire, observons que y' est une moyenne proportionnelle entre $x + a$ et $x - a$ (46);

Si donc nous décrivons une circonférence quelconque OP ayant son centre sur l'axe transverse, passant par le centre O de l'hyperbole et coupant en D la circonférence AA', et si nous prenons l'ordonnée PM égale à PD, le point M appartiendra à l'hyperbole équilatère.

Cette courbe étant construite, il suffira d'augmenter ou de diminuer toutes ses ordonnées dans le rapport de b à a, pour obtenir l'hyperbole demandée.

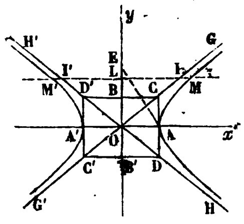
278. *Deuxième méthode.* — On peut construire l'hyperbole équilatère par un procédé plus simple et plus régulier que le précédent.



L'équation (3) donne $x = \sqrt{a^2 + y^2}$. Si donc nous menons RS parallèle à AA' et que du point T, où RS rencontre l'axe non transverse, nous décrivions les arcs égaux AM, A'M', les points M, M' appartiendront à l'hyperbole; car $TM = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OT}^2} = x$.

279. *Troisième méthode.* — On tire, de l'équation (2),

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = a^2 + x'^2,$$



en appelant x' l'abscisse du point I de l'asymptote situé, avec le point cherché M, sur une même parallèle LM à l'axe transverse. Si donc on prend, sur l'axe non transverse, $OE = x' = LI$, et que l'on porte la distance EA de L en M et de L en M', les points M, M' appartiennent à l'hyperbole.

280. 1°. *Dans l'hyperbole, les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'axe transverse sont entre eux comme les rectangles des segments correspondants formés sur cet axe;* 2° *la distance du centre à un point de l'hyperbole augmente indéfiniment avec l'abscisse de ce point* (214).

281. *Condition pour qu'un point soit extérieur ou intérieur à l'hyperbole.* — Selon qu'un point est *sur* l'hyperbole, *extérieur* à l'hyperbole (c'est-à-dire entre les deux branches) ou *intérieur* à

l'hyperbole, la fonction $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$ est *nulle*, *positive* ou *négative*.

Soit le point M, extérieur à l'hyperbole. Menons, par ce point, une parallèle à l'axe transverse : elle rencontrera l'hyperbole au point M', pour lequel on aura

$$a^2y^2 - b^2x'^2 + a^2b^2 = 0.$$

Or, l'abscisse x du point M est moindre que l'abscisse x' du point M'; donc

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 > 0; \text{ etc.}$$

EXERCICES.

I. Par un point donné C, on mène une transversale quelconque, qui rencontre aux points A, B les côtés d'un angle droit donné. On construit le triangle AMB, semblable à un triangle donné. Quel est le lieu du point M?

Réponse : Une hyperbole.

II. D'un point fixe A, on mène, à deux droites fixes B, C, un rayon vecteur quelconque Abc; on prend AM $= \sqrt{\text{A}b.\text{A}c}$; quel est le lieu du point M?

Réponse : Une hyperbole.

Des foyers et des directrices.

282. En répétant les raisonnements et les calculs qui ont été faits à propos de l'ellipse (**218-223**), on arrive aux conclusions suivantes :

1°. *L'hyperbole a deux foyers* F, F'; *situés sur l'axe transverse, de part et d'autre du centre, à une distance c égale à* $\sqrt{a^2+b^2}$.

2°. Les distances d'un point quelconque M de l'hyperbole aux foyers F', F, sont, respectivement,

$$\delta' = \pm\left(\frac{c}{a}x + a\right), \quad \delta = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right) \quad (*).$$

(*) Dans ces formules, on prendra les signes supérieurs ou les signes

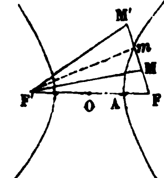
3°. *Dans l'hyperbole, la différence des rayons vecteurs menés de chaque point aux deux foyers est constante et égale à l'axe transverse.*

4°. Aux deux foyers correspondent deux directrices, représentées par $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

5°. *Le rapport des distances de chaque point de la courbe au foyer et à la directrice correspondante est constant; etc.*

283. *Remarque.* — La propriété relative à la différence des rayons vecteurs (**282**, 3°) appartient exclusivement à l'hyperbole; c'est-à-dire que : 1° *quand un point est intérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers surpasse l'axe transverse;* 2° *quand un point est extérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est moindre que l'axe transverse.*

1°. Le point M étant intérieur à l'hyperbole, prolongeons le rayon vecteur FM jusqu'à sa rencontre avec la courbe, en m, et menons $F'm$. Nous aurons



$$F'm - mF = 2a,$$

$$F'M > F'm - mM;$$

d'où, en ajoutant membre à membre, et réduisant,

$$F'M - FM > 2a.$$

2°. Dans le cas d'un point extérieur M', la même construction donne

$$F'm - mF = 2a,$$

$$F'M' < F'm + M'm;$$

donc

$$F'M' - FM' < 2a.$$

284. Soit CDC'D' le rectangle construit sur les deux axes. Nous aurons $OC = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Donc, pour construire les foyers, il suffit de décrire, du point O comme centre, les deux arcs CF, C'F'.

---

inférieurs, suivant que le point M appartient à la branche de *droite* ou à la branche de *gauche*, c'est-à-dire suivant que l'abscisse x de ce point est *positive* ou *négative*.

285. *Le pied* P *de la perpendiculaire* FP *abaissée du foyer sur l'asymptote* GH *appartient à la directrice*.

En effet, les deux triangles rectangles CAO, FPO sont égaux, comme ayant l'angle O commun, et les hypoténuses OC, OF égales. Par suite, si l'on abaisse PL perpendiculaire à l'axe transverse, on aura $OL = \frac{\overline{OP}^2}{OF} = \frac{\overline{OA}^2}{OC} = \frac{a^2}{c}$. Donc, etc.

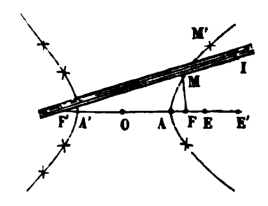
286. *Construction de l'hyperbole, au moyen des foyers.* — Prenons, sur l'axe transverse, un point quelconque E; du foyer F' comme centre, avec A'E pour rayon, traçons un arc de cercle; du foyer F, avec AE pour rayon, traçons un arc qui coupe le premier en M : le point M appartiendra à l'hyperbole.

La différence des rayons étant moindre que F'F, il suffit, pour que les circonférences se coupent, que l'on ait

$$A'E + AE > F'F.$$

Or, $A'E = A'A + AE, \quad FF' = A'A + 2AF;$

en sorte que l'inégalité devient $2AE > 2AF$, ce qui exige que le point E soit pris au delà du foyer F.



287. Pour décrire la courbe d'un mouvement continu, on fixe une règle au foyer F', de façon qu'elle puisse tourner autour de ce point; on attache l'une des extrémités d'un fil au foyer F et l'autre extrémité en un point I de la règle. Si ensuite on fait glisser une pointe le long de la règle, en tendant le fil, elle décrira un arc d'hyperbole.

EXERCICES.

I. Construire une hyperbole, connaissant la somme des axes et les foyers.

II. On donne une infinité d'hyperboles ayant même sommet réel A et même sommet imaginaire B. On demande :

1°. Quel est le lieu des centres de toutes ces hyperboles;

2°. Quel est le lieu de leurs seconds sommets réels;

3°. Quel est le lieu de leurs seconds sommets imaginaires;

4°. Quel est le lieu de leurs foyers.

III. Par un point C, donné sur une ellipse AB, on fait passer une circonférence quelconque, tangente en ce point à l'ellipse. On mène les deux tangentes communes DE, FG. Quel est le lieu des points de rencontre M? (Concours général, 1844.)

Réponse : Le lieu est une hyperbole *homofocale* avec l'ellipse donnée.

Tangente et normale.

288. La tangente en un point (x', y') de l'hyperbole sera déterminée par l'ensemble des deux équations :

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2, \quad (1)$$
$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2. \quad (2)$$

289. *La tangente a tous ses points en dehors de l'hyperbole;* c'est-à-dire que les coordonnées d'un point quelconque de cette droite vérifient la relation

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 > 0. \quad (3)$$

Tirons, de l'équation (2), la valeur de a^2y^2, nous aurons

$$a^2y^2 = \frac{b^4(xx' - a^2)^2}{a^2y'^2};$$

ou, en ayant égard à l'équation (1),

$$a^2y^2 = \frac{b^2(xx' - a^2)^2}{x'^2 - a^2}.$$

Au moyen de cette valeur, l'inégalité (3) devient

$$\frac{b^2(xx' - a^2)^2}{x'^2 - a^2} - b^2x^2 + a^2b^2 > 0.$$

Celle-ci se réduit à

$$(xx' - a^2)^2 + (a^2 - x^2)(x'^2 - a^2) > 0,$$

ou enfin, à $$(x - x')^2 > 0; \text{ etc.}$$

290. Cherchons comment varie la tangente, quand le point de contact s'éloigne indéfiniment sur la courbe; et, pour cela, mettons l'équation de cette droite sous la forme

$$y = \frac{b^2x'}{a^2y'}x - \frac{b^2}{y'}.$$

1°. Quand y' augmente indéfiniment, le terme $-\frac{b^2}{y'}$, c'est-à-dire l'ordonnée à l'origine, converge vers zéro.

2°. Le coefficient angulaire, $\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$, se présente sous forme indéterminée, quand on suppose x' et y' infinis en même temps. Mais

$$\frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \frac{bx'}{\pm a\sqrt{x'^2 - a^2}} = \pm \frac{b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}};$$

et il est évident que cette dernière fraction a pour limite $\pm \frac{b}{a}$. Par conséquent, lorsque le point de contact s'éloigne indéfiniment sur la courbe, la tangente tend à se confondre avec l'asymptote (*).

291. *Remarques.* — I. On a, entre les coefficients angulaires d'une tangente et du diamètre mené au point de contact, la relation $\text{tang}\,\alpha \;\text{tang}\,\alpha' = +\frac{b^2}{a^2}$ (236).

II. En appelant V l'angle formé par une tangente avec le diamètre mené au point de contact, on trouve (236)

$$\text{tang}\,V = +\frac{a^2 b^2}{c^2 x' y'}.$$

L'angle V, qui est droit pour $y' = 0$, diminue indéfiniment jusqu'à zéro, à mesure que y' et x' augmentent.

292. Problème. — *Mener à l'hyperbole une tangente par un point extérieur* (α, β).

Les coordonnées x', y' du point de contact seront déterminées par les deux équations

$$a^2 y'^2 - b^2 x'^2 = -a^2 b^2, \quad (1)$$

$$a^2 \beta y' + b^2 \alpha x' = -a^2 b^2. \quad (2)$$

L'élimination de y' donne

$$(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2)x'^2 - 2a^2 b^2 \alpha x' - a^4(b^2 + \beta^2) = 0. \quad (3)$$

(*) Cette propriété est générale : *l'asymptote à une courbe coïncide avec la limite des positions d'une tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment*. Nous engageons les élèves à chercher une démonstration de ce théorème.

Pour que le problème soit possible, il faut que cette équation ait ses racines réelles, ou que l'on ait

$$b^4\alpha^2 + (a^2\beta^2 - b^2\alpha^2)(b^2+\beta^2) > 0.$$

Cette condition se réduisant à $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 + a^2b^2 > 0$, exprime, comme on devait s'y attendre, que le point (α, β) est extérieur à l'hyperbole.

293. Lorsque l'équation (3) aura ses racines réelles, elles seront de signes contraires ou de même signe, suivant que le coefficient de x'^2 sera positif ou négatif. Nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité des conclusions, que le point (α, β) soit placé dans l'angle des coordonnées positives. Alors la relation $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 \gtrless 0$ se réduit à $\frac{\beta}{\alpha} \gtrless \frac{b}{a}$.

Le premier membre de cette dernière inégalité est le coefficient angulaire de la droite menée du centre au point (α, β), tandis que le second est le coefficient de l'asymptote située dans l'angle des coordonnées positives. Conséquemment, l'équation (3) aura ses deux racines de signes contraires ou ses deux racines positives, selon que le point (α, β) sera au-dessus ou au-dessous de cette asymptote. En d'autres termes : *Les points de contact des tangentes menées à une hyperbole, par un point extérieur, sont ou ne sont pas situés sur la même branche, suivant que le point donné est ou n'est pas dans l'espace compris entre la courbe et les asymptotes.*

Si le point donné est sur une asymptote, l'une des racines de l'équation (3) devient infinie. Il est clair en effet que, dans ce cas, l'une des deux tangentes se confond avec l'asymptote, et que le point de contact s'est éloigné indéfiniment.

294. Problème. — *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Soit m le coefficient angulaire de la droite donnée et de la tangente cherchée : l'équation de cette dernière droite sera (240)

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

Le problème ne sera possible que si l'on a $m^2 > \frac{b^2}{a^2}$; c'est-à-dire *si la parallèle à la droite donnée, menée par le centre de l'hy-*

perbole, tombe dans l'un des angles formés par l'axe non transverse et les asymptotes. Quand cette condition sera satisfaite, il y aura deux tangentes satisfaisant à la question.

295. Théorème. — *La tangente en un point de l'hyperbole divise, en deux parties égales, l'angle des rayons vecteurs menés à ce point.*

Cette proposition, qui résulte du calcul du n° 244, peut aussi être démontrée comme il suit :

Prenons sur la tangente MT un point quelconque m différent du point de contact M. Nous aurons

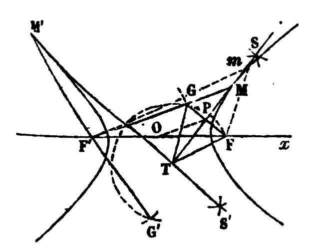
$$F'm - mF < 2a;$$

d'ailleurs, $$F'M - MF = 2a,$$

donc $$F'm - mF < F'M - MF.$$

Ainsi, le point de contact M doit être situé, sur la tangente MT, de telle sorte que la différence des distances F'M, FM, soit un maximum. Cette dernière condition exige, comme on sait, que les angles F'MT, FMT soient égaux; donc, etc.

296. *Construction, au moyen des foyers, de la tangente à l'hyperbole.* — T étant le point duquel on veut mener une tangente à l'hyperbole, on doit : 1° du point T, comme centre, décrire une circonférence passant au foyer F; 2° du foyer F' comme centre, avec $2a$ pour rayon, décrire une nouvelle circonférence; 3° joindre le point de rencontre G de ces deux circonférences avec le foyer F', par la droite F'GM; des points F, G décrire, d'une même ouverture de compas, des arcs se coupant en S, etc. (246).



297. Pour que le point G existe, il faut que l'on ait :

1°. $$F'T < 2a + FT,$$

2°. $$F'T > 2a - FT \quad \text{ou} \quad > FT - 2a,$$

selon que FE sera $< 2a$ ou $> 2a$.

La première inégalité est vérifiée quand le point T est extérieur.

Il en est de même pour la troisième. Quant à la deuxième, elle a toujours lieu, attendu que le triangle F'TF donne $F'T + FT > 2c$ et, à plus forte raison, $F'T + FT > 2a$.

298. La construction de la tangente à l'hyperbole donne lieu aux observations que nous avons faites à propos de la tangente à l'ellipse. Ainsi, *le lieu des projections* P *du foyer sur les tangentes à l'hyperbole est la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre, etc.*

EXERCICES.

I. On donne une infinité de sections coniques homofocales (*), et un point situé dans leur plan; et l'on demande :

1°. Quel est le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées à ces courbes, par le point donné;

2°. Quel est le lieu géométrique des pieds des normales menées à ces courbes, par le point donné;

3°. Quel est le lieu géométrique des perpendiculaires abaissées, du point donné, sur les cordes de contact. (Concours général, 1840.)

II. On donne une hyperbole équilatère, et l'on demande le lieu des points tels, que de chacun d'eux on puisse mener trois normales à cette courbe.

III. Si, par un point A, pris sur une courbe du second ordre, on mène deux cordes AB, AC perpendiculaires entre elles, la corde BC passera par un point fixe, situé sur la normale en A. (Théorème de M. Frégier.)

Cordes supplémentaires.

299. On appelle *cordes supplémentaires,* dans l'hyperbole, *celles qui joignent un point de la courbe aux extrémités d'un diamètre transverse.*

Si γ et γ' représentent les inclinaisons de ces deux cordes sur l'axe transverse, on aura $\tang\gamma \tang\gamma' = \frac{b^2}{a^2}$, etc. (249).

300. Relativement à l'angle M formé par deux cordes supplémentaires, observons que, dans le cas de l'ellipse, nous avons

(*) C'est-à-dire une infinité d'ellipses et d'hyperboles ayant les mêmes foyers.

trouvé $\tang M = -\frac{2ab^2}{c^2 y}$ (251); donc, pour l'hyperbole,

$$\tang M = \frac{2ab^2}{c^2 y}.$$

Si le point M, d'abord supposé confondu avec le sommet A, s'éloigne de plus en plus sur la courbe, l'ordonnée y variera de zéro à l'infini, et d'après la valeur précédente, l'angle M, d'abord droit, diminuera indéfiniment. Nous n'avons donc pas, comme dans le cas de l'ellipse, une limite pour l'angle formé par deux cordes supplémentaires, et contrairement à ce qui arrive pour cette dernière courbe, il est toujours possible de *trouver deux cordes supplémentaires formant entre elles un angle donné* V (252).

Diamètres conjugués.

301. La relation entre les directions de deux diamètres conjugués de l'hyperbole est $mm' = \frac{b^2}{a^2}$ (254).

Il est bon d'observer que *si un diamètre rencontre la courbe, son conjugué ne la rencontre pas*. En effet, soient $y = mx$ et $y = m'x$ les équations de ces deux droites. Si m est moindre que $\frac{b}{a}$, alors, par compensation, m' est plus grand que $\frac{b}{a}$; donc le premier diamètre rencontre l'hyperbole et l'autre ne la rencontre pas.

302. Observons encore que si le coefficient m, d'abord supposé moindre que $\frac{b}{a}$, tend vers cette limite, il en sera de même pour le coefficient m'; donc *la limite commune des directions de deux diamètres conjugués est l'asymptote*.

303. *Lieu des extrémités des diamètres qui ne rencontrent pas l'hyperbole.* — Si nous combinons les équations

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad (1) \qquad y = mx, \quad (2)$$

m étant supposé plus grand que $\frac{b}{a}$, nous trouverons, pour x et

pour y, des valeurs de la forme $\beta\sqrt{-1}$. Posons donc

$$x = x'\sqrt{-1},\quad y = y'\sqrt{-1},$$

d'où
$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = +a^2b^2. \quad (3)$$

Pour une valeur particulière attribuée à m, les équations (2) et (3) donneront deux valeurs réelles de x' et deux valeurs réelles de y'. Chacun des points ainsi obtenu est ce qu'on appelle *l'extrémité d'un diamètre non transverse*. Le lieu de ces extrémités, représenté par l'équation (3), est *l'hyperbole conjuguée de l'hyperbole primitive*. On voit, par la comparaison des équations (3) et (1), que *ces deux courbes ont mêmes asymptotes, que les sommets réels de l'une sont les sommets imaginaires de l'autre, etc.*

304. *Hyperbole rapportée à des diamètres conjugués.* — L'équation sera (258)

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2 \ (*).$$

Quant aux longueurs des demi-diamètres, elles seront données par les formules

$$\left.\begin{aligned} a'^2 &= \frac{-a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha}, \\ b'^2 &= \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha' - b^2\cos^2\alpha'}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

que l'on déduit de celles du n° 258, en changeant b^2 en $-b^2$ et b'^2 en $-b'^2$.

Enfin, les angles α et α' sont liés par l'équation

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{b^2}{a^2}. \quad (2)$$

305. Les formules (1) et (2) conduisent au deux théorèmes d'Apollonius (260, 261) :

1°. *Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques est équivalent au rectangle des axes.*

(*) Dans cette équation, a' représente le demi-diamètre transverse, et b' le demi-diamètre non transverse, *rendu réel*. En conservant les notations du numéro précédent, on aurait

$$b' = +\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

2°. *La différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est équivalente à la différence des carrés des axes.*

Ces théorèmes sont exprimés par les équations

$$a'b'\sin(\alpha'-\alpha)=ab,\quad (3)\qquad a'^2-b'^2=a^2-b^2,\quad (4)$$

lesquelles peuvent tenir lieu des formules (1).

306. L'équation (4) prouve que : 1° *dans une hyperbole non équilatère, il n'y a pas de diamètres conjugués égaux ;* 2° *dans une hyperbole équilatère, deux diamètres conjugués quelconques sont égaux.*

Dans ce dernier cas d'une hyperbole équilatère, les angles α, α' formés avec l'axe transverse par deux diamètres conjugués quelconques sont complémentaires. En effet, la relation (2) devient

$$\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha'=1,\quad \text{d'où}\quad \operatorname{tang}\alpha'=\cot\alpha.$$

307. Les propriétés que nous avons déduites de l'ellipse rapportées à un système de diamètres conjugués (266) subsistent, sauf quelques modifications, pour l'hyperbole.

Asymptotes.

308. Considérons une hyperbole rapportée à un système de diamètres conjugués AA', BB'. Son équation sera

$$a'^2y^2-b'^2x^2=-a'^2b'^2,\quad (1)$$

et les asymptotes seront représentées par

$$y=\pm\frac{b'}{a'}x.\quad (2)$$

En faisant, dans cette dernière formule, $x=a'$, on obtient $y=\pm b'$. Conséquemment, *les asymptotes de l'hyperbole coïncident avec les diagonales du parallélogramme* CDC'D' *construit sur deux diamètres conjugués quelconques.*

309. D'après l'équation (2), l'axe des x, qui était un diamètre de l'hyperbole, est aussi un diamètre par rapport au système des deux asymptotes ; c'est-à-dire que si l'on mène une transversale quelconque EF parallèle au diamètre BB', on aura

$$\mathrm{EI}=\mathrm{FI},\quad \mathrm{E'I}=\mathrm{F'I},\quad \text{puis}\quad \mathrm{EE'}=\mathrm{FF'}.$$

D'ailleurs, le diamètre BB′ a une direction arbitraire. Donc *les segments d'une transversale quelconque, compris entre l'hyperbole et les asymptotes, sont égaux entre eux.*

La même propriété subsiste, évidemment, pour la tangente CAD; c'est-à-dire que *la partie d'une tangente, comprise entre les asymptotes, est divisée en deux parties égales par le point de contact.*

310. Appelons y l'ordonnée EI et y' l'ordonnée E′I. Nous aurons

$$\text{EE}' = y' - y, \quad \text{EF}' = y' + y;$$

puis

$$\text{EE}'.\text{EF}' = y'^2 - y^2.$$

Or

$$y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}x^2, \quad y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x^2 - a'^2);$$

donc

$$\text{EE}'.\text{EF}' = b'^2.$$

Ainsi *le rectangle des segments d'une sécante, compris entre les asymptotes et un point de la courbe, est équivalent au carré du demi-diamètre parallèle à cette sécante.*

311. Les propriétés qui viennent d'être démontrées permettent de résoudre très-aisément les problèmes dont voici les énoncés:

1°. *Connaissant les asymptotes et un point de l'hyperbole, décrire la courbe par points;*

2°. *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote et trois points;*

3°. *Construire la tangente en un point donné sur l'hyperbole;*

4°. *Connaissant les asymptotes et un point, construire, en direction et en grandeur, les axes de l'hyperbole;*

5°. *Connaissant un système de diamètres conjugués, construire les axes, etc.*

312. Par le point A, extrémité d'un diamètre transverse quelconque, menons AM, AN parallèles aux asymptotes. A cause de AC = AD, nous aurons OM = MD et ON = NC; donc le parallélogramme AMON sera la moitié du triangle DOC, ou le huitième du parallélogramme CDC′D′. Conséquemment, d'après le premier des deux théorèmes d'Apollonius, *le parallélogramme formé par les asymptotes et les parallèles à ces droites menées par un point de la courbe, est équivalent au huitième du rectangle des axes.*

EXERCICES.

I. *Théorème*. — Dans l'hyperbole, toute corde divise en deux parties égales la portion d'asymptote comprise entre les tangentes menées par les extrémités de cette corde.

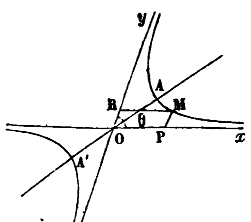
II. Les côtés d'un angle tournent respectivement autour de deux points fixes, de manière à intercepter, sur une droite fixe, un segment de grandeur donnée. Quel est le lieu décrit par le sommet de l'angle?

III. Connaissant une asymptote, une directrice et une tangente, construire l'hyperbole.

IV. Connaissant un point, une asymptote et les longueurs des axes, construire l'hyperbole.

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

313. *Première méthode*. — Construisons les coordonnées MP, MR d'un point quelconque de la courbe, et représentons par θ l'angle des asymptotes. D'après le théorème démontré ci-dessus (312), nous aurons



$$\text{OP}.\text{PM}.\sin\theta = \frac{1}{8}.2a.2b = \frac{1}{2}ab,$$

ou
$$xy = \frac{ab}{2\sin\theta}.$$

Pour évaluer $\sin\theta$ en fonction des quantités a et b, observons que l'axe transverse OA est la bissectrice de l'angle yox; donc

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta = \frac{b}{a},\quad \sin\frac{1}{2}\theta = \frac{b}{c},\quad \cos\frac{1}{2}\theta = \frac{a}{c},$$

et
$$\sin\theta = \frac{2ab}{c^2}.$$

Au moyen de cette valeur, l'équation ci-dessus se réduit à

$$xy = \frac{c^2}{4},\quad \text{ou}\quad xy = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

La quantité constante $\frac{a^2+b^2}{4}$ est appelée *puissance* de l'hyperbole : en la représentant par m^2, on a $xy = m^2$.

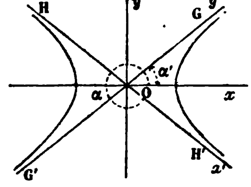
314. *Seconde méthode.* — Partons de l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad (1)$$

et employons les formules

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha',$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha'.$$

Nous prenons pour nouvel axe des abscisses l'asymptote HH'; conséquemment $\alpha = 2\pi - \alpha'$, et l'angle α' est aigu. La tangente de ce dernier angle étant $\frac{b}{a}$, nous aurons



$$\sin\alpha' = \frac{b}{c}, \quad \cos\alpha' = \frac{a}{c},$$
$$\sin\alpha = -\frac{b}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{c};$$

puis
$$x = \frac{a}{c}(x'+y'), \quad y = \frac{b}{c}(y'-x').$$

La substitution de ces valeurs, dans l'équation (1), donne immédiatement $x'y' = \frac{1}{4}c^2$.

CHAPITRE XX.

THÉORIE DE LA PARABOLE.

Préliminaires.

315. L'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet est (209)

$$My^2 + Sx = 0,$$

ou, en posant $\frac{S}{M} = -2p$,

$$y^2 = 2px. \quad (1)$$

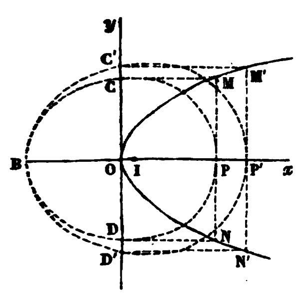
La constante $2p$, à laquelle on donne le nom de *paramètre*,

peut être supposée positive; car si l'on avait $y^2 = -2px$, on changerait x en $-x'$, et l'équation deviendrait

$$y^2 = 2px'.$$

316. A l'inspection de l'équation (1), on reconnaît que : 1° l'axe des abscisses est un axe de la courbe, parce que les coordonnées sont rectangulaires; 2° on peut attribuer à x des valeurs positives quelconques; 3° x et y croissent ensemble au delà de toute limite, à partir de zéro, etc.

317. *Construction de la parabole.* — On prend, à partir du sommet O, et sur le prolongement de l'axe, $OB = 2p$. D'un point quelconque I de l'axe, pris comme centre, on décrit une circonférence passant en B et coupant l'axe des y aux points C, D. Si, sur la tangente MPN parallèle à cet axe, on porte



$$PM = PN = OC = OD,$$

les points M, N appartiendront à la parabole.

En faisant varier le point I, on obtiendra autant de points qu'on voudra.

318. 1°. *Dans la parabole, les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'axe sont entre eux comme les abscisses correspondantes* (215).

2°. *Suivant qu'un point est sur la parabole, extérieur à la parabole, ou intérieur à la parabole, la fonction $y^2 - 2px$ est nulle, positive ou négative* (216).

319. Théorème. — *La parabole peut être regardée comme la limite d'une série d'ellipses ayant même sommet et même foyer.*

Considérons une ellipse dans laquelle le sommet A et le foyer F sont fixes, tandis que le centre O s'éloigne indéfiniment avec le second sommet A' et le second foyer F'. Rapportons cette ellipse variable à son grand axe et à la tangente au sommet A : son équation sera

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Si nous représentons par $\frac{1}{2}p$ la distance constante

$$AF = a - c = a - \sqrt{a^2 - b^2},$$

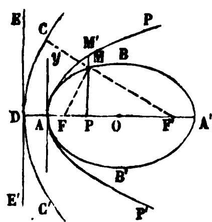
nous aurons

$$a^2 - b^2 = \left(a - \frac{1}{2}p\right)^2, \quad \text{puis} \quad b^2 = ap - \frac{1}{4}p^2.$$

L'équation de l'ellipse devient

$$y^2 = \frac{ap - \frac{1}{4}p^2}{a^2}(2ax - x^2), \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px\left(1 - \frac{p}{4a}\right)\left(1 - \frac{x}{2a}\right).$$

Lorsque a croît de plus en plus, cette équation donne, pour une même valeur de x, des valeurs de y de plus en plus grandes, qui tendent vers une limite déterminée par $y^2 = 2px$. C'est ce qu'il fallait démontrer.



320. *Remarque. — La parabole peut aussi être considérée comme la limite d'une série d'hyperboles ayant même sommet et même foyer.*

Du foyer.

321. Reprenons l'ellipse considérée tout à l'heure. Soit M un point quelconque de cette courbe. Menons les rayons vecteurs FM, F'M, et prolongeons celui-ci d'une quantité MC = MF. Nous aurons F'C = $2a$. Si donc, du foyer F' comme centre, avec $2a$ pour rayon, nous décrivons la circonférence CDC', il arrivera que *l'ellipse* AA' *sera le lieu des points également distants du foyer* F' *et de la circonférence* CDC'.

A présent, supposons que le centre O s'éloigne indéfiniment du sommet A : l'ellipse variable tend de plus en plus vers la parabole PAP'. En même temps, la circonférence CDC' tend à se confondre avec sa tangente EDE'. Donc, *la parabole* PAP' *est le lieu des points également distants du point* F' *et de la droite* EE'.

322. D'après ce que nous avons vu à propos de la théorie des foyers, il est clair que EE' est *la directrice* et F' le *foyer* de cette parabole. C'est ce que l'on peut encore reconnaître aisément de la manière suivante :

L'ellipse AA' étant rapportée à son grand axe et à la tangente Ay, on a

$$FM = \frac{c}{a}(x-a)+a=\frac{c}{a}x-c+a=\frac{c}{a}x+\frac{1}{2}p=\frac{a-\frac{1}{2}p}{a}x+\frac{1}{2}p.$$

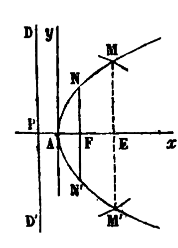
A mesure que a augmente, la fraction $\frac{a-\frac{1}{2}p}{a}$ tend vers l'unité. Donc, en appelant δ la distance du foyer F de toutes les ellipses, au point M' de la parabole située sur l'ordonnée MP, nous aurons $\delta = x+\frac{1}{2}p$. Le second membre étant une fonction entière et du premier degré de l'abscisse, F est le foyer de la courbe.

En égalant à zéro la fonction $x+\frac{1}{2}p$, nous obtenons, pour équation de la directrice, $x=-\frac{1}{2}p$. Or, $AF=\frac{1}{2}p$: la directrice est donc, ainsi que nous l'avions trouvé par une autre voie, la droite EE'.

323. Toutes ces propriétés peuvent, du reste, être obtenues directement. Il suffit, pour y parvenir, d'appliquer à l'équation $y^2=2px$ la méthode que nous avons employée dans le cas de l'ellipse.

324. Faisons $x=\frac{1}{2}p$ dans l'équation de la parabole; nous aurons

$$y=\pm p, \quad \text{d'où} \quad NN'=2p.$$



Ainsi, *le paramètre de la parabole est égal à la double ordonnée passant par le foyer.* Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, on donne de même le nom de *paramètre* à la double ordonnée passant par un foyer. Ce paramètre a pour valeur

$$\frac{2b^2}{a}=\frac{(2b)^2}{2a}:$$

c'est une troisième proportionnelle à l'axe focal et au second axe.

325. *Construction de la parabole, à l'aide de la directrice et du foyer.* — Si, après avoir abaissé du foyer F l'axe PF perpendiculaire à la directrice DD', on mène MM' parallèle à cette der-

nière droite; puis qu'avec PE pour ouverture de compas, on décrive, du foyer comme centre, deux arcs coupant la parallèle en MM', ces deux points appartiendront à la parabole.

Pour décrire la parabole d'un mouvement continu, on prend un fil IMF de même longueur que le côté IH d'une équerre IHG. On attache l'une des extrémités de ce fil en un point fixe F, et l'autre extrémité au sommet I de l'équerre. Ensuite, on fait mouvoir l'équerre le long d'une règle fixe DD', en ayant soin de tendre le fil contre l'équerre au moyen d'un style, lequel décrit un arc de parabole.

On a, en effet, à chaque instant,

$$\mathrm{IM} + \mathrm{MF} = \mathrm{IM} + \mathrm{MH}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{MF} = \mathrm{MH}.$$

Tangente et normale.

326. L'équation de la tangente en un point $(x'\,y')$ sera, par la règle générale,

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x'). \quad (1)$$

On a d'ailleurs, entre x' et y', la relation

$$y'^2 = 2px', \quad (2)$$

laquelle réduit l'équation précédente à

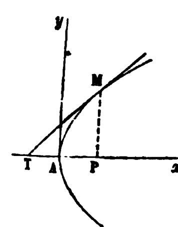
$$yy' = p(x + x'). \quad (3)$$

327. *La tangente a tous ses points* (autres que le point de contact) *en dehors de la parabole.* — En effet, la combinaison des équations (2) et (3) donne

$$y'^2 - 2yy' = -2px, \quad \text{d'où} \quad (y' - y)^2 = y^2 - 2px, \text{ etc.}$$

328. Le coefficient angulaire de la tangente est $\frac{p}{y'}$; donc pour un point M dont les coordonnées sont positives, cette droite fait, avec l'axe, un angle aigu qui diminue indéfiniment à mesure que le point M s'éloigne du sommet. *La tangente tend donc à devenir parallèle à l'axe.*

329. Si, dans l'équation de la tangente, on fait $y = 0$, on trouve $x = -x'$. Ainsi, en prenant AT égale à l'abscisse AP du point de contact M, on aura le pied T de la tangente. En d'autres termes, *la sous-tangente* TP *est double de l'abscisse* AP.



330. Problème. — *Mener une tangente par un point* (α, β) *non situé sur la courbe.*

On a $y'^2 = 2px'$ et $\beta y' = p(\alpha + x')$.

L'élimination de x' donne

$$y'^2 - 2\beta y' + 2p\alpha = 0, \quad \text{d'où} \quad y' = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}.$$

Pour que le problème soit possible, on doit avoir $\beta^2 > 2p\alpha$; c'est-à-dire que le point donné doit être extérieur à la parabole.

331. *Rencontre d'une droite avec une parabole.* — Eliminons x entre les équations $y^2 = 2px$, $y = mx + n$; nous aurons

$$y^2 - \frac{2p}{m} y + \frac{2pn}{m} = 0.$$

La droite sera *sécante*, *tangente* ou *extérieure* suivant que la quantité $p - 2mn$ sera *positive*, *nulle* ou *négative*. L'équation d'une tangente parallèle à une droite dont le coefficient est m, sera donc $y = mx + \frac{p}{2m}$.

332. *Équation de la normale.* — Le coefficient angulaire de la tangente en un point M (x', y') étant $\frac{p}{y'}$, celui de la normale sera $-\frac{y'}{p}$. Conséquemment, l'équation de la normale est

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

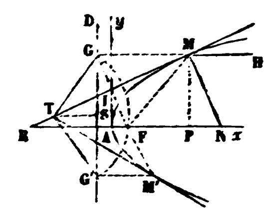
Si dans cette équation, on fait $y = 0$, on trouve

$$x' - x = \text{NP} = \textit{sous-normale} = p.$$

Ainsi, *dans la parabole, la sous-normale est constante et égale à la moitié du paramètre.*

333. De cette valeur de la sous-normale, il résulte que

$$FN = AP + PN - AF = x' + \frac{1}{2}p.$$



Le rayon vecteur FM a aussi pour expression $x' + \frac{1}{2}p$: donc FM = FN. Il sera donc bien facile, au moyen du foyer F, de construire la normale en un point M de la courbe.

334. Le triangle FMN étant isocèle, les angles FMN, FNM sont égaux entre eux. D'ailleurs, si l'on mène MH parallèle à l'axe, on aura

$$HMN = FNM.$$

Donc les angles FMN, HMN sont égaux entre eux; c'est-à-dire que *la normale en un point de la parabole divise en deux parties égales l'angle formé par le diamètre et le rayon vecteur menés de ce point.*

Cette propriété aurait pu être déduite de la propriété correspondante, soit dans l'ellipse, soit dans l'hyperbole.

335. *Construction, au moyen du foyer, de la tangente à la parabole.*

1°. Pour obtenir la tangente en un point M pris sur la courbe, il suffit d'observer que cette droite MT, perpendiculaire à la normale MN, est la bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur MF et par le prolongement MG du diamètre MH. D'après cela, si on prend FR = FM, le point R est le pied de la tangente.

Cette construction résulte aussi de ce que AR = AP.

2°. Supposons qu'il s'agisse de mener une tangente MT par un point extérieur T. Soit MG la perpendiculaire abaissée du point de contact inconnu M sur la directrice DD'. A cause de MF = MG, et des angles égaux FMT, GMT, la tangente MT sera perpendiculaire au milieu de FG. Ainsi, les obliques FT, GT sont égales. Il faudra donc, pour obtenir le point G, décrire du point donné T comme centre, avec TF pour rayon, un arc de cercle.

336. 1°. Si le point T est extérieur, la distance TS à la directrice sera, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître, moindre que TF. Conséquemment, l'arc décrit du point T comme centre coupera

la directrice DD′ en deux points G, G′, lesquels donneront deux tangentes TM, TM′.

2°. Si le point T est sur la courbe, la circonférence touche la directrice, et l'on n'a qu'une tangente.

3°. Enfin, le point T étant intérieur, la circonférence n'a aucun point de commun avec la directrice, et le problème est impossible.

337. *Remarque.* — On peut, d'après la construction qui vient d'être indiquée, obtenir les tangentes TM, TM′ et les points de contact M, M′, sans que la parabole soit tracée.

EXERCICES.

I. Construire une parabole, connaissant le foyer, une tangente et un point.

II. Lieu des projections d'un point de l'axe d'une parabole, sur les normales à cette courbe.

III. Sur le rayon vecteur FM d'une parabole, et avec la normale MN comme diagonale, on construit un rectangle FMPN. Quel est le lieu décrit par le sommet P (*)?

Équation du lieu : $u = \dfrac{p}{2\sin^3 \frac{1}{3}\omega}$.

IV. Lieu des milieux des cordes normales à une parabole donnée.

Diamètres.

338. En appliquant la règle générale (178) à l'équation $y^2 = 2px$, on trouve $y = \dfrac{p}{m}$ pour le diamètre des cordes représentées par $y = mx + \alpha$. Ainsi, *dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles à l'axe.* C'est ce que l'on savait déjà (180).

Réciproquement, *toute parallèle à l'axe est un diamètre.* Car, de $\dfrac{p}{m} = b$, b étant une quantité donnée, on peut toujours conclure m.

339. *Parabole rapportée à un diamètre* Ox' *et à la tangente* Oy' *à l'extrémité de ce diamètre.* — Les formules qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques,

(*) Ce lieu est une des courbes que l'on désigne, en Physique, sous le nom de *caustiques.*

sont

$$x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha',$$
$$y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'.$$

Ici, a et b sont les coordonnées d'un point O de la parabole; conséquemment, $b^2 = 2pa$. De plus, l'angle α est nul, et l'angle α' est déterminé par $\tan g\alpha' = \frac{p}{b}$. Nous aurons donc, à cause de

$$\sin\alpha' = \frac{p}{\sqrt{b^2+p^2}}, \quad \cos\alpha' = \frac{b}{\sqrt{b^2+p^2}}:$$

$$x = a + x' + \frac{b}{\sqrt{b^2+p^2}} y', \quad y = b + \frac{p}{\sqrt{b^2+p^2}} y'.$$

La substitution de ces valeurs, dans l'équation $y^2 = 2px$, donne

$$y'^2 = 2\frac{b^2+p^2}{p} x' = 2(2a+p)x';$$

d'où, en posant $a + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p'$,

$$y'^2 = 2p'x'.$$

Cette équation est de même forme que $y^2 = 2px$: c'est un résultat que l'on pouvait prévoir, puisque *la tangente* Oy' *est parallèle aux cordes que le diamètre* Ox' *divise en deux parties égales.*

340. La constante $2p'$ est ce qu'on appelle *le paramètre du diamètre* auquel la courbe est rapportée. *Il est égal à quatre fois la distance du foyer à l'extrémité de ce diamètre.* En effet,

$$OF = a + \frac{1}{2}p = \frac{2p'}{4}.$$

341. Les équations $y^2 = 2px$, $y'^2 = 2p'x'$, étant de même forme, tous les théorèmes indépendants de l'inclinaison des coordonnées, démontrés à l'aide de la première équation, auront encore lieu pour le nouveau système d'axes. Ainsi,

1°. *Les carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes.*

2°. *Suivant qu'un point est sur la parabole, extérieur à la pa-*

rabole, ou intérieur à la parabole, la fonction $y^2 - 2p'x$ *est nulle, positive ou négative* (318).

3°. L'équation de la tangente en un point (x', y') sera (326)

$$yy' = p(x + x').$$

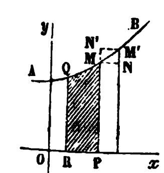
4°. *La sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact* (329).

5°. *Le diamètre mené au point de concours de deux tangentes passe par le milieu de la corde de contact.*

CHAPITRE XXI.

QUADRATURE DES COURBES PLANES.

342. Proposons-nous d'évaluer l'espace QMPR compris entre un arc de courbe AB, l'axe des abscisses, une première ordonnée QR et une ordonnée quelconque MP : cette évaluation est ce qu'on appelle la *quadrature* de la courbe AB.



Soient $y = f(x)$ l'équation de l'arc AB, OR $= a$ l'abscisse du point fixe Q, x et y les coordonnées du point quelconque M. L'aire cherchée A sera évidemment une certaine fonction de x : je dis que *la dérivée de cette fonction est égale à l'ordonnée* y. En d'autres termes,

$$A' = f(x).$$

Pour démontrer cette propriété importante, prenons sur l'arc AB un point M' assez voisin du point M, pour que, de M à M', l'ordonnée soit toujours croissante ou toujours décroissante; menons l'ordonnée M'P' et les parallèles MN, M'N' à l'axe des absoisses. L'inspection de la figure donne

$$MNP'P < MM'P'P < M'NPP';$$

ou, en employant les notations habituelles,

$$y\Delta x < \Delta A < (y + \Delta y)\Delta x;$$

ou encore

$$y < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Le rapport $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ a pour limite A'; il est compris entre y et une quantité dont la limite est y (*); donc

$$A' = y = f(x).$$

343. *Remarque.* — Si les axes, au lieu d'être rectangulaires, faisaient entre eux un angle θ, on aurait

$$A' = y \sin \theta.$$

344. Il résulte, du théorème précédent, que la détermination de l'aire A d'une courbe dont $f(x)$ représente l'ordonnée, repose sur la solution de ce problème : *Trouver une fonction* $\varphi(x)$ *qui ait pour dérivée* $f(x)$ (**). Dans chaque cas particulier, la fonction A se présentera sous la forme

$$A = \varphi(x) + \text{const.}$$

Pour déterminer la constante, on observe que l'aire A s'annule quand l'ordonnée MP se confond avec QR; donc, finalement,

$$A = \varphi(x) - \varphi(a).$$

345. *Applications.* — I. Dans le cas de la parabole, $y^2 = 2px$ ou $y = \sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}$; donc $\varphi(x) = \frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}$; et, en supposant $A = 0$ pour $x = 0$,

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}.$$

Le second membre est la même chose que $\frac{2}{3}\sqrt{2px}.x = \frac{2}{3}xy$; donc

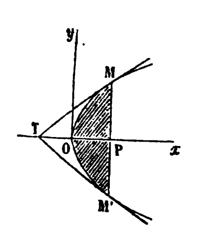
$$A = \frac{2}{3}xy.$$

Ainsi, *le demi-segment parabolique* OPM *est équivalent aux deux tiers du rectangle construit sur l'abscisse et l'ordonnée du point extrême* M.

(*) Ce raisonnement ne diffère pas de celui dont on fait usage pour trouver la limite du rapport de l'arc au sinus.

(**) Nous avons donné, dans l'Algèbre, quelques exemples de ce genre de questions.

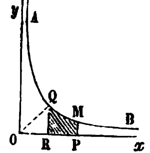
La sous-tangente TP *est double de l'abscisse* OP; donc ce rectangle est équivalent au triangle MTP; et, par suite, *le segment parabolique* MOM′ *est équivalent aux deux tiers du triangle* MTM′ *formé par la corde du segment et par les tangentes aux extrémités de cette corde* (*).



II. L'hyperbole équilatère, rapportée à ses asymptotes, a pour équation $xy = 1$, ou $y = \frac{1}{x}$. Donc

$$A = lx + \text{const.}$$

Si l'ordonnée fixe QR a été menée par le sommet, A doit s'annuler pour $x = 1$; en sorte que la constante est nulle, et que l'on a simplement



$$A = l.x.$$

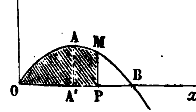
Ainsi, *l'espace compris entre l'hyperbole équilatère, son asymptote, l'ordonnée du sommet et une ordonnée quelconque, a pour mesure le logarithme népérien de l'abscisse correspondant à cette dernière ordonnée.*

C'est pour cette raison que les logarithmes népériens sont désignés, quelquefois, sous le nom de *logarithmes hyperboliques*.

III. Si l'on prend $y = \sin x$, on obtient

$$\varphi(x) = -\cos x, \quad A = -\cos x + \text{const.}$$

Donc, à cause de $\cos 0 = 1$, l'aire comprise entre la *sinusoïde* OAM, l'ordonnée MP et l'axe des abscisses, sera donnée par la formule



$$A = 1 - \cos x.$$

En particulier, le segment OAB a pour mesure $A = 2$: il est équivalent au double du carré construit sur l'ordonnée maximum AA′.

(*) Ce théorème, qui subsiste quand la corde MM′ est oblique à l'axe, est attribué à Archimède.

EXERCICES.

I. **Trouver l'aire de la courbe représentée par** $y = \frac{1}{1+x^2}$, *entre les limites* $x = 0$, $x = +\infty$.

Résultat : $A = \frac{\pi}{2}$.

II. **Même question pour les courbes dont les équations sont**

$$y = \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}, \quad y = \frac{1}{(x^4+1)^2}, \quad y = \frac{1}{x^3+1}.$$

Résultats :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2(1+x)}, \quad A = \frac{1}{2};$$

$$\varphi(x) = \frac{x\sqrt{2}}{4(x^4+1)} + \frac{3}{8}\left(l\, \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2 - x\sqrt{2}+1} + \text{arc tang}\, \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right),$$

$$A = \frac{3}{16}\pi;$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\, l\, \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, \text{arc tang}\, \frac{2x-1}{\sqrt{3}}, \quad A = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

CHAPITRE XXII.

ÉQUATIONS DES COURBES DU SECOND ORDRE, EN COORDONNÉES POLAIRES.

346. Les coordonnées rectilignes sont celles qui mettent le mieux en évidence les propriétés des lignes du second ordre. Mais, dans quelques parties des Mathématiques appliquées, dans l'Astronomie par exemple, on a besoin de recourir aux coordonnées polaires, parce qu'elles donnent lieu à des calculs plus simples. Nous allons donc rapporter à ce système de coordonnées les diverses courbes du second ordre, en commençant par le cercle.

Cercle.

347. R étant le rayon, soient d et α les coordonnées polaires du centre, soient u et ω les coordonnées d'un point quelconque M de la circonférence. Le triangle MOC donne, immédiatement,

$$R^2 = u^2 + d^2 - 2du\cos(\omega - \alpha). \quad (1)$$

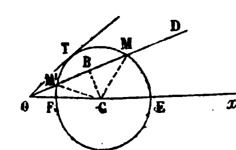
348. Au lieu de prendre pour axe la droite quelconque Ox, comptons les amplitudes à partir de la droite OC. Nous aurons, en changeant ω en $\alpha + \omega$,

$$R^2 = u^2 + d^2 - 2du\cos\omega; \quad (2)$$

d'où

$$u = d\cos\omega \pm \sqrt{R^2 - d^2\sin^2\omega}. \quad (3)$$

Il est facile de vérifier que cette équation représente un cercle.



En effet, menons une droite quelconque OD, faisant avec Ox un angle ω, puis abaissons CB perpendiculaire à OD. Il résultera, de cette construction, $OB = d\cos\omega$, $CB = d\sin\omega$. Si maintenant, du point C comme centre, avec R pour rayon, nous décrivons un arc de cercle coupant la droite en M et en M', nous aurons

$$MB = M'B = \sqrt{R^2 - d^2\sin^2\omega},$$

d'où

$$OM = d\cos\omega + \sqrt{R^2 - d^2\sin^2\omega} = u, \text{ etc.};$$

donc le lieu de l'équation (2) est la circonférence CMM'.

349. La discussion complète de cette équation, qui ne présente aucune difficulté, comprend trois cas principaux : $d > R$, $d = R$, $d < R$.

1°. Dans le premier cas, le maximum des valeurs de ω est déterminé par $\sin\omega = \frac{R}{d}$: en faisant varier l'amplitude entre zéro et ce maximum, on obtient, à chaque fois, deux valeurs positives de u. Il suffit donc, pour avoir toute la partie de la courbe située au-dessus de l'axe polaire, de faire varier ω entre ces deux

limites. D'ailleurs, comme l'équation (2) ne change pas quand on remplace ω par $-\omega$, OC est un axe de symétrie.

2°. Si $d = R$, l'équation (2) donne $u = 0$ et $u = 2d\cos\omega$. La première formule représente le pôle; mais comme on obtiendra ce point en faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$ dans la seconde formule, on peut faire abstraction de la première et prendre seulement $u = 2d\cdot\cos\omega$, en faisant varier ω entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Si l'on donnait à ω des valeurs supérieures à cette dernière limite, le rayon vecteur deviendrait négatif; et, en le portant sur le prolongement de la direction déterminée par ω, on obtiendrait des points situés au-dessous de l'axe polaire. Or, ces points sont symétriques de ceux qui répondent aux premières valeurs de l'amplitude.

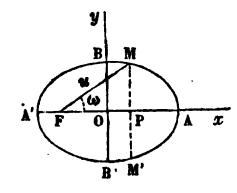
3°. Enfin, si l'on a $d < R$, l'équation (2) a constamment une racine *positive* et une racine *négative*. Alors, pour obtenir toute la circonférence, on peut se contenter de prendre la formule

$$u = d\cos\omega + \sqrt{R^2 - d^2\sin^2\omega},$$

attendu que si l'on fait varier ω entre zéro et 2π, le second membre reste constamment positif. On peut même, comme dans les deux autres cas, se contenter de faire croître ω depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \pi$.

Ellipse.

350. Prenons pour pôle le foyer de gauche et pour axe polaire le grand axe de la courbe. Nous aurons (225)



$$FM = u = a + \frac{c}{a}x.$$

Or, dans le triangle FMP, $u\cos\omega = c + x$; donc, en éliminant x,

$$u = a + \frac{c}{a}(u\cos\omega - c),$$

d'où

$$u = \frac{a - \frac{c^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\omega} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\omega}.$$

Mais $\frac{b^2}{a}$ est le demi-paramètre p, et $\frac{c}{a} = e$. L'équation cherchée est donc

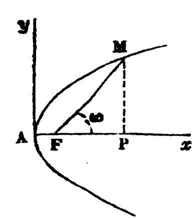
$$u = \frac{p}{1 - e\cos\omega}.$$

Parabole.

351. A cause de

$$\text{FM} = u = x + \frac{1}{2}p \quad \text{et de} \quad x = \frac{1}{2}p + u\cos\omega,$$

$$u = \frac{p}{1 - \cos\omega}.$$



Cette équation a la même forme que celle de l'ellipse : seulement $e = 1$.

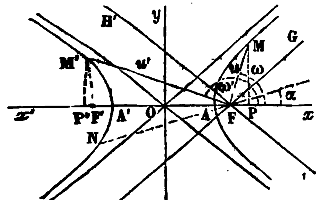
Si $\omega = 0$, $u = \infty$; ainsi la courbe a une branche infinie parallèle à l'axe. Mais elle n'a pas d'asymptote ; car

$$u\sin\omega = \frac{p\sin\omega}{1 - \cos\omega} = \frac{p\cos\frac{1}{2}\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega},$$

et cette dernière quantité est infinie pour $\omega = 0$.

Hyperbole.

352. Prenons pour pôle le foyer de droite. La formule qui donne la distance d'un point M de la branche de droite à ce foyer est (282)



$$u = \frac{c}{a}x - a.$$

Pour le point M' de la branche de gauche, on a

$$u' = a - \frac{c}{a}x'.$$

De plus, les deux triangles rectangles FMP, FM'P' donnent

$$x = c + u\cos\omega, \quad u'\cos\omega' = c - x'.$$

La substitution des valeurs de x et de x' donne ensuite

$$u = \frac{c}{a}(c + u\cos\omega') + a,$$

$$u' = -\frac{c}{a}(c + u'\cos\omega') + a;$$

d'où, en posant $\frac{b^2}{a} = p$, $\frac{c}{a} = e$,

$$u = \frac{p}{1 - e\cos\omega}, \quad (1)$$

$$u' = \frac{-p}{1 + e\cos\omega'}. \quad (2)$$

La première équation représente la branche de droite, l'autre la branche de gauche. Voyons entre quelles limites on doit faire varier ω et ω'.

Menons, par le foyer F, les parallèles FG, FH aux asymptotes. Soit θ l'angle aigu formé par FG avec Fx, ou la moitié de l'angle des asymptotes. Alors, pour obtenir des points situés sur la première branche, nous devrons, dans la formule (1), faire varier ω entre θ et $2\pi - \theta$; et, pour avoir la seconde branche, nous devrons, dans la formule (2), donner à ω' des valeurs comprises entre $\pi - \theta$ et $\pi + \theta$. Cette conclusion résulte de ce que le rayon vecteur FM, mené à un point de la branche de droite, tombe soit dans l'angle GFx, soit dans l'angle HFx; tandis que le rayon vecteur FM', mené à un point de la branche de gauche, se trouve compris dans l'angle G'FH'.

Elle résulte aussi de l'inspection même des formules (1) et (2). En effet, à cause de $c > a$, l'excentricité e est plus grande que l'unité, donc l'équation (1) donnera pour u des valeurs positives, seulement quand on supposera $\cos\omega < \frac{1}{e}$ et > -1, c'est-à-dire quand l'amplitude ω sera comprise entre θ et $2\pi - \theta$, etc.

353. Nous voyons que chacune des équations (1) et (2), si l'on rejette les valeurs négatives du rayon vecteur, représente une seule branche de l'hyperbole. Mais rien n'empêche d'admettre les rayons vecteurs négatifs, pourvu que l'on convienne, comme nous l'avons déjà dit, *de porter la valeur négative trouvée*

pour un rayon vecteur, sur le prolongement de la direction déterminée par l'amplitude correspondante. Au moyen de cette convention, l'hyperbole tout entière pourra être représentée par l'une ou par l'autre des formules ci-dessus, par la première par exemple.

En effet, supposons que dans cette formule (1) nous donnions à ω une valeur α moindre que θ, nous obtiendrons $u = \frac{p}{1 - e\cos\alpha}$, valeur négative.

Mais si nous prenons, dans la formule (2), $\omega' = \pi + \alpha$, il nous viendra

$$u' = \frac{-p}{1 + e\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-p}{1 - e\cos\alpha} = -u.$$

Le point N, déterminé par cette valeur positive de u, aurait donc pu être obtenu par l'application de la formule (1).

En résumé, l'équation de l'hyperbole rapportée à l'axe transverse et au foyer de droite, est

$$u = \frac{p}{1 - e\cos\omega}.$$

354. Si on applique à cette équation la règle relative aux asymptotes, on trouve d'abord, en posant $u = \infty$,

$$\cos\alpha = \frac{1}{e} = \frac{a}{c}.$$

En second lieu, la distance du pôle à l'asymptote est donnée par la formule $d = \frac{1}{\varphi'(\alpha)}$ (173); donc

$$d = \frac{p}{e\sin\alpha}.$$

Or $p = \frac{b^2}{a}$, $e = \frac{c}{a}$, $\sin\alpha = \frac{b}{c}$; donc enfin $d = b$; ce qui est exact.

EXERCICES.

I. *Théorème.* — Dans l'ellipse ou dans l'hyperbole, la somme des cordes menées par un foyer, parallèlement à deux diamètres conjugués, est constante.

II. *Théorème.* — Si, par un foyer, on mène n droites, parta-

geant tout le plan en n angles égaux entre eux, la somme des inverses des rayons vecteurs déterminés par ces droites est une constante.

III. Déterminer une courbe du second ordre, connaissant un foyer et trois points. (*Problème de Halley.*)

IV. Démontrer la solution suivante du problème de Halley, solution due à *Nicollic:*

Du foyer donné F, comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence qui coupe en a, a', a'' les rayons vecteurs donnés FA, FA', FA''. Sur les cordes aa', $a'a''$, $a''a$, on prend trois points B'', B, B', tels que l'on ait

$$\frac{aB''}{a'B''} = \frac{FA'}{FA}, \quad \frac{a'B}{a''B} = \frac{FA''}{FA'}, \quad \frac{a''B'}{aB'} = \frac{FA}{FA''}.$$

Des points B'', B, B' on abaisse des perpendiculaires respectivement sur AA', A'A'', A''A : 1° ces droites se coupent en un même point P; 2° FP est la direction de l'axe focal; 3° $\frac{FP}{aF} = e$; 4° α étant le point où aF rencontre, une seconde fois, la circonférence, et F' étant le second foyer, on a

$$\frac{aP}{\alpha P} = \frac{AF'}{AF}.$$

CHAPITRE XXIII.

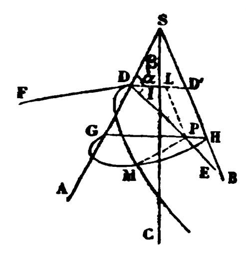
SECTIONS CONIQUES ET CYLINDRIQUES.

Section plane d'un cône de révolution.

355. Menons, par l'axe SC du cône, un plan perpendiculaire au plan sécant. Soient SA, SB les deux génératrices contenues dans ce plan *méridien*, DE la trace du plan sécant, DM la courbe d'intersection. Le plan ASB est évidemment un plan de symétrie; donc DE sera un *axe* de la courbe DM, et le point D, situé sur la génératrice SA, en sera un *sommet*.

Par un point quelconque M de cette courbe, abaissons MP per-

pendiculaire sur DE, et soient $MP = y$, $DP = x$. De plus, représentons par β l'angle de la génératrice avec l'axe, par d la distance SD, enfin par α l'angle SDE que fait le plan sécant avec la génératrice SD.



Si, par l'ordonnée MP, évidemment perpendiculaire au plan ASB, nous menons un plan perpendiculaire à SC, ce plan coupera le cône suivant une circonférence GMH, dans laquelle GH sera un diamètre. Conséquemment,

$$\overline{MP}^2 = y^2 = GP.PH.$$

En premier lieu,

$$\frac{GP}{DP} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta},$$

ou

$$GP = x\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Pour évaluer PH, menons DD' parallèle à GH et PL parallèle à SB; nous aurons $PH = LD' = DD' - DL$. D'ailleurs,

$$DD' = 2\,DI = 2d\sin\beta;$$

et, dans le triangle DLP,

$$\frac{DL}{DP} = \frac{\sin DPL}{\sin DLP} = \frac{\sin LPE}{\sin D'} = \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos\beta};$$

d'où

$$DL = x\frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos\beta}.$$

Par suite,

$$PH = 2d\sin\beta - x\frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos\beta}.$$

La substitution de ces valeurs donne, pour l'équation de la *section conique*,

$$y^2 = 2d\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta}x^2, \quad (1)$$

Cette section est donc *une ligne du second ordre.*

356. L'équation (1) est celle d'une courbe rapportée à un axe et à la tangente au sommet; elle représente une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que le coefficient de x^2 est négatif, nul ou

positif. Or, les facteurs $\sin\alpha$ et $\cos^2\beta$ sont essentiellement positifs, et $\alpha + 2\beta$ est inférieur à 360°. Conséquemment, la section conique sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que la somme des angles ASB, SDE sera *inférieure, égale* ou *supérieure à deux droits*. En d'autres termes :

1°. Si la trace DE coupe les deux génératrices SA, SB; c'est-à-dire *si le plan sécant rencontre, d'un même côté du sommet, toutes les génératrices, la section est une ellipse;*

2°. *Si le plan sécant est parallèle à une génératrice, la section est une parabole;*

2°. *Enfin si le plan sécant rencontre les deux nappes du cône, la section est une hyperbole.*

357. Nous avons supposé la distance d différente de zéro. Si cette distance était nulle, c'est-à-dire si le plan sécant passait par le sommet du cône, la section se réduirait, en vertu de l'équation (1), *à un point, à une droite ou à deux droites concourantes.*

358. En laissant de côté le cas de $d = 0$, nous venons de reconnaître que *toute section conique est une courbe du second ordre.* Examinons maintenant si toute courbe du second ordre est une section conique, ou, plus généralement, *si une courbe quelconque du second ordre peut être placée sur un cône donné.*

Pour cela, rappelons-nous que toutes les courbes du second ordre, rapportées à l'axe focal et à la tangente au sommet, sont données par l'équation

$$y^2 = 2px - qx^2, \quad (2)$$

dans laquelle $2p$ et q représentent le paramètre et le carré du rapport du second axe au premier. Il s'agit donc uniquement de savoir si, en identifiant les équations (1) et (2), on obtiendra des valeurs réelles pour d et α. Cette identification donne

$$d\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} = p, \quad (3) \qquad \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta} = q. \quad (4)$$

Si l'angle α est réel, l'équation (3) donnera pour d une valeur réelle. Prenons donc l'équation (4), qui renferme seulement l'inconnue α.

Cette équation peut être écrite ainsi :

$$\cos 2\beta - \cos(2\alpha + 2\beta) = 2q\cos^2\beta;$$

d'où $$\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2\beta - 2q\cos^2\beta.$$

Le second membre égale

$$2\cos^2\beta - 1 - 2q\cos^2\beta = 2(1-q)\cos^2\beta - 1.$$

L'équation (4) devient donc

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = 2(1-q)\cos^2\beta - 1. \quad (5)$$

1°. Dans le cas où la courbe donnée est une ellipse, le rapport q, égal à $\frac{b^2}{a^2}$, est moindre que l'unité; donc le produit $2(1-q)\cos^2\beta$ est compris entre $+2$ et 0, et le second membre de l'équation (5) est compris entre $+1$ et -1. Cette équation donnera donc une valeur réelle pour l'angle α. Conséquemment, *une ellipse donnée peut toujours être appliquée sur un cône de révolution donné.*

2°. Si la courbe donnée est une parabole, $q = 0$, et l'équation (5) se réduit à $\cos(2\alpha + 2\beta) = 2\cos^2\beta - 1 = \cos 2\beta$; celle-ci donne $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi - 2\beta$. La première valeur est inadmissible; l'autre indique, comme on devait s'y attendre, que le plan sécant est parallèle à une génératrice : *une parabole donnée peut toujours être appliquée sur un cône de révolution donné.*

3°. Enfin, si la courbe donnée est une hyperbole, on devra avoir, en changeant q en $-q'$,

$$2(1+q')\cos^2\beta - 1 > -1, \quad \text{et} \quad 2(1+q')\cos^2\beta - 1 < 1.$$

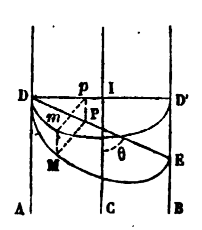
La première condition est toujours vérifiée; l'autre se réduit d'abord à $(1+q')\cos^2\beta < 1$; puis, si l'on remplace q' par $\frac{b^2}{a^2}$, et $1+q'$ par $\frac{c^2}{a^2}$, elle devient $\cos^2\beta < \frac{a^2}{c^2}$. Or, $\frac{a}{c}$ est le cosinus de l'angle θ que font les asymptotes avec l'axe transverse; donc, β et θ étant aigus, l'inégalité précédente se réduit à $\beta > \theta$. Conséquemment, *pour qu'une hyperbole donnée puisse être appliquée sur un cône de révolution donné, il faut que l'angle des deux asymptotes soit moindre que l'angle au sommet du cône.*

359. Les courbes du second ordre étant identiques avec les sections planes d'un cône de révolution, on les désigne ordinairement sous le nom de *sections coniques,* ou, plus simplement encore, sous celui de *coniques.*

Section d'un cylindre de révolution.

360. Dans l'équation (1), supposons $d \sin\beta = R$ et $\alpha = \theta - \beta$: R représentera le rayon du *parallèle* passant par le sommet D de la section conique, et θ l'inclinaison du plan sécant sur l'axe du cône. Nous obtiendrons ainsi

$$y^2 = 2R\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos\beta}x - \frac{\sin(\theta-\beta)\sin(\theta+\beta)}{\cos^2\beta}x^2.$$



Actuellement, supposons que l'angle β diminue jusqu'à zéro : à la limite, le cône se sera transformé en un cylindre de révolution autour de l'axe CI, et la section conique sera devenue la *section cylindrique* DME, ayant pour équation

$$y^2 = 2Rx\sin\theta - x^2\sin^2\theta.$$

Cette section est donc une ellipse.

361. Pour arriver directement à ce résultat, il suffirait d'observer que, M et m étant deux points *correspondants* de la section *oblique* DME et de la section *droite* DmD', c'est-à-dire deux points dont les ordonnées MP, mp sont égales, on a, entre leurs abscisses DP, Dp, la relation

$$\frac{DP}{Dp} = \frac{1}{\sin\theta} = \text{const.}$$

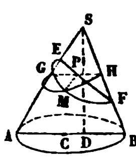
En même temps, les deux axes de l'ellipse DME auront pour valeur $2R$ et $\dfrac{2R}{\sin\theta}$.

Section anti-parallèle.

362. Les sections faites dans un cône oblique, à base circulaire, par des plans parallèles à cette base, sont évidemment des cercles. Mais, indépendamment de cette direction du plan sécant, il en existe une autre qui donne pareillement des sections circulaires. Proposons-nous de la déterminer.

Du sommet S du cône, abaissons SD perpendiculaire au plan de la base; puis, par SD et par le centre C de la base, faisons passer un plan ASB : ce plan sera un plan de symétrie ou

un *plan principal*. Si donc nous coupons le cône par un plan quelconque EMF, perpendiculaire à ASB, la section aura pour *axe* la trace EF du plan sécant sur ce plan principal. Menons l'ordonnée MP, perpendiculaire à EF. Alors, si EMF est une circonférence, l'ordonnée MP devra être moyenne proportionnelle entre les deux segments EP, PF du diamètre; c'est-à-dire que nous devrons avoir $\overline{MP}^2 = EP.PF$.



D'un autre côté, si nous faisons passer, suivant MP, le plan GMH parallèle à la base du cône, nous aurons $\overline{MP}^2 = FP.PH$. La comparaison de ces deux valeurs donne

$$EP.PF = GP.PH, \quad \text{ou} \quad \frac{EP}{PH} = \frac{GP}{PF}.$$

Cette proportion indique évidemment que les deux triangles EGP, HPF sont semblables; donc les angles G, F sont égaux; ou, ce qui est équivalent, *la section* EMF *sera un cercle, si le plan de cette section et le plan de la base du cône font, avec les génératrices* AS, BS *situées dans le plan principal, des angles respectivement égaux.*

Si l'angle F, égal à l'angle A, avait son sommet sur SA, la section EMF serait parallèle à la base : c'est pour cette raison qu'on lui a donné le nom de *section anti-parallèle*..

CHAPITRE XXIV.

DU NOMBRE DE CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR DÉTERMINER UNE CONIQUE.

363. L'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad (1)$$

renferme *six* coefficients; mais, comme on peut diviser tous les termes par le coefficient d'un quelconque d'entre eux (pourvu que ce coefficient ne soit pas nul), il reste seulement *cinq coefficients*

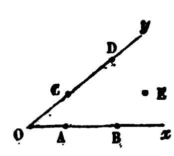
arbitraires. Par exemple, toutes les lignes du second ordre qui ne passent pas par l'origine peuvent être représentées par l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = 0. \quad (2)$$

Pour déterminer complétement une conique, on devra évidemment se donner, entre les cinq coefficients arbitraires de son équation, cinq équations distinctes; autrement dit, *une conique est généralement déterminée par cinq conditions.*

364. *Remarque.* — Dans le cas de la parabole, les coefficients A, B, C satisfont à la relation $B^2 - 4AC = 0$; donc *quatre* coefficients seulement sont arbitraires, c'est-à-dire qu'*une parabole est généralement déterminée par quatre conditions.*

365. Comme application de ce qui précède, cherchons l'équation de *la courbe du second ordre passant par cinq points donnés* A, B, C, D, E. Afin de simplifier les calculs, prenons pour axes les côtés opposés du quadrilatère formé par quatre de ces points. En même temps, représentons par a, b, c, d les distances OA, OB, OC, OD.



La courbe cherchée ne passe évidemment pas par l'origine; donc son équation aura la forme (2).

Si l'on fait $y = 0$, on obtient l'équation

$$Cx^2 + Ex + 1 = 0,$$

dont les racines doivent être a et b. On a donc, *identiquement*,

$$Cx^2 + Ex + 1 = C(x-a)(x-b),$$

d'où

$$C = \frac{1}{ab}.$$

De même, $$Ay^2 + Dy + 1 = A(y-b)(y-d),$$

et

$$A = \frac{1}{cd}.$$

Au moyen de ces relations, l'équation (2) devient

$$\frac{1}{cd}(y-c)(y-d) + \frac{1}{ab}(x-a)(x-b) - 1 + Bxy = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs et en représentant par λ le

produit B$abcd$,

$$ab(y-c)(y-d)+cd(x-a)(x-b)+\lambda xy-abcd=0. \quad (3)$$

Telle est la forme simple sous laquelle on peut mettre *l'équation des lignes du second ordre qui passent par quatre points donnés.*

366. Si la courbe doit passer par un cinquième point E, dont les coordonnées soient α, β, on aura, pour déterminer le *paramètre* λ, l'équation

$$ab(\beta-c)(\beta-d)+cd(\alpha-a)(\alpha-b)+\lambda\alpha\beta-abcd=0. \quad (4)$$

Tant que α et β seront différents de zéro, c'est-à-dire quand le point E ne sera situé ni sur AB ni sur CD, cette dernière équation donnera pour λ un valeur finie et déterminée; en la substituant dans la relation (3), on aura l'équation de la courbe cherchée.

367. Au lieu de déterminer cette courbe par la connaissance de cinq de ses points, on peut se donner des points ou des droites remarquables situés dans son plan, tels qu'un centre, un sommet, un foyer, une tangente, un axe, une directrice, etc. Il faudra, bien entendu, que ces points ou ces droites donnent lieu à *cinq équations de condition,* sans quoi la courbe ne serait pas déterminée. A ce sujet, nous ferons les remarques suivantes :

1°. Un point, *non situé sur la courbe,* est déterminé par ses deux coordonnées; par conséquent, *la connaissance d'un point remarquable équivaut à deux conditions.*

2° Si une droite, donnée par son équation, doit être tangente à la courbe cherchée, on élimine l'une des coordonnées x, y, entre les équations de ces lignes, et l'on exprime que l'équation résultante a ses deux racines égales. Par suite, *la connaissance d'une tangente équivaut à une condition.*

3°. On voit, avec la même facilité, que *la connaissance d'un axe, ou d'une directrice, ou d'une asymptote, équivaut à deux conditions.*

368. Dans chaque cas particulier, on pourra mettre l'équation de la courbe sous une forme propre à mettre en évidence la droite ou le point remarquable donné. Si, par exemple, α, β sont les coordonnées rectangulaires d'un *foyer* ou d'un *centre* connu, on représentera la courbe par l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(my+nx+p)^2$$

dans le premier cas, et par

$$A(y-\beta)^2+B(y-\beta)(x-\alpha)+C(x-\alpha)^2=1$$

dans le second. De même, si $y=ax+b$ est l'équation d'une *tangente* donnée, on pourra prendre, pour équation de la courbe,

$$(Ay+Bx+C)^2+(y-ax-b)(y-px-q)=0 \ (*);$$

A, B, C, p, q étant des coefficients inconnus, dont un seul est arbitraire. Il est évident, en effet, que ces deux équations donnent *un seul* système de valeurs de x et de y; donc la droite est tangente à la courbe.

Enfin, si $y=cx+d$ représente une *asymptote* donnée, l'équation de la courbe pourra être mise sous la forme

$$(y-cx-d)^2+(Ax+B)(y-cx-d)+C=0,$$

A, B, C étant trois coefficients inconnus.

En effet, la combinaison de cette équation avec

$$y=(c+\gamma)x+d+\delta$$

conduit à

$$(\gamma x+\delta)^2+(Ax+B)(\gamma x+\delta)+C=0,$$

équation dont les deux racines croissent au delà de toute limite quand les variables γ et δ tendent vers zéro.

Lieux géométriques.

369. Quand, au lieu de *cinq* conditions, on en donnera seulement *quatre*, il y aura une infinité de courbes satisfaisant à la question. Si l'on suppose qu'elles se succèdent d'une manière continue, chacun de leurs points remarquables (centre, foyer, sommet, etc.) décrira un certain lieu géométrique dont on pourra chercher l'équation.

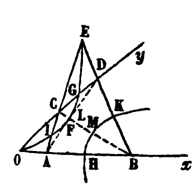
370. Premier exemple. — *Trouver le lieu des centres de toutes les coniques passant par quatre points donnés.* Si nous appliquons à l'équation (2), qui les représente toutes, la règle ordinaire, nous aurons, pour les *équations du centre*,

$$cd(2x-a-b)+\lambda y=0, \quad (5)$$
$$ab(2y-c-d)+\lambda x=0. \quad (6)$$

(*) $y=px+q$ représente une seconde tangente quelconque; et $Ay+Bx+C=0$ est l'équation de la *corde de contact*.

Quand on aura donné une valeur arbitraire au paramètre λ, les équations (5) et (6) détermineront les coordonnées du centre de la courbe correspondante. Par conséquent, pour trouver l'équation du lieu cherché, il suffit d'éliminer λ entre ces deux équations. On obtient ainsi

$$ab(2y - c - d)y - cd(2x - a - b)x = 0. \quad (7)$$



Le lieu est donc une conique. On reconnaît aisément, en discutant l'équation (7), que cette courbe passe : 1° *par les points de concours* O, E, F *des droites qui joignent deux à deux les quatre points donnés;* 2° *par les milieux* G, H, I, K, L, M *de ces dernières droites*. En outre, le centre a pour coordonnées

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{c+d}{2};$$

et, par conséquent, *le centre est situé au milieu commun des droites* GH, IK, LM *qui joignent les milieux des côtés opposés ou les milieux des diagonales du quadrilatère* ABCD *formé par les quatre points donnés, etc.*

371. Second exemple. — *Lieu des foyers des ellipses tangentes à deux droites rectangulaires données, et dont le centre est un point donné.*

En prenant pour axes les deux tangentes données, on pourra représenter toutes ces courbes par

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (my + nx + p)^2. \quad (1)$$

Les équations du centre sont

$$x - \alpha = n(my + nx + p),$$
$$y - \beta = m(my + nx + p).$$

Si donc a, b sont les coordonnées de ce point, on aura

$$a - \alpha = n(mb + na + p), \quad (2)$$
$$b - \beta = m(mb + na + p). \quad (3)$$

L'axe des abscisses étant une tangente, il faut que l'équation obtenue en faisant $y = 0$ dans la relation (1) ait ses racines

égales. Cette condition est exprimée par

$$(np+\alpha)^2=(n^2-1)(p^2-\alpha^2-\beta^2). \quad (4)$$

De même, l'axe des ordonnées étant une tangente, on a

$$(mp+\beta)^2=(m^2-1)(p^2-\alpha^2-\beta^2). \quad (5)$$

Si, entre les équations (2), (3), (4), (5), on élimine les paramètres m, n, p, on trouvera une équation entre α et β, qui représentera le lieu des foyers.

Cette élimination peut être faite comme il suit :

Les équations (4) et (5), développées, deviennent

$$(\alpha^2+\beta^2)\,n^2+2\alpha pn+p^2-\beta^2=0, \quad (4')$$

$$(\alpha^2+\beta^2)\,m^2+2\beta pm+p^2-\alpha^2=0. \quad (5')$$

Mais, si l'on représente par λ la quantité $mb+na+p$, on a, par les équations (2) et (3),

$$\frac{n}{a-\alpha}=\frac{m}{b-\beta}=\frac{1}{\lambda}.$$

Cette proportion donne d'abord

$$mb+na+p=\lambda=\frac{b(b-\beta)+a(a-\alpha)}{\lambda}+p,$$

ou $$\lambda^2-p\lambda-[b(b-\beta)+a(a-\alpha)]=0;$$

et ensuite, au lieu des équations (4′) et (5′),

$$(p^2-\beta^2)\lambda^2+2\alpha p(a-\alpha)\lambda+(\alpha^2+\beta^2)(a-\alpha)^2=0,$$

$$(p^2-\alpha^2)\lambda^2+2\beta p(b-\beta)\lambda+(\alpha^2+\beta^2)(b-\beta)^2=0.$$

D'ailleurs, les trois dernières équations, dans lesquelles λ est l'inconnue, doivent être identiques; donc

$$2\,\frac{\alpha p(a-\alpha)}{p^2-\beta^2}=2\,\frac{\beta p(b-\beta)}{p^2-\alpha^2}=-p,$$

ou $$2\alpha(a-\alpha)+p^2-\beta^2=0,$$

et $$2\beta(b-\beta)+p^2-\alpha^2=0.$$

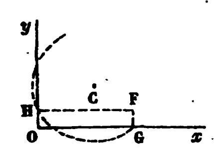
L'élimination de p^2 entre ces deux dernières équations donne enfin

$$\beta^2-\alpha^2-2b\beta+2a\alpha=0.$$

Le lieu demandé est donc une hyperbole équilatère qui passe par l'origine, et dont les axes sont parallèles aux tangentes données. Cette hyperbole a pour centre le centre donné, etc.

372. La méthode précédente est générale, mais elle conduit ordinairement à des calculs compliqués. Dans la plupart des cas, on lui substitue avec avantage un autre mode de solution, que l'on peut formuler ainsi : *Aux quatre éléments donnés, ajoutez-en un cinquième, propre à déterminer commodément le point remarquable dont on demande le lieu, et faites ensuite varier ce cinquième élément.*

373. Pour éclaircir cet énoncé, reprenons la question précédente. Soient Ox, Oy les deux tangentes et C le centre commun à toutes les ellipses. Si nous nous rappelons que *le lieu des projections du foyer sur les tangentes à une ellipse, est la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre,* nous conclurons que, pour obtenir le foyer F d'une quelconque des courbes satisfaisant aux quatre conditions données, il suffit de décrire, du point C comme centre, une circonférence rencontrant Ox en G, Oy en H, et d'achever le rectangle OGHF. Le rayon λ de cette circonférence est le cinquième élément variable.



Il est actuellement bien facile de former l'équation du lieu des points F donnés par la construction précédente. En effet, la circonférence HG est représentée par

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2.$$

Par suite, les coordonnées du point F vérifient les deux équations

$$(x-a)^2+b^2=\lambda^2, \quad (y-b)^2+a^2=\lambda^2.$$

Égalant ces deux valeurs de λ^2, on a donc, pour l'équation du lieu,

$$y^2-x^2-2by+2ax=0.$$

EXERCICES.

I. Lieu des seconds foyers des ellipses qui ont un premier foyer donné, et qui passent par deux points donnés. (Une hyperbole ayant pour foyer les deux points donnés.)

II. Lieu des foyers des paraboles qui ont même directrice et un point commun. (Une circonférence passant par le point donné.)

III. Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites données. (La circonférence circonscrite au triangle formé par les trois tangentes.)

IV. Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par trois points donnés. (*Le cercle des neuf points.*)

V. Une infinité d'hyperboles ont un sommet réel donné et un sommet imaginaire donné. Trouver : 1° le lieu des centres ; 2° le lieu des seconds sommets réels ; 3° le lieu des seconds sommets imaginaires ; 4° le lieu des foyers de toutes ces courbes.

VI. Lieu des sommets des hyperboles qui ont même asymptote et même foyer. $\left(u = \text{tang}\,\frac{1}{2}\,\omega.\right)$

VII. Lieu des foyers des ellipses qui ont même centre, un point commun, et dans lesquelles le grand axe a une longueur donnée. (Une ellipse qui a pour foyer le point donné.)

VIII. Lieu du foyer de l'hyperbole représentée par $xy = by + bx$, et dont le sommet décrit la parabole qui a pour équation $x^2 = by$.

CHAPITRE XXV.

INTERSECTION DE DEUX CONIQUES.

374. Les points communs à deux courbes du second ordre représentées par

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \quad (A)$$
$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0, \quad (B)$$

ont évidemment pour coordonnées les solutions *réelles* de ces deux équations. Pour trouver ces solutions, on peut éliminer une des inconnues, y par exemple ; calculer, exactement ou par approximation, les racines de l'équation *finale* en x ; et substituer, dans l'équation résultant de l'élimination de y^2 entre les proposées, les valeurs ainsi obtenues.

375. *Remarque.* — Comme l'équation finale est du quatrième

degré, dans le cas le plus général, *deux coniques ne peuvent se couper en plus de quatre points.* Ce résultat s'accorde avec les théorèmes exposés dans le chapitre précédent; car si les coniques avaient cinq points communs, elles coïncideraient (363).

376. *Application.* — Soient les deux équations

$$2y^2 + 3xy + x^2 - y + 4x - 9 = 0, \quad (1)$$
$$y^2 + xy - x^2 + 2y + 10x - 13 = 0. \quad (2)$$

L'élimination de y^2 conduit à

$$y = -\frac{3x^2 - 16x + 17}{x - 5}. \quad (3)$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (2), donne

$$(3x^2 - 16x + 17)^2 - (x+2)(x-5)(3x^2 - 16x + 17)$$
$$- (x-5)^2(x^2 - 10x + 13) = 0;$$

ou, en développant et réduisant,

$$5x^4 - 51x^3 + 185x^2 - 273x + 134 = 0.$$

On tire, de cette équation,

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = \frac{18 \pm \sqrt{-11}}{5};$$

d'où $$y = 1, \quad y = -1, \quad y = \frac{-14 \pm 2\sqrt{-11}}{5}.$$

Par conséquent, les coniques données se coupent seulement en deux points.

377. Au lieu d'appliquer la méthode précédente, on peut se proposer de *trouver les équations des cordes communes aux courbes données.*

Pour résoudre cette question, remarquons d'abord que si l'on ajoute membre à membre les équations proposées, après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur arbitraire λ, on obtient une équation de la forme

$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0, \quad (C)$$

qui représente *toutes les coniques passant par les points communs aux deux coniques données.*

En effet, toutes les solutions communes aux équations (A) et

(B) vérifient l'équation (C); et, de plus, on peut déterminer λ de manière que la conique (C) passe par un point pris arbitrairement dans son plan.

378. Cela posé, si nous voulons que cette conique auxiliaire (C) se réduise au système de deux droites, nous devrons (**121**) prendre pour λ une racine réelle de l'équation

$$(B'^2 - 4A'C')F' + A'E'^2 + C'D'^2 + B'D'E' = 0. \quad (D)\ (*)$$

Cette équation étant du troisième degré, a au moins une racine réelle; donc la transformation proposée est toujours possible (**).

379. *Remarques.* — I. Le terme indépendant de λ a pour valeur

$$(B^2 - 4AC)F + AE^2 + CD^2 - BDE = m.$$

Si $m = 0$, l'une des racines de l'équation (D) est zéro, et la conique (C) se réduit à (A). Ce résultat pouvait être prévu; car la condition $m = 0$ exprime que l'équation (A) représente deux droites ou un point.

II. Semblablement, si le coefficient de λ^3 est nul, l'équation (D) a une racine infinie; et la conique (C) devient la seconde des deux courbes données.

III. Quand les coniques (A) et (B) se coupent en quatre points, l'équation (D) a ses trois racines réelles. En effet, les côtés et les

---

(*) Quand on voudra faire une application, on devra se rappeler que

$$A' = A + \lambda a, \quad B' = B + \lambda b, \ldots, \quad F' = F + \lambda f.$$

(**) Cependant, si une valeur réelle de λ rend négative la quantité $B'^2 - 4A'C'$, l'équation (C), au lieu de représenter deux droites, représentera un point. Par exemple, l'équation

$$(2y + x + 1)^2 + (y - 3x - 1)^2 = 0,$$

qui représente un point, pouvant être obtenue en ajoutant membre à membre les deux équations

$$4y^2 - xy + 9x^2 + y + 4x + 1 = 0,$$
$$y^2 - xy + x^2 + y + 4x + 1 = 0,$$

si l'on applique à ces deux-ci la méthode précédente, on trouvera, comme racine de l'équation (D), $\lambda = 1$, valeur au moyen de laquelle on retombera sur l'équation proposée.

diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points, forment *trois couples de cordes communes* aux deux coniques.

IV. La réciproque de cette dernière proposition peut être fausse.

380. Quand l'équation (C) représente deux droites, on peut (124) la mettre sous la forme

$$(2A'y + B'x + D')^2(B'^2 - 4A'C')$$
$$- [x(B'^2 - 4A'C') + B'D' - 2A'E']^2 = 0.$$

Par suite, les deux droites sont représentées par la double équation du premier degré

$$\left.\begin{array}{l} \pm(2A'y + B'x + D')\sqrt{B'^2 - 4A'C'} \\ = x(B'^2 - 4A'C') + B'D' - 2A'E'. \end{array}\right\} \text{(E)}$$

Il ne restera donc plus, pour déterminer les points communs aux deux coniques données, qu'à résoudre les équations (A), (E), ou les équations (B), (E).

Applications.

381. I. Soient, comme ci-dessus,

$$2y^2 + 3xy + x^2 - y + 4x - 9 = 0,$$
$$y^2 + xy - x^2 + 2y + 10x - 13 = 0.$$

L'équation (D) est

$$-[(3+\lambda)^2 - 4(2+\lambda)(1-\lambda)](9 + 13\lambda) + (2+\lambda)(4+10\lambda)^2$$
$$+ (1-\lambda)(-1+2\lambda)^2 - (3+\lambda)(-1+2\lambda)(4+10\lambda) = 0,$$

ou

$$11\lambda^3 + 55\lambda^2 + 78\lambda + 36 = 0.$$

La méthode des racines commensurables donne $\lambda = -3$. Par conséquent l'équation (E) devient

$$\pm(2y+7) = 4x - 13;$$

d'où

$$y = -2x + 3, \quad y = 2x - 10.$$

Ces deux valeurs, substituées dans l'une des équations proposées, conduisent à

$$x = 1, \qquad x = 2, \qquad x = \frac{18 \pm \sqrt{-11}}{5},$$

$$y = 1; \qquad y = -1; \qquad y = \frac{-14 \pm 2\sqrt{-11}}{5}.$$

II. Comme second exemple, prenons

$$y^2 + 2xy - 2x = 0,$$
$$2xy + 4x^2 + 2y - 3 = 0.$$

L'équation (D) devient

$$-[(1+\lambda)^2 - 4\lambda]\,3\lambda + 1 + 4\lambda^3 + 2\lambda(1+\lambda) = 0,$$

ou $$\lambda^3 + 8\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Cette équation a une seule racine réelle, comprise entre $-8{,}14$ et $-8{,}15$; en sorte que les deux courbes données ont, au plus, deux points communs. Pour les déterminer *approximativement*, il resterait à calculer, approximativement aussi, les coefficients de l'équation (E), etc.

382. Ces deux applications montrent suffisamment combien la seconde méthode est peu satisfaisante. Si l'on applique la première au second exemple, on obtient

$$x = -\frac{y^2}{2(y-1)};$$

puis $$3y^3 - 7y^2 + 8y - 3 = 0;$$

et enfin $$y = 0{,}62571, \quad x = 0{,}523008.$$

EXERCICES (*).

I. $$y^2 + x^2 - 2x = 0, \quad 2xy - 1 = 0.$$

Résultat :

$x = 1{,}967\,160,$	$x = 0{,}557\,424,$
$y = 0{,}254\,173.$	$y = 0{,}869\,791.$

II. $$4y^2 - 4xy + 9 = 0, \quad 8xy - 42y + 9 = 0.$$

Résultat :

$$x = +\infty, \quad x = -\infty, \quad x = 5, \quad x = \frac{15}{4},$$
$$y = 0; \quad y = 0; \quad y = \frac{9}{2}; \quad y = \frac{3}{4}.$$

III. $$x^2 = y, \quad y^2 - 2xy - 8y + 12x - 4 = 0.$$

Résultat :

$$x = 2 \pm \sqrt{2}, \quad x = -1 \pm \sqrt{3},$$
$$y = 6 \pm 4\sqrt{2}; \quad y = 4 \mp 2\sqrt{3}.$$

(*) Extraits de l'*Algèbre* de M. Bertrand.

CHAPITRE XXVI.

CONSTRUCTION DES RACINES DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

383. On a vu, dans l'*Algèbre*, que pour déterminer graphiquement les racines réelles d'une équation à une seule inconnue,

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

il suffit de construire la courbe représentée par $y = f(x)$, et de chercher les points où elle coupe l'axe des abscisses.

Pour généraliser ce procédé, on combine l'équation (1) avec une équation

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (2)$$

prise arbitrairement; et l'on obtient ainsi une troisième équation

$$\psi(x, y) = 0, \quad (3)$$

qui admet toutes les solutions communes aux équations (1) et (2). Il y a plus : si, pour toute valeur réelle attribuée à x, l'équation (2) donne une valeur réelle de y, les racines réelles de l'équation (1) seront comprises parmi les valeurs de x qui vérifient les deux autres équations. En d'autres termes : *les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ sont représentées par les abscisses d'un certain nombre de points communs aux courbes ayant pour équations*

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0. \ (*)$$

Ajoutons que, si l'on a choisi convenablement la fonction φ, l'abscisse de *tout point commun* aux deux courbes représentera une de ces racines.

(*) Soient

$$f(x) = x^4 + x - 18 = 0, \quad \varphi(x, y) = (y - 1)x^3 + y^2 + 18x - 19 = 0.$$

On a

$$(y - 1)f(x) = x\varphi(x, y) - [18x^2 + (y^2 - y - 18)x + 18(y - 1)];$$

en sorte que l'on peut prendre

$$\psi(x, y) = 18x^2 + (y^2 - y - 18)x + 18(y - 1) = 0.$$

Néanmoins, les équations $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ sont vérifiées par $x = 1$, $y = 1$, et 1 n'est pas racine de $f(x) = 0$.

Application aux équations transcendantes.

384. I. $2x - l\frac{x+1}{x-1} = 0$ (*Alg.*, 376). On peut regarder cette équation comme résultant de l'élimination de y entre

$$y = 2x, \quad y = l\frac{x+1}{x-1}.$$

Par conséquent, si l'on construit la droite et la courbe représentées par ces dernières équations, les abscisses des points communs aux deux lignes donneront, avec une certaine approximation, les valeurs des racines cherchées (*).

385. II. $(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0.$

Divisant les deux termes par $4x\sin x$, on transforme cette équation en

$$\frac{4 - 3x^2}{4x} - \cot x = 0;$$

et celle-ci est une conséquence des équations

$$y = \frac{1}{x} - \frac{3}{4}x, \quad y = \cot x.$$

La construction de l'hyperbole représentée par la première, et du lieu de la seconde, montre que l'équation proposée a une infinité de racines réelles : zéro est l'une de ces racines (**).

Application au quatrième degré.

386. Considérons l'équation du quatrième degré privée du deuxième terme :

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r = 0; \quad (1)$$

et prenons $\varphi(x, y) = x^2 - ay = 0.$ (2)

(*) Ces valeurs sont $x = \pm 1,19967867$. A l'endroit cité, nous avons considéré seulement la valeur positive.

(**) La division par $x \sin x$ n'a pas supprimé cette racine; car, ainsi qu'on le reconnaît aisément, la fonction $\frac{1}{x} - \frac{3}{4}x - \cot x$ s'annule avec x.

En remplaçant d'abord x^2 par ay dans l'équation (1), nous la transformerons en

$$\psi(x, y) = a^2y^2 + apy + qx + r = 0; \quad (3)$$

de sorte que les racines de l'équation (1) seront données par l'*intersection de deux paraboles,* dont l'une a un paramètre quelconque.

387. On peut remplacer la seconde parabole par une circonférence. En effet, si l'on ajoute membre à membre les équations (2) et (3), après avoir divisé la dernière par a^2, on obtient

$$y^2 + x^2 + \left(\frac{p}{a} - a\right)y + \frac{q}{a}x + \frac{r}{a} = 0, \quad (4)$$

équation d'une circonférence.

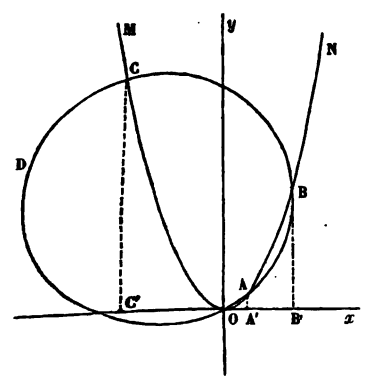
Application au troisième degré.

388. Pour résoudre $x^3 + px + q = 0$, on multiplie les deux membres par x, ce qui introduit une racine nulle, et l'on est ramené au cas précédent.

389. Exemple. $x^3 - 5x + 3 = 0.$

On peut prendre, pour les équations de la parabole et du cercle auxiliaires :

$$y = x^2, \quad y^2 + x^2 - 6y + 3x = 0.$$



Si, au moyen d'une échelle, on construit avec soin la parabole MON et la circonférence ABCD, on trouve que les points A, B, C d'intersection de ces deux courbes ont pour abscisses

$$OA' = 0,66;$$

$$OB'' = 1,83;$$

$$OC' = -2,49.$$

En effet, les méthodes ordinaires d'approximation, ap-

pliquées à l'équation proposée, donnent

$$x_1 = 0,659378,$$
$$x_2 = 1,834419,$$
$$x_3 = -2,490798.$$

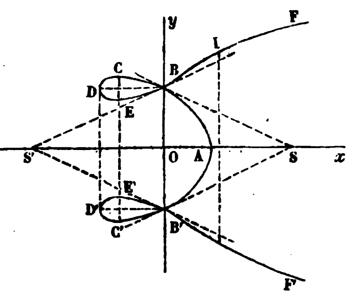
390. *Remarque.* — On peut résoudre toutes les équations du troisième ou du quatrième degré, en coupant *une même parabole* MON par des circonférences de dimension et de position convenables.

CHAPITRE XXVII.

DISCUSSION DE QUELQUES COURBES (*).

391. Exemple I. $y^2 = 1 \pm x\sqrt{x+1}$.

Une discussion préliminaire montre que la courbe, qui est coupée en deux parties symétriques par l'axe des abscisses (**), se compose d'un seul arc continu FBEDCBA... F', présentant deux *nœuds* ou deux *points doubles* B, B', et deux *branches infinies* BF, B'F'. Les points doubles ont pour coordonnées



$$x = 0, \quad y = \pm 1;$$

les *points-limites* D, D' sont déterminés par $x = -1$, $y = \pm 1$. Le point A où la

(*) Les exemples suivants sont destinés à étendre les notions contenues dans les chapitres VI et XIII. Une théorie complète de la *discussion des courbes* exigerait la connaissance du calcul différentiel, et dépasserait non-seulement l'étendue d'un simple chapitre, mais même celle d'un volume ordinaire.

(**) Dans tout ce chapitre, les coordonnées rectilignes sont supposées rectangulaires.

courbe coupe l'axe des abscisses, point que l'on peut regarder comme un sommet, est déterminé par la racine positive de l'équation $o = 1 - x\sqrt{x+1}$. Cette racine a pour valeur approchée $0,76$.

392. L'équation (1) donne, pour le coefficient angulaire de la tangente,

$$y' = \pm \frac{3x+2}{4y\sqrt{x+1}}. \quad (2)$$

L'ordonnée étant supposée positive, le signe supérieur se rapporte à l'arc ABCD, et le signe inférieur, à l'arc DEBF.

On voit immédiatement, à l'inspection de la formule (2), 1° qu'aux points A, D, D', la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées; 2° que les points maximum ou minimum C, E, C', E' ont pour abscisse commune $\left(-\frac{2}{3}\right)$; 3° que les tangentes aux points doubles sont les côtés du losange SBS'B', dans lequel

$$OS = OS' = 2\,OB.$$

393. Pour étudier plus aisément la marche de la tangente le long de la branche infinie BF, formons le carré de y', en remplaçant y^2 par $1 + x(x+1)^{\frac{1}{2}}$; nous aurons

$$y'^2 = \frac{(3x+2)^2}{16\left[1 + x(x+1)^{\frac{1}{2}}\right](x+1)}. \quad (3)$$

La fraction contenue dans le second membre est du degré $\left(-\frac{1}{2}\right)$; donc elle s'annule pour $x = +\infty$.

Nous venons de voir qu'elle s'annule aussi pour $x = -\frac{2}{3}$; donc elle croît d'abord avec x pour décroître ensuite. Par conséquent, la branche BF a un *point d'inflexion* I dont nous obtiendrons l'abscisse en cherchant la racine positive de l'équation $y'' = 0$.

Cette équation est

$$6\left[(x+1)+x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]-(3x+2)\left[1+(x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]=0,$$

ou, en simplifiant,

$$9x^5 + 33x^4 + 64x^3 + 36x^2 - 48x - 48 = 0. \quad (4)$$

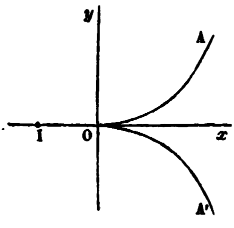
La méthode des racines incommensurables (*Alg.*, Chap. XXIV) donne $x = 0,86\ldots.$ Telle est l'abscisse du point d'inflexion. Les valeurs correspondantes de y et de y', tirées des formules (1) et (2), sont

$$y = 1,474, \quad y' = 0,569.$$

394. Exemple II. $y = \pm(1 + x)\sqrt{x^3}$. (1)

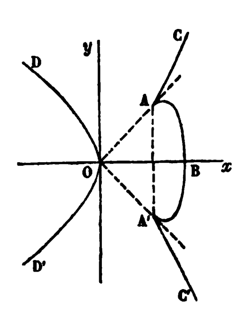
La valeur de y est imaginaire pour toutes les valeurs négatives de x, excepté pour $x = -1$. Par conséquent, outre deux branches infinies, situées du côté des abscisses positives, l'équation (1) représente un *point isolé* I, dont les coordonnées sont $x = -1$, $y = 0$.

395. Si l'on divise par x les deux membres, et qu'on fasse ensuite décroître indéfiniment cette variable, on obtient $\lim \frac{y}{x} = 0$. Conséquemment, les deux branches infinies OA, OA', qui se réunissent à l'origine, ont pour tangente commune, en ce point, l'axe des abscisses. On exprime cette circonstance en disant que l'origine est un *point de rebroussement de première espèce* (*).



396. Exemple III. $(y^2 - x^2)^2 - 9x(x-1)^3 = 0.$ (1)

Aspect général du lieu. — La courbe, évidemment symétrique par rapport à l'axe des x, se compose : 1° d'un arc *ouvert* ABA'; 2° de deux branches infinies AC, A'C' situées du côté des abscisses positives; 3° d'une double branche infinie DOD', située du côté des abscisses négatives et passant par l'origine. Les points A, A', d'où partent les branches AC, A'C', ont pour coordonnées $x = -1$, $y = \pm 1$.



(*) Le rebroussement est de *seconde espèce* quand les deux branches sont situées d'un même côté de leur tangente commune. La courbe représentée par $y = x + x^2 \pm x^2\sqrt{x}$ offre un exemple de cette particularité remarquable.

L'abscisse du sommet B est égale à la racine positive de l'équation

$$x^4 - 9x(x-1)^3 = 0.$$

Cette racine a pour valeur $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}-1} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-1} = 1,9258.$

Entre l'axe des ordonnées et sa parallèle AA', il n'y a aucun point du lieu.

397. *Asymptotes.* — La règle générale (163) donne, pour équation de ces droites,

$$y_1 = \pm\left(2x - \frac{9}{8}\right). \quad (2)$$

Si la courbe coupe ses asymptotes, les points d'intersection seront donnés par l'équation

$$\left[\left(2x - \frac{9}{8}\right)^2 - x^2\right]^2 - 9x(x-1)^3 = 0.$$

Réduisant, on trouve

$$384x^2 - 1088x + 729 = 0;$$

d'où

$$x = \frac{68 \pm \sqrt{250}}{42}:$$

savoir

$$x = 1,2426 \quad \text{et} \quad x = 1,9955.$$

Ainsi, la branche AC coupe deux fois son asymptote.

398. *Construction par points.* — Afin de mieux juger de la forme des branches infinies, et de leur situation à l'égard des asymptotes, donnons à x un certain nombre de valeurs entières, et calculons les valeurs correspondantes de y et de y_1. Nous pourrons former le tableau suivant :

x	y	y_1	$y_1 - y$
— 8	— 17,1202	— 17,125	— 0,0048
— 7	— 15,1195	— 15,125	— 0,0055
— 6	— 13,1185	— 13,125	— 0,0065
— 5	— 11,1171	— 11,125	— 0,0079
— 4	— 9,1150	— 9,125	— 0,0100
— 3	— 7,1112	— 7,125	— 0,0138
— 2	— 5,1034	— 5,125	— 0,0216
— 1	— 3,0782	— 3,125	— 0,0468
0	0	— 1,125	— 1,1250
1	1	0,875	— 0,125
2	2,8710	2,875	0,004
3	4,8679	4,875	0,0071
4	6,8685	6,875	0,0065
5	8,8706	8,875	0,0044
6	10,8701	10,875	0,0049
7	12,8706	12,875	0,0044
8	14,8711	14,875	0,0039

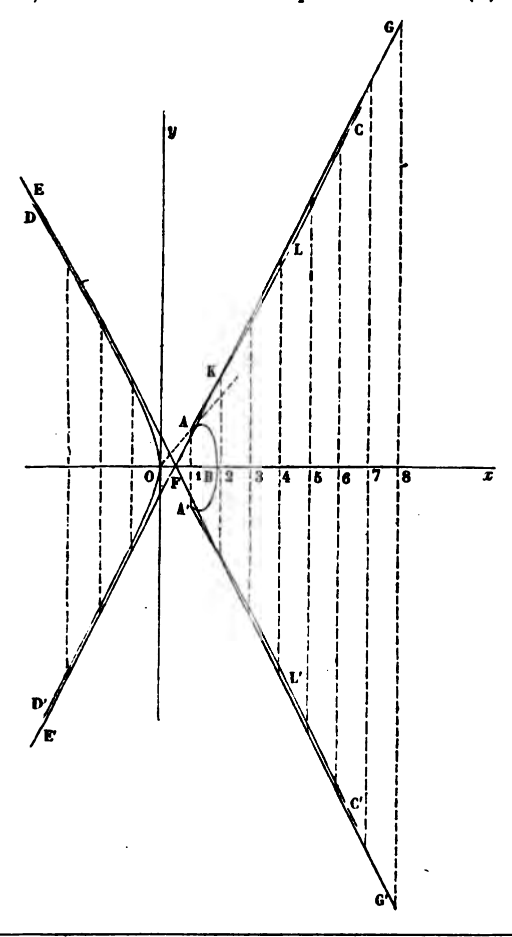
D'après ce tableau : 1° la demi-branche OD′ est située *au-dessus* de l'asymptote E′F, dont elle se rapproche constamment; 2° la demi-branche AKLC, d'abord située *au-dessus* de son asymptote, passe *au-dessous* de cette droite, s'en éloigne un peu, après quoi elle s'en rapproche indéfiniment. Le point d'intersection K, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure, a pour abscisse 1,9955.

399. *Points de rebroussement.* — Si dans l'équation (1), on fait $y = x$, on obtient $x(x-1)^3 = 0$. Cette équation ayant *trois racines égales* à 1, la droite OA est tangente à l'arc AC et à l'arc AB. Par conséquent, le point A présente un *rebroussement de première espèce* (*). Le point A′ jouit évidemment de la même propriété.

400. *Points d'inflexion.* — La branche AC coupant son asymp-

(*) On arrive à la même conclusion en discutant la valeur de y', indiquée plus loin.

tote en K, l'arc KLC doit avoir un point d'inflexion (*). Pour le



(*) La tangente à l'arc KLC, parallèle à l'asymptote pour le point le plus éloigné de cette droite, tend à se confondre avec elle. Conséquemment, l'angle sous lequel la tangente et l'asymptote se coupent, passe par un maximum.

déterminer, formons les deux premières dérivées de l'équation (1), et supposons $y'' = 0$. Nous obtiendrons ainsi :

$$4(y^2 - x^2)(yy' - x) - 9(x-1)^2(4x-1) = 0,$$

$$2(y^2 - x^2)(y'^2 - 1) + 4(yy' - x)^2 - 27(x-1)(2x-1) = 0.$$

L'élimination de y et de y', entre ces deux équations, conduit à

$$9(x-1)^3 = 4x^3;$$

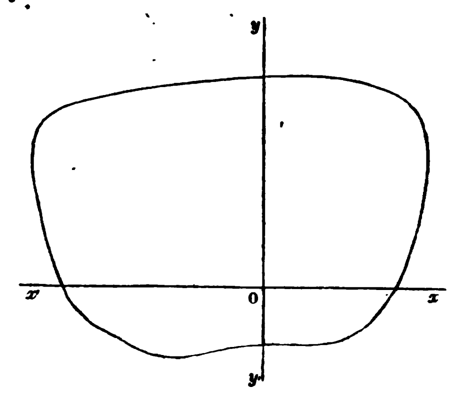
d'où

$$x = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}} = 4{,}2220, \quad y = \pm\sqrt{3}, \quad y' = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{\frac{9}{4}} + 1\right).$$

Les points d'inflexion L, L' sont donc complétement déterminés. Par suite, la forme de la courbe est, à fort peu près, telle qu'on l'a représentée dans la page 495.

401. Exemple IV. $y^4 + x^4 + 8x^3 - 2000y - 8000 = 0.$

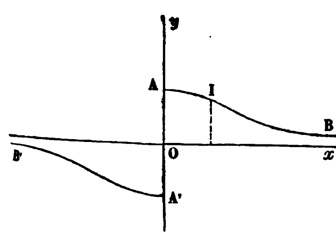
Cette équation n'étant résoluble par rapport à aucune des deux variables, on doit se contenter de donner à x, par exemple, un certain nombre de valeurs, et de calculer, approximativement, les valeurs correspondantes de y. Construisant ensuite les points ainsi déterminés, et joignant ces points par un trait continu, on obtient la figure ci-jointe.



402. EXEMPLE V. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$. (1)

L'équation n'est pas altérée quand on change x en $-x$ et y en $-y$; conséquemment l'origine est un centre de la courbe (189). D'ailleurs, les valeurs de x étant d'abord supposées positives, on reconnaît très-aisément que

$$\text{pour}\quad x = 0, \qquad y = 1,$$
$$\text{pour}\quad x = +\infty, \qquad y = 0.$$



La courbe se compose donc de deux branches infinies AB, A'B', symétriques par rapport à l'origine, asymptotiques à l'axe des abscisses, et se terminant brusquement, l'une en A, l'autre en A' : les points A, A' sont appelés *points d'arrêt*.

403. L'équation (1) donne

$$y' = -\frac{4}{x^2\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}\right)}. \quad (2)$$

Le dénominateur paraît indéterminé pour $x = 0$; mais, en remplaçant $\frac{1}{x}$ par z, on trouve sans peine qu'il croît indéfiniment avec x. Par suite, aux deux points d'arrêt, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

404. Le numérateur de y' étant constant, il suffira, pour déterminer le point d'inflexion de la branche AB, de rendre minimum la fonction $x\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}\right)$. En posant encore $\frac{1}{x} = z$, et égalant à zéro la dérivée de la fonction, on aura donc

$$z(e^z - e^{-z}) - (e^z + e^{-z}) = 0,$$

ou

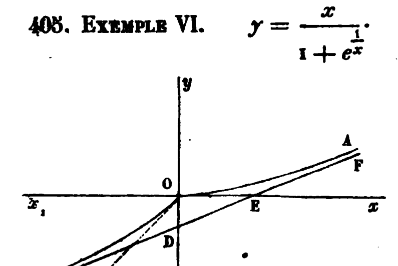
$$e^{2z} = \frac{z+1}{z-1}. \quad (3)$$

La racine de cette équation a pour valeur approchée (*Alg.*, 378),

$$z = 1,19967867,$$

par suite,
$$y = x = 0,83356.$$

405. Exemple VI. $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.



La courbe se compose de deux branches infinies OA, OB partant de l'origine et présentant cette circonstance remarquable qu'*elles n'ont pas la même tangente en ce point.*

En effet, si l'on donne d'abord à x des valeurs positives, on aura

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0;$$

donc la branche OA touche l'axe des abscisses. D'un autre côté, en faisant $x = -x_1$, $y = -y_1$, ce qui revient à rapporter la branche OB aux deux axes Ox_1, Oy_1, on obtient

$$\lim \frac{y_1}{x_1} = \lim \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x_1}}} = 1;$$

donc la branche OB a pour tangente, à l'origine, la bissectrice OT de l'angle $x_1 O y_1$.

Pour indiquer cette particularité de la courbe, on dit que l'origine est un point *anguleux*. En continuant la discussion, on reconnaît que les deux branches OA, OB ont une asymptote commune, représentée par $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

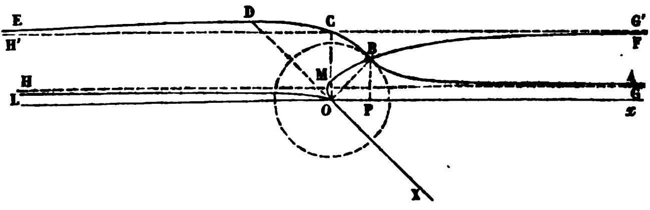
406. Exemple VII.

$$u = \frac{1 - \cos\omega}{\sin\omega - \cos\omega}. \quad (1)$$

O étant le pôle et OX l'axe, faisons varier ω de 0 à 2π. Nous pourrons former le tableau suivant :

$\omega = 0$	$\omega \begin{matrix} > 0 \\ < \frac{\pi}{4} \end{matrix}$	$\omega = \frac{\pi}{4}$	$\omega \begin{matrix} > \frac{\pi}{4} \\ < \frac{5\pi}{4} \end{matrix}$	$\omega = \frac{5\pi}{4}$	$\omega \begin{matrix} > \frac{5\pi}{4} \\ < 2\pi \end{matrix}$	$\omega = 2\pi$
$u = 0$	$u < 0$	$u = -\infty$	$u > 0$	$u = +\infty$	$u < 0$	$u = 0$

D'après l'inspection de ce tableau, on peut déjà juger que la courbe se compose : 1° de deux branches infinies OL, OF partant



du pôle et s'étendant l'une au-dessous, l'autre au-dessus de l'axe; 2° d'une autre branche infinie ACE coupant en D le prolongement de l'axe.

407. S'il existe des asymptotes, elles seront parallèles au rayon vecteur Ox déterminé par $\omega = \frac{\pi}{4}$; il y a donc avantage à prendre Ox pour axe polaire. Changeant, dans l'équation (1), ω en $\omega + \frac{\pi}{4}$, on trouve

$$u = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right)}{\sqrt{2}\sin\omega}. \quad (2)$$

Le second membre de cette nouvelle équation est positif ou négatif, suivant que ω est compris entre zéro et π, ou entre π et 2π. Afin d'avoir à considérer seulement des rayons vecteurs positifs, nous remplacerons la formule (2) par ces deux-ci :

$$u = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)}{\sqrt{2}\sin\omega}, \quad (3) \qquad u_1 = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right)}{\sqrt{2}\sin\omega}, \quad (4)$$

dans lesquelles nous ferons varier ω de o à π. De cette manière, l'équation (3) représentera la branche ACE, et la formule (4) les deux autres branches.

408. Les asymptotes de la première branche sont déterminées par la formule

$$d = \lim(u \sin \omega) = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2},$$

et par

$$d_1 = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

La valeur de u_1 conduit aux mêmes résultats; donc les asymptotes des trois branches sont les droites GH, G'H', que l'on construit évidemment au moyen de $BP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

409. Le point B, dont les coordonnées sont $\omega = \frac{\pi}{4}$, $u = 1$, appartient à la fois aux deux branches ABE, OBF. De plus, on reconnaît aisément que la circonférence OB est tangente, en ce point, à la branche ABE.

410. La formule $\tang V = \frac{u}{u'}$, appliquée aux deux branches OBF, OH, donne, à cause de l'équation (4),

$$\tang V = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\omega}{2}\right)\sin\omega}{\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Le second membre s'annule par $\omega = \frac{3}{4}\pi$; donc au point O, déterminé par cette valeur, la tangente est dirigée suivant le rayon vecteur : il y a *rebroussement*.

411. La même formule, $\tang V = \frac{u}{u'}$, appliquée à l'équation (3), montre qu'au point D la tangente est parallèle à l'axe polaire : le point D est donc celui qui s'éloigne le plus de cet axe.

412. La branche ABE présente évidemment un point d'in-

flexion. Pour le déterminer, formons l'équation

$$u^2 + 2u'^2 - uu'' = 0 \quad (*).$$

Elle devient, par un calcul facile,

$$\left[1 - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\right]\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\omega\right)\cos\omega - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\sin^2\omega\right]$$
$$+ 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\omega\right)^2 = 0,$$

ou

$$\sin^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\omega\right)\cos\omega - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)\sin^2\omega\right]$$
$$+ 4\sin^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\sin^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

En supprimant le facteur $\sin^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ et opérant quelques autres simplifications, on trouve enfin

$$\sin^2\omega - \sin\omega\cos\omega + 2\sqrt{2}\sin\omega - 2 = 0.$$

Cette équation est vérifiée par $\omega = \frac{\pi}{4}$; donc l'inflexion est en B, au point où se croisent les deux branches.

(*) On arrive à cette équation en cherchant le maximum de

$$\omega + \text{arc tang}\,\frac{u}{u'}.$$

APPENDICE.

MODIFICATION A LA MÉTHODE DE NEWTON.

1. Si, dans l'équation

$$f(\alpha)+hf'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}f''(\alpha)+\ldots+\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(\alpha)=0$$

(*Alg.*, 366), on conserve les trois premiers termes, on obtient

$$h=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\frac{1}{2}h^2\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)};$$

puis, en appliquant la *méthode des approximations successives* (*Alg.*, 31),

$$h=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\frac{1}{2}\frac{[f(\alpha)]^2f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^3}.$$

La formule (2) de la page 218 peut donc être remplacée par celle-ci :

$$\alpha_1=\alpha-\frac{f}{f'}-\frac{f^2f''}{2f'^3}, \quad (A)$$

dans laquelle nous avons écrit f, f', f'' au lieu de $f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha)$.

2. Cette nouvelle formule, qui donnera souvent une valeur fort approchée de la racine inconnue a, est susceptible, comme la formule de Newton, d'être interprétée géométriquement. En effet, *si l'on remplace la courbe dont l'ordonnée est $f(x)$ par une parabole* OSCULATRICE (*) *ayant son axe parallèle à l'axe des x, l'abscisse du point de rencontre de ces deux dernières lignes sera précisément α_1.*

Pour démontrer cette proposition, remarquons d'abord que l'é-

(*) Deux courbes, représentées par $y=f(x)$ et $y=\varphi(x)$, sont dites *osculatrices* au point dont l'abscisse est α, lorsque

$$f(\alpha)=\varphi(\alpha),\quad f'(\alpha)=\varphi'(\alpha),\quad f''(\alpha)=\varphi''(\alpha),\ldots,\quad f^n(\alpha')=\varphi^n(\alpha):$$

n est l'ordre de l'*osculation* ou l'ordre du *contact*.

quation de la parabole aura la forme

$$y^2 + Ay + Bx + C = 0, \quad (1)$$

et que cette équation donne

$$2yy' + Ay' + B = 0,$$
$$2yy'' + 2y'^2 + Ay'' = 0.$$

D'un autre côté, pour $x = \alpha$, on doit avoir $y = f$, $y' = f'$, $y'' = f''$; donc les coefficients A, B, C seront determinés par les équations

$$f^2 + Af + B\alpha + C = 0, \quad 2ff' + Af' + B = 0,$$
$$2ff'' + 2f'^2 + Af'' = 0;$$

d'où

$$A = -2\frac{ff'' + f'^2}{f''}, \quad B = 2\frac{f'^3}{f''}, \quad C = \frac{f^2 f'' + 2ff'^2 - 2\alpha f'^3}{f''}.$$

Enfin, si l'on fait $y = 0$ dans l'équation (1), on obtient

$$x = -\frac{C}{B} = \alpha - \frac{f}{f'} - \frac{f^2 f''}{2f'^3} = \alpha_1.$$

3. Pour rendre la formule (A) plus commode, on peut l'écrire ainsi :

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f}{f'} - \frac{f''}{2f'}\left(\frac{f}{f'}\right)^2. \quad (B)$$

Sous cette forme, on voit mieux quel est le rapport du dernier terme au deuxième, et, par suite, quels chiffres on doit conserver dans la réduction en décimales.

4. *Application.* $f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0$.

Nous prendrons $\alpha = 1,357$ (*Alg.*, 371). Cette valeur donne

$$f = -0,000\,153\,707, \quad f' = -1,475\,653, \quad f'' = 8,142;$$

puis

$$\alpha_1 = 1,357 - \frac{0,000\,153\,707}{1,475\,653} + \frac{4,071}{1,475\,653}\left(\frac{0,000\,153\,707}{1,475\,653}\right)^2.$$

La fraction $\frac{0,000\,153\,707}{1,475\,653}$ est à peu près égale à $0,000\,1$. De

même, $\frac{4,071}{1,475\,653} = 3$, en valeur approchée. Par conséquent, le dernier terme de α_1 diffère peu de 0,000 000 03. Il suffira donc, pleinement, de calculer chacun des deux derniers termes avec 9 décimales exactes. A ce degré d'approximation, on trouve

$$\frac{0,000\,153\,707}{1,475\,653} = 0,000\,104\,162, \quad \left(\frac{0,000\,153\,707}{1,475\,653}\right)^2 = 0,000\,000\,011,$$

$$\frac{4,071}{1,475\,653}\left(\frac{0,000\,153\,707}{1,475\,653}\right)^2 = 0,000\,000\,030;$$

puis $\alpha_1 = 1,357 - 0,000\,104\,162 + 0,000\,000\,030,$

ou $\alpha_1 = 1,356\,895\,868.$

Cette valeur est approchée à moins de 0,000 000 000 11 (*Alg.*, page 221).

FIN DU PREMIER VOLUME.

MANUEL

DES

CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage (tome II) a été fait à Paris dans le cours du mois de juillet 1858, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Mallet-Bachelier

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

MANUEL

DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR EUGÈNE CATALAN,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, ex-Répétiteur de Géométrie descriptive à cette École, Docteur ès Sciences, Agrégé de l'Université, ex-Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée Saint-Louis, Membre de la Société Philomathique, Correspondant des Académies des Sciences de Toulouse, Lille, Liége, et de la Société d'Agriculture de la Marne.

TOME SECOND.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS, MÉCANIQUE.

Avec 139 figures intercalées dans le texte.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1858

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SECOND.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

Pages.

CHAPITRE Ier. — Des coordonnées et des lieux dans l'espace 1

Coordonnées rectilignes 1
Équations du point 2
Équations des surfaces et des lignes 2
Projections d'une ligne 4
Signes des coordonnées 5
Coordonnées polaires 6

CHAPITRE II. — Théorie de la ligne droite 7

Équations de la ligne droite 7
Problèmes sur la ligne droite 8

Exercices 12

CHAPITRE III. — Théorie du plan 13

Équation du plan 13
Problèmes sur le plan et la ligne droite 15

Exercices 27

CHAPITRE IV. — Transformation des coordonnées 29

Applications de la transformation des coordonnées 31

Exercices 34

Pages.

CHAPITRE V. — Du centre dans les surfaces du second ordre 35

Exercices 38

CHAPITRE VI. — Des plans diamétraux et des plans principaux 38

Équation générale des plans diamétraux 38
Des plans principaux 41

Exercices 43

CHAPITRE VII. — Réduction de l'équation générale du second degré 43

Disparition des rectangles 43
Réduction aux deux formes principales 44

Exercices 46

CHAPITRE VIII. — Discussion des surfaces à centre 47

Ellipsoïde 47
Hyperboloïde à une nappe 49
Hyperboloïde à deux nappes 50
Cônes du deuxième degré 51
Cylindre elliptique ou hyperbolique 52
Cône asymptotique d'un hyperboloïde 53

Exercices 54

CHAPITRE IX. — Discussion des surfaces dépourvues de centre 55

Paraboloïde elliptique 55
Paraboloïde hyperbolique 57
Cylindre parabolique 58
Résumé des deux derniers chapitres 59

Exercices 59

CHAPITRE X. — Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre 60

Hyperboloïde à une nappe 60
Paraboloïde hyperbolique 65

Exercices 69

Pages.

CHAPITRE XI. — Discussion des équations numériques du second degré, à trois variables 70

Préliminaires 70
Premier cas : un centre unique 71
Deuxième cas : une droite lieu des centres 73
Troisième cas : un plan lieu des centres 73
Quatrième cas : aucun centre 73
Complément de la discussion des surfaces à centre unique ... 74
Recherche des génératrices rectilignes 77
Applications 83

Exercices 86

CHAPITRE XII. — Recherche des équations de quelques surfaces 87

Surfaces cylindriques 87
Surfaces coniques 88
Surfaces de révolution 90
Surfaces conoïdes 91

Exercices 92

CHAPITRE XIII. — Théories générales 93

De la tangente 93
Du plan tangent et de la normale 94
Des lignes considérées comme trajectoires 95
Du plan normal 95
Dérivée de l'arc 96
Du plan osculateur 97
Du cercle osculateur 99

Exercices 101

MÉCANIQUE.

Pages.

CHAPITRE Ier. — Introduction 104
Notions préliminaires.. 104
De la mesure du temps.. 105

CHAPITRE II. — Du mouvement d'un point 107
Mouvement uniforme... 107
Mouvement varié.. 109

CHAPITRE III. — De la vitesse........................ 110

Exercices... 114

CHAPITRE IV. — Du mouvement uniformément varié.. 115
Chute des corps pesants...................................... 116

Exercices... 117

CHAPITRE V. — De la composition des mouvements et des vitesses.................................... 118
Composition des mouvements................................... 118
Composition des vitesses..................................... 123
Application de la théorie des coordonnées à la composition des vitesses.. 126
Des mouvements apparents..................................... 128

CHAPITRE VI. — De l'accélération...................... 133
Mouvement rectiligne... 133
Mouvement curviligne... 136
Accélération tangentielle et accélération centripète......... 138

CHAPITRE VII. — Applications........................... 140

Exercices... 151

CHAPITRE VIII. — De l'inertie et des forces........... 152
Effets des forces.. 155
Forces égales. — Comparaison des forces aux poids.......... 156
Égalité entre l'action et la réaction........................ 157
Production du mouvement par les forces...................... 158
Indépendance des effets produits par plusieurs forces........ 160
Comparaison des forces constantes........................... 164
Relations entre les forces, les accélérations et les masses..... 165

Pages.

CHAPITRE IX. — Théorie de la pesanteur 168

Définitions 168
Phénomènes produits par la pesanteur 169
Machine d'Atwood 171
Appareil à indications continues 174
Problèmes sur le mouvement des corps pesants 175

CHAPITRE X. — Composition et équilibre des forces appliquées à un même point matériel 182

Parallélogramme des forces 182
Conditions de l'équilibre d'un point matériel 186

CHAPITRE XI. — Du travail et de la force vive 189

Préliminaires 189
Définition du travail 190
Évaluation du travail total 192
Travail de la résultante de plusieurs forces 194
Unités de travail. — Effort moyen 195
Relation entre le travail et la force vive 197
Principe des forces vives 199
Surfaces de niveau 201
Réaction des surfaces ou des lignes 202

CHAPITRE XII. — Applications 204

CHAPITRE XIII. — Composition des forces concourantes et des forces parallèles 218

De la constitution des solides 218
Forces concourantes 219
Composition des forces parallèles 222

Exercices 225

CHAPITRE XIV. — Théorie des moments 228

Définitions 228
Forces concourantes 228
Forces parallèles 230
Composition et équilibre de forces parallèles 232

CHAPITRE XV. — Des centres de gravité 234

Préliminaires 234
Détermination des centres de gravité 235
Problèmes sur les centres de gravité 239

Exercices 244

Pages.

CHAPITRE XVI. — Composition et équilibre de forces quelconques 246
Équations de l'équilibre 248
Cas où les forces ont une résultante unique 252
Exercices 253

CHAPITRE XVII. — Généralités sur les machines 254
Définition des machines 254
Du mouvement uniforme des machines 256
Principe de la transmission du travail 257
Impossibilité du mouvement perpétuel 258
Rendement d'une machine 259
Du frottement 259
Expériences de Coulomb 261
Lois du frottement 263

CHAPITRE XVIII. — Équilibre et travail des forces appliquées au levier 265
De la balance 267

CHAPITRE XIX. — Équilibre et mouvement d'un corps reposant sur un plan 269
Conditions d'équilibre d'un corps reposant sur un plan 269
Du plan incliné 272
Stabilité des corps pesants 278
Exercices 279

CHAPITRE XX. — Équilibre et travail des forces appliquées au treuil ou à la poulie 283
Du treuil 283
Équilibre d'un cordon 285
De la poulie 287
Des moufles 291

APPENDICE.

Formules approximatives de quadrature 293

MANUEL

DES

CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

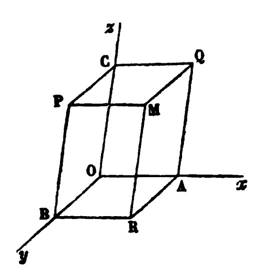
GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE Ier.

DES COORDONNÉES ET DES LIEUX DANS L'ESPACE.

Coordonnées rectilignes.

1. En généralisant les notions exposées dans la *Géométrie analytique à deux dimensions* (51), on voit que les lieux géométriques les plus simples, propres à déterminer la position d'un point M de l'espace, sont trois plans ARQM, BPRM, CQPM, respectivement parallèles à trois plans fixes yOz, zOx, xOy formant un angle trièdre. En effet, si l'on donne les distances a, b, c du point inconnu aux trois plans fixes (la distance à chacun d'eux étant comptée parallèlement à l'intersection des deux autres), il suffira de prendre $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, et de mener ARQ, BPR, CQP : ces trois plans constituent, avec les trois plans fixes, un parallélipipède dans lequel le sommet M est le point cherché.



2. Les distances $OA = MP$, $OB = MQ$, $OC = MR$, ou plutôt les quantités a, b, c qui les représentent, sont *les coordonnées recti-*

lignes du point M. Les trois arêtes, les trois faces et le sommet de l'angle trièdre O portent les noms d'*axes*, de *plans* et d'*origine des coordonnées*. Quand l'angle trièdre O est trirectangle, les coordonnées sont dites *rectangulaires*.

3. *Remarque.* — Au lieu de la construction précédente, on peut, pour plus de simplicité, employer la ligne brisée OARM, dans laquelle $OA = a$, $AR = b$, $RM = c$.

Équations du point.

4. Si l'on convient de représenter généralement par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque, le point particulier M sera défini par les équations

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Ici, comme dans la Géométrie à deux dimensions, on doit remarquer que chacune de ces équations représente l'un des lieux géométriques dont l'intersection est le point M. Par exemple, $x = a$ caractérise le plan ARQ, etc. En particulier, les plans coordonnés yOz, zOx, xOy sont représentés, respectivement, par

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

et ces équations, prises *simultanément*, représentent l'origine.

5. Remarques. — I. *Un point et chacune de ses projections ont toujours deux coordonnées communes.*

II. *Deux projections d'un même point ont toujours une coordonnée commune.*

En effet, les points M, P, Q, R ont pour équations, respectivement :

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c; \quad (M)$$
$$x = 0, \quad y = b, \quad z = c; \quad (P)$$
$$x = a, \quad y = 0, \quad z = c; \quad (Q)$$
$$x = a, \quad y = b, \quad z = 0. \quad (R)$$

Équations des surfaces et des lignes.

6. Théorème I. — *Toute équation qui renferme une, deux ou trois coordonnées représente, en général, une surface.*

1°. Considérons, pour fixer les idées, une équation

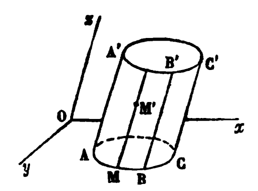
$$f(z) = 0 \quad (1)$$

renfermant seulement l'ordonnée z. Soient c, c', c'',..., les racines réelles de cette équation. Si l'on construit les plans représentés par $z = c$, $z = c'$, $z = c''$,..., on aura *le lieu* de l'équation (1). Par conséquent, *toute équation renfermant une seule coordonnée représente, en général, un système de plans parallèles aux axes des coordonnées qui n'entrent pas dans l'équation.*

2°. Pour interpréter une équation entre deux coordonnées,

$$f(x, y) = 0, \quad (2)$$

construisons, dans le plan xOy, la courbe ABC dont tous les points vérifient l'équation; par l'un d'eux, pris arbitrairement, menons MM' parallèle à Oz : tous les points de cette droite MM' vérifieront encore l'équation. En effet, les valeurs de x et de y sont les mêmes pour le point M' et pour sa projection M (5).



Il résulte de là que le lieu de l'équation proposée est la surface cylindrique ABCA'B'C' engendrée par la droite MM'. Ainsi, *toute équation entre deux coordonnées représente, en général, une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe de la coordonnée qui n'entre pas dans l'équation.*

3°. Soit

$$f(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

une équation entre les trois variables x, y, z. Si nous donnons à z une valeur particulière

$$z = \gamma, \quad (4)$$

nous obtenons

$$f(x, y, \gamma) = 0; \quad (5)$$

et les équations (4) et (5), prises simultanément, représentent un lieu dont tous les points vérifient l'équation (3). D'après ce qui précède, ce lieu est l'intersection C d'un plan parallèle au *plan des zy* (*) et d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles à l'*axe des z* (*). Pour une autre valeur γ' attribuée à z, nous obtiendrons une

(*) Pour abréger, nous employons ces dénominations, qui sont consacrées par l'usage.

courbe C′; et ainsi de suite. Par conséquent, l'équation (3) appartient au lieu géométrique des lignes C, C′, C″; ... : cette équation représente donc une certaine surface.

7. Théorème II. — 1° *Le système de deux équations représente, en général, une ligne;* 2° *le système de trois équations représente, en général, un ou plusieurs points.*

Ces propositions, déjà vérifiées dans différents cas particuliers, sont des conséquences très-simples du premier théorème.

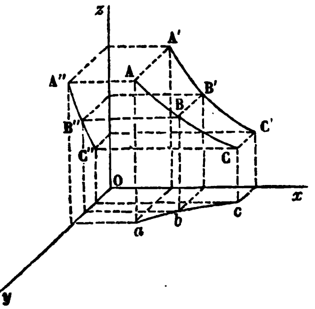
8. Les propositions précédentes sont, comme celles qui leur correspondent dans la Géométrie plane, sujettes à diverses exceptions. Ainsi : 1° *une équation peut représenter un point ou une ligne;* 2° *une équation peut ne rien représenter;* 3° *deux équations peuvent représenter un point ou ne rien représenter, etc.* Par exemple, l'équation $x^2+y^2+z^2=0$ représente l'origine; l'équation $(x^2+y^2-1)^2+z^2=0$ représente une circonférence située dans le plan des xy, et dont le centre est à l'origine, etc.

Projections d'une ligne.

9. Au lieu de déterminer une ligne ABC par deux surfaces quelconques dont elle soit l'intersection, on peut, pour plus de simplicité, se donner les cylindres qui la projettent sur deux des plans coordonnés, sur les plans des xz et des yz, par exemple. Les équations de ces *cylindres projetants* sont de la forme

$$f_1(x,z)=0, \quad (1) \qquad f_2(y,z)=0; \quad (2)$$

et il est clair, d'après le Théorème I (2°), que chacune d'elles appartient, soit à la projection A′B′C′, soit à la projection A″B″C″.



10. Problème. — *Connaissant les équations de deux des projections d'une ligne, trouver l'équation de la troisième projection.*

Il suffit, pour résoudre cette question, d'éliminer la coordonnée comme aux équations données.

En effet, si l'on élimine z entre

les équations (1) et (2), on obtiendra une équation

$$F(x, y) = 0 \quad (3)$$

à laquelle satisferont *tous les systèmes* de valeurs de x et de y qui vérifient les proposées. Cette équation (3) représente donc une surface cylindrique passant par la courbe ABC : elle appartient donc à la projection *abc* de cette courbe.

11. Plus généralement, si l'on combine, d'une manière convenable, les équations de deux surfaces, l'équation résultante sera celle d'une troisième surface passant par la courbe d'intersection des deux premières. Par exemple, en ajoutant membre à membre les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad (A) \qquad xy + zx + yz = 0, \quad (B)$$

après avoir multiplié les deux membres de la seconde par 2, on obtient

$$(x + y + z)^2 - 1 = 0; \quad (C)$$

et cette nouvelle équation appartient à une surface qui passe par la courbe d'intersection des deux autres (*).

12. *Remarque.* — Si au lieu d'éliminer z entre les équations (1) et (2), on donnait à cette coordonnée différentes valeurs $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, on obtiendrait les coordonnées $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'', \ldots$, d'un certain nombre de points de la projection *abc*. Ce procédé est d'accord avec les constructions géométriques, dont il est en quelque sorte la traduction.

Signes des coordonnées.

13. Les conventions adoptées pour les figures planes (*D. D.* (**), 59) doivent évidemment être étendues aux figures situées dans l'espace : si l'on n'affectait pas de certains signes les coordonnées d'un point, les équations

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

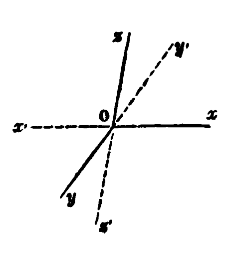
ne pourraient servir à distinguer les *huit points* dont les distances

---

(*) Les équations (A), (B), (C) représentant, respectivement, *une sphère, un cône* et *deux plans parallèles,* il résulte, de ce calcul, que la surface (B) est un *cône de révolution.*

(**) Cette abréviation signifie *Géométrie analytique à deux dimensions.*

aux plans coordonnés sont, en valeurs absolues, a, b, c. Ordinairement, on suppose que l'angle trièdre $Oxyz$, disposé comme on le voit sur la figure, appartient aux points dont les coordonnées sont positives. D'après cette hypothèse :



L'ordonnée x est *positive* ou *négative*, suivant que le point est *à droite* ou *à gauche* du plan yOz;

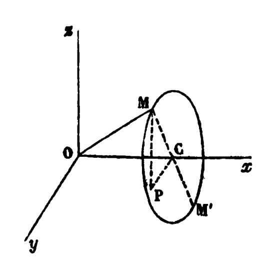
L'ordonnée y est *positive* ou *négative*, suivant que le point est *en avant* ou *en arrière* du plan zOx;

L'ordonnée z est *positive* ou *négative*, suivant que le point est *au-dessus* ou *au-dessous* du plan zOy.

Coordonnées polaires.

14. Les principes exposés dans la *Géométrie analytique à deux dimensions* (Chap. IV) sont applicables aux trois dimensions de l'espace; ainsi, *il y a autant de systèmes de coordonnées que de moyens de déterminer un point par l'intersection de trois lieux géométriques*.

Par exemple, un point donné M pouvant être regardé comme l'intersection de la *sphère* ayant pour centre le *pôle* O, du *cône* engendré par OM tournant autour de l'*axe polaire* Ox, et du *demi-plan* MOx (*); il s'ensuit que l'on peut prendre pour *coordonnées polaires* du point M : 1° le *rayon vecteur* $OM = a$; 2° l'*amplitude* $MOx = b$; 3° l'*azimut* $MCP = c$, c'est-à-dire l'angle formé par le *demi-plan* MOx avec le demi-plan xOy. Si l'on



(*) Si le plan déterminé par OM et Ox était prolongé au delà de cette dernière droite, il couperait une seconde fois la circonférence C, intersection du cône et de la sphère, et il y aurait ambiguïté dans la position du point. Pour la même raison, on ne considère pas la seconde nappe du cône.

appelle u, θ, ψ les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, le point M sera déterminé par les trois équations

$$u=a, \quad (1) \qquad \theta=b, \quad (2) \qquad \psi=c. \quad (3)$$

15. *Remarques.* — I. Les équations (1), (2), (3) représentent la sphère, le cône et le demi-plan dont il vient d'être question.

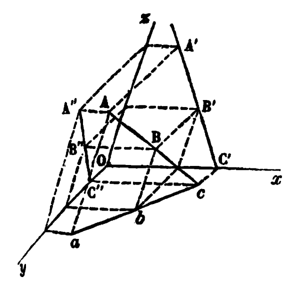
II. Ces équations détermineront, sans ambiguïté, tous les points de l'espace, si l'on fait varier u, θ et ψ, respectivement, de o à $+\infty$, de o à π, et de o à 2π.

CHAPITRE II.

THÉORIE DE LA LIGNE-DROITE.

Équations de la ligne droite.

16. Une droite quelconque AB, *non parallèle au plan des xy*, peut être représentée par les équations de ses projections A'B', A"B" sur les autres plans coordonnés. Les *équations de la ligne droite* sont donc, en général,



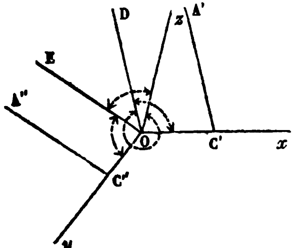
$$x=az+p, \quad (1)$$
$$y=bz+q. \quad (2)$$

17. *Signification des constantes* a, b, p, q. — 1°. Dans l'équation (1), p représente l'*ordonnée à l'origine* de la projection A'C', c'est-à-dire la distance OC'. De même, $q=$ OC".

2°. On peut dire encore que *les constantes* p, q *sont les coordonnées du point* c *où la droite* AB *perce le plan des* xy. Cette interprétation, évidente par la figure, résulte aussi de ce que $z=0$ donne $x=p$, $y=q$.

3°. Relativement aux *coefficients angulaires* a, b, il importe d'ob-

server que si l'on mène, dans le plan zx, OD parallèle à la projection C'A', on aura (*D. D.*, 101)



$$a = \frac{\sin zOD}{\sin xOD},$$

les angles étant comptés comme on le voit sur la figure.

De même, OE parallèle à C"A" donne

$$b = \frac{\sin zOE}{\sin yOE}.$$

18. *Équations d'une droite parallèle au plan des xy.* — Une pareille droite est l'intersection d'un plan parallèle à l'axe des z et d'un plan parallèle aux xy. Ses équations sont donc, en général,

$$y = ax + b, \quad z = c.$$

Problèmes sur la ligne droite.

19. Problème I. — *Trouver les équations d'une droite passant par un point donné.*

Les projections de la droite doivent passer par les projections du point (x', y', z'). Par conséquent, les équations cherchées sont (*D. D.*, 106) :

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

20. Problème II. — *Trouver les équations d'une droite passant par deux points donnés.*

Les projections de la droite sont représentées par (*D. D.*, 108)

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'} z - z'.$$

Ce sont donc là les équations demandées. On peut les écrire ainsi :

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'}.$$

21. Problème III. — *Trouver les équations d'une droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.*

Rappelons-nous que *deux droites sont parallèles si leurs pro-*

jections, faites sur deux plans qui se coupent, sont respectivement parallèles (*).

Cela posé, si $x = az + p$, $y = bz + q$ sont les équations de la droite donnée, la droite cherchée sera représentée par

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

22. Problème IV. — *Trouver le point de rencontre de deux droites données.*

Soient $\left.\begin{array}{l} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{array}\right\} (A) \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z + p', \\ y = b'z + q', \end{array}\right\} (A')$

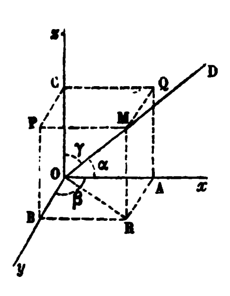
les équations des deux droites (A), (A'). Si ces lignes se coupent, les coordonnées de leurs points communs vérifieront les *quatre* équations précédentes. Ces équations renfermant *trois* inconnues seulement, il doit exister, entre les coefficients a, b, p,..., une *équation de condition*, que l'on obtient en éliminant x, y, z. Cette équation est

$$\frac{p - p'}{a - a'} = \frac{q - q'}{b - b'}.$$

Quand elle a lieu, *les droites* (A), (A') *se coupent* en un point dont les coordonnées sont

$$z = -\frac{p - p'}{a - a'} = -\frac{q - q'}{b - b'}, \quad x = \frac{ap' - pa'}{a - a'}, \quad y = \frac{bq' - qb'}{b - b'}.$$

23. Problème V. — *Trouver les angles que fait une droite avec les axes* (**).



Par l'origine, menons une parallèle OD à la droite donnée; prenons, sur cette parallèle, OM égale à l'unité de longueur, et achevons le *parallélipipède rectangle* OAR...M.

Les arêtes OA, OB, OC de ce polyèdre sont les coordonnées x, y, z du sommet M et, en même temps, les *projections orthogonales* de OM. Par conséquent,

$$\cos\alpha = x, \quad \cos\beta = y, \quad \cos\gamma = z.$$

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, page 12.

(**) Dans ce problème, et dans tous ceux que nous nous proposerons

D'un autre côté, les deux triangles *rectangles* ORM, OAR donnent

$$\overline{OA}^2 + \overline{AR}^2 + \overline{MR}^2 = \overline{OM}^2,$$

ou $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (A)$$

Enfin, les équations de OD étant

$$x = az, \quad (3) \qquad y = bz, \quad (4)$$

l'élimination de x, y, z donne

$$\left.\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}, \\ \cos\beta &= \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}, \\ \cos\alpha &= \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

24. *Remarques.* — I. A cause de $\cos\beta = b\cos\gamma$, $\cos\alpha = a\cos\gamma$, le radical doit être pris avec le même signe dans les formules (B). On obtient donc deux systèmes de valeurs pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Ce résultat pouvait être prévu; car les *deux directions* opposées OD, OD' font, avec les *parties positives* des axes, six angles supplémentaires deux à deux.

II. Quand on prend positivement le radical, on obtient les cosinus des angles que forme, avec les *parties positives* des axes, *le segment* OD de la parallèle DOD', *situé au-dessus* du plan des xy. En effet, l'angle DOZ étant aigu, son cosinus est positif.

III. La relation (A) s'énonce ainsi : *La somme des carrés des cosinus des angles que fait une droite avec trois axes rectangulaires, est égale à l'unité* (*).

25. Problème VI. — *Trouver l'angle de deux droites.*

Par l'origine, menons les parallèles OD, OD' aux deux droites données, et soient

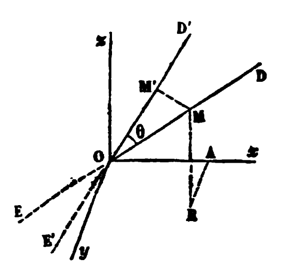
$$\left.\begin{aligned} x &= az, \\ y &= bz, \end{aligned}\right\} \text{(OD)} \qquad \left.\begin{aligned} x &= a'z, \\ y &= b'z, \end{aligned}\right\} \text{(OD')}$$

---

sur les *angles* ou sur les *distances*, les axes seront, pour plus de simplicité, supposés rectangulaires.

(*) Elle donne $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$

les équations de ces parallèles. Les formules (B) donneront les angles α, β, γ, α', β', γ' que forment, avec Ox, Oy, Oz, les segments OD, OD'. Cela posé, prenons la distance OM égale à l'unité de longueur, et projetons OM sur OD'. Nous aurons, en faisant attention que OM ferme le contour polygonal OARM (*D. D.*, 82), et en représentant par θ l'angle cherché,



$$\cos\theta = \text{OA}\cos\alpha' + \text{AR}\cos\beta' + \text{RM}\cos\gamma',$$

ou $$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'; \quad (C)$$

par suite, $$\cos\theta = \frac{aa' + bb' + 1}{\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)(a'^2+b'^2+1)}}. \quad (D)$$

26. *Remarques*. — I. Les segments OD, OD', situés au-dessus du plan des xy, et leurs prolongements OE, OE', forment quatre angles égaux deux à deux et supplémentaires deux à deux : c'est pourquoi $\cos\theta$ a deux valeurs égales et de signes contraires. Pour obtenir, sans ambiguïté, l'angle DOD', on devra prendre le radical positivement.

II. La formule (C) exprime que : *Le cosinus de l'angle de deux droites est égal à la somme des produits deux à deux des cosinus des angles formés par ces droites avec trois axes rectangulaires.*

III. En combinant les relations (C) et (A), on obtient cette formule remarquable :

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\theta = &(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2\\ &+ (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2\\ &+ (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2.\end{aligned}\right\} \quad (E)$$

27. PROBLÈME VII. — *Exprimer que deux droites sont perpendiculaires.*

En supposant $\cos\theta = 0$ dans les formules (C) ou (D), on a

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0, \quad (F)$$

$$aa' + bb' + 1 = 0. \quad (G)$$

28. *Remarques*. — I. La relation (G) est moins générale que

la relation (F) : en effet, elle suppose que les deux droites données rencontrent le plan des xy (16).

II. Pour *exprimer que deux droites sont parallèles*, il suffit de faire $\sin\theta = 0$ dans l'équation (E). On obtient ainsi

$$\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha' = 0, \quad \cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta' = 0,$$
$$\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma' = 0,$$

ou, en supposant tous les cosinus différents de zéro, et ayant égard à la relation (A) :

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta'} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'} = \pm 1.$$

Les conditions cherchées sont donc, ainsi que l'on devait s'y attendre,

$$\cos\alpha = \pm\cos\alpha', \quad \cos\beta = \pm\cos\beta', \quad \cos\gamma = \pm\cos\gamma'.$$

EXERCICES.

I. Quelle est la relation qui existe entre les angles λ, μ, ν déterminés par trois axes de coordonnées, et les angles α, β, γ formés, avec ces axes, par une droite quelconque?

Réponse :

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha\sin^2\lambda + 2\cos\lambda\cos\beta\cos\gamma - 2\cos\mu\cos\nu\cos\beta\cos\gamma\\
&+\sin^2\beta\sin^2\mu + 2\cos\mu\cos\gamma\cos\alpha - 2\cos\nu\cos\lambda\cos\gamma\cos\alpha\\
&+\sin^2\gamma\sin^2\nu + 2\cos\nu\cos\alpha\cos\beta - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\alpha\cos\beta\\
&+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu - 2 = 0 \quad \text{(tome I}^{\text{er}}\text{, p. 292).}
\end{aligned}$$

II. Les équations de la droite étant

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

trouver les angles α, β, γ.

Résultat : En posant

$$\begin{aligned}
l &= a + b\cos\nu + c\cos\mu,\\
m &= b + c\cos\lambda + a\cos\nu,\\
n &= c + a\cos\mu + b\cos\lambda,\\
A &= l^2\sin^2\lambda - 2mn(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu),\\
B &= m^2\sin^2\mu - 2nl(\cos\mu - \cos\nu\cos\lambda),\\
C &= n^2\sin^2\nu - 2lm(\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu),
\end{aligned}$$

$$D = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

$$t^2 = \frac{D}{A+B+C},$$

on a $$\cos\alpha = lt,\quad \cos\beta = mt,\quad \cos\gamma = nt.$$

III. Trouver l'angle θ de deux droites faisant, avec trois axes obliques, des angles α, β, γ, α', β', γ'.

Résultat : En posant

$$\begin{aligned} L &= \cos\alpha\cos\alpha'\sin^2\lambda \\ &\quad - (\cos\beta\cos\gamma' + \cos\gamma\cos\beta')(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu), \\ M &= \cos\beta\cos\beta'\sin^2\mu \\ &\quad - (\cos\gamma\cos\alpha' + \cos\alpha\cos\gamma')(\cos\mu - \cos\nu\cos\lambda), \\ N &= \cos\gamma\cos\gamma'\sin^2\nu \\ &\quad - (\cos\alpha\cos\beta' + \cos\beta\cos\alpha')(\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu), \end{aligned}$$

on trouve $$\cos\theta = \frac{L+M+N}{D}.$$

CHAPITRE III.

THÉORIE DU PLAN.

Équation du plan.

29. Pour trouver l'équation d'un plan quelconque, nous regarderons cette surface comme *le lieu des positions d'une droite mobile* G, *assujettie à s'appuyer sur une droite donnée* D, *en restant parallèle à une direction donnée.*

Soient $$x = az + p, \quad (1) \qquad y = bz + q \quad (2)$$

les équations de la droite D, à laquelle on donne le nom de *directrice;* soient

$$x = a'z, \quad y = b'z$$

les équations de la ligne à laquelle la *génératrice* G doit rester parallèle : cette génératrice sera représentée par

$$x = a'z + \alpha, \quad (3) \qquad y = b'z + \beta; \quad (4)$$

et, pour qu'elle rencontre la directrice, il faudra (22) que les *paramètres* α, β satisfassent à la relation

$$\frac{\alpha - p}{a' - a} = \frac{\beta - q}{b' - b}. \quad (5)$$

Cela posé, si l'on donnait à α diverses valeurs particulières, et qu'on tirât, de l'équation (5), les valeurs correspondantes de β, les équations (3) et (4) représenteraient les positions de la génératrice, correspondant à ces valeurs arbitraires de α. Par conséquent, pour trouver *l'équation du lieu de la génératrice*, on doit éliminer, entre les équations (3), (4), (5), les deux paramètres α, β qui particularisent cette ligne (*). On obtient ainsi

$$\frac{x - a'z - p}{a' - a} = \frac{y - b'z - q}{b' - b}. \quad (6)$$

Cette équation ayant la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (7)$$

il s'ensuit que *tout plan peut être représenté par une équation du premier degré, entre trois coordonnées rectilignes.*

30. Réciproquement, *toute équation de la forme*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7)$$

représente un plan.

En effet, si l'on combine l'équation (7) avec les équations d'une droite quelconque :

$$x = az + p, \quad (1) \qquad y = bz + q, \quad (2)$$

on obtient, en général, un seul système de valeurs pour x, y, z (**).

(*) Si cette conclusion ne lui paraît pas suffisamment évidente, le lecteur pourra développer ainsi la démonstration : L'équation (6), étant déduite des équations (3), (4), (5), est vérifiée par *tous les systèmes* de valeurs de x, y, z qui satisfont à ces équations. Autrement dit, la surface représentée par l'équation (6) contient un point *quelconque* d'une position *quelconque* de la génératrice; donc cette équation (6) est celle qu'il s'agissait d'obtenir.

(**) Si les équations (1), (2), (3) sont incompatibles, la droite ne rencontre pas le plan; si elles sont indéterminées, la droite est située dans le plan.

Par conséquent, *la surface représentée par l'équation* (7) *ne peut être rencontrée en plus d'un point par une droite :* cette surface est donc un plan.

31. *Remarque.* — Lorsque, dans l'équation (7), les coefficients A, B, C, D sont tous différents de zéro, le plan est *oblique aux trois axes*, et *il ne passe pas par l'origine*. Au contraire, si quelqu'un des coefficients est nul, le plan prend une position particulière. Par exemple, l'équation $Ax+By+Cz=0$ représente *un plan passant par l'origine*. De même, $Ax+By+D=0$ est l'équation *d'un plan parallèle à l'axe des z*, etc.

32. *Autre forme de l'équation du plan.* — En opérant comme nous l'avons fait pour la ligne droite, pour l'ellipse, etc. (*D. D.*, 102, 213), on peut remplacer l'équation (7) par cette autre équation très-symétrique :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad (8)$$

dans laquelle a, b, c représentent *les distances de l'origine aux points d'intersection des axes avec le plan :* évidemment ces distances ne doivent pas être nulles.

Problèmes sur le plan et la ligne droite.

33. Problème I. — *Trouver l'équation d'un plan passant par trois points donnés.*

Soient x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' les coordonnées de ces points; soit

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (1)$$

l'équation cherchée. Les coefficients A, B, C, D doivent satisfaire aux relations

$$\left.\begin{array}{l} Ax'+By'+Cz'+D=0,\\ Ax''+By''+Cz''+D=0,\\ Ax'''+By'''+Cz'''+D=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Si l'on prend pour inconnues $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, on déduit, des trois dernières équations,

$$\frac{A}{D}=\frac{L}{\Delta}, \quad \frac{B}{D}=\frac{M}{\Delta}, \quad \frac{C}{D}=\frac{N}{\Delta}, \quad (3)$$

en posant (*Alg.*, 14),

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= x'y''z''' - x'z''y''' + z'x''y''' - y'x''z''' + y'z''x''' - z'y''x''',\\
L &= -y''z''' + z''y''' - z'y''' + y'z''' - y'z'' + z'y'',\\
M &= -x'z''' + x'z'' - z'x'' + x''z''' - z''x''' + z'x''',\\
N &= -x'y'' + x'y''' - x''y''' + y'x'' - y'x''' + y''x'''.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

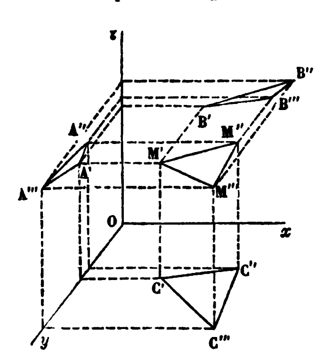
D'ailleurs, on satisfait aux équations (4) en prenant

$$A = L, \quad B = M, \quad C = N, \quad D = \Delta;$$

donc l'équation (1) peut être remplacée par

$$Lx + My + Nz + \Delta = 0. \quad (5)$$

34. *Interprétation géométrique des résultats précédents.* — Les coordonnées étant supposées rectangulaires, soient $A'A''A'''$, $B'B''B'''$, $C'C''C'''$ les projections du triangle ayant pour sommets les points donnés M', M'', M'''. Représentons par a, b, c les aires de ces trois projections, et par V la somme des volumes des trois *prismes tronqués*



$$M'M''M'''A'A''A''', \; M'M''M'''B'B''B''', \; M'M''M'''C'C''C'''.$$

Nous aurons

$$L = \pm 2a, \quad M = \pm 2b, \quad N = \pm 2c, \quad \Delta = \mp 2V.$$

En effet, les trois premières valeurs résultent immédiatement de la formule de *Stainville*, qui donne l'aire d'un polygone en fonction des coordonnées de ses sommets; et, pour obtenir la dernière, il suffit d'ajouter membre à membre les équations (2).

35. Problème II. — *Trouver l'équation d'un plan passant par un point donné et parallèle à un plan donné.*

Cherchons d'abord les *conditions du parallélisme de deux plans donnés*. Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1) \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0 \quad (2)$$

les équations de ces plans. Pour qu'ils soient parallèles, *il faut et il suffit que leurs traces, sur deux des plans coordonnés, soient respectivement parallèles*. Posons donc, dans les équations (1) et (2), successivement $z = 0$, $x = 0$; nous obtiendrons les *deux* conditions cherchées :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}; \quad (3)$$

conséquemment, pour que *deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que les coefficients des variables, dans les équations de ces plans, soient proportionnels* (*).

En revenant au problème proposé, supposons que l'équation (1) représente le plan donné, et que le plan inconnu soit représenté par l'équation (2). Comme on satisfait aux relations (3) en prenant

$$A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C,$$

nous pouvons d'abord remplacer l'équation (2) par celle-ci :

$$Ax + By + Cz + D'' = 0. \quad (4)$$

D'un autre côté, le point donné ayant pour coordonnées x', y', z', le coefficient D'' sera déterminé par la condition

$$Ax' + By' + Cz' + D'' = 0.$$

L'équation demandée est donc

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

36. Problème III. — *Trouver l'équation d'un plan passant par un point donné et par une droite donnée.*

Soient x', y', z' les coordonnées du point; soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations de la droite.

Si on les ajoute membre à membre, après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur λ, on obtient l'équation

$$x - az - p + \lambda(b - bz - q) = 0,$$

(*) Cette condition subsiste quand les plans sont parallèles à l'un des axes. On l'obtient d'ailleurs, sans aucun calcul, en faisant attention que *les deux plans n'ont aucun point commun, si leurs équations sont incompatibles.*

qui représente *tous les plans passant par la droite donnée :* cette proposition résulte d'un raisonnement que nous avons souvent employé. Si l'on veut considérer, parmi ces plans, celui qui passe par le point donné, on devra déterminer le *paramètre* λ par la condition

$$x' - az' - p + \lambda(y' - bz' + q) = 0.$$

L'équation cherchée est donc

$$\frac{x - az - p}{x' - az' - p} = \frac{y - bz - q}{y' - bz' - q}.$$

37. Problème IV. — *Trouver l'équation d'un plan passant par un point donné (x', y', z') et par l'intersection de deux plans donnés,* ayant pour équations

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1) \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0. \quad (2)$$

En opérant comme dans le problème précédent, on trouve

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{Ax' + By' + Cz' + D} = \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{A'x' + B'y' + C'z' + D'}.$$

38. Problème V. — *Trouver les projections de l'intersection de deux plans.*

Entre les équations (1), (2) du numéro précédent, dont l'ensemble représente l'intersection (7), éliminons une des coordonnées : l'équation résultante, représentant le plan qui projette l'intersection sur le plan des deux autres coordonnées, sera l'une des équations cherchées.

Par exemple, la projection de l'intersection des deux plans, sur le plan des xz, est représentée par l'équation

$$(AB' - BA')x + (CB' - BC')z + DB' - BD' = 0,$$

jointe à

$$y = 0.$$

39. Problème VI. — *Trouver le point de rencontre d'une droite et d'un plan donnés.*

Si, entre l'équation du plan,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

et les équations de la droite,

$$x = az + p, \quad (2) \qquad y = bz + q, \quad (3)$$

on élimine x et y, on trouve

$$(Aa+Bb+C)z+Ap+Bq+D=0; \quad (4)$$

d'où, en supposant $Aa+Bb+C$ différent de zéro,

$$z=-\frac{Ap+Bq+D}{Aa+Bb+C}:$$

telle est l'ordonnée du point cherché; etc. (30).

40. *Conditions exprimant qu'une droite est parallèle à un plan.* — Si l'équation (4) se réduit à la forme $m=0$, les équations (1), (2), (3) sont incompatibles : les conditions dont il s'agit sont donc

$$Aa+Bb+C=0, \quad Ap+Bq+D \gtrless 0.$$

41. *Conditions exprimant qu'une droite est dans un plan.* — La droite sera dans le plan, si l'équation (4) est identique, c'est-à-dire si l'on a

$$Aa+Bb+C=0, \quad Ap+Bq+D=0.$$

42. PROBLÈME VII. — *Exprimer qu'une droite et un plan sont perpendiculaires.*

Soient, comme précédemment,

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (1)$$

$$x=az+p, \quad (2) \qquad y=bz+q \quad (3)$$

les équations du plan et de la droite, les axes coordonnés étant, pour plus de simplicité, supposés rectangulaires (*).

Pour que la droite soit perpendiculaire au plan, il faut et il suffit que les projections de la droite, sur deux des plans coordonnés, soient respectivement perpendiculaires aux traces du plan (**). Par suite, les conditions demandées sont (*D. D.*, 112)

$$-a\frac{C}{A}+1=0, \quad -b\frac{C}{B}+1=0,$$

ou

$$a=\frac{A}{C}, \quad b=\frac{B}{C}.$$

(*) *Voyez* la note du n° 23.

(**) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, Ire partie, page 12.

43. *Remarques.* — I. Le plan passant par un point (x', y', z'), et perpendiculaire à la droite représentée par

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

a pour équation

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0 \ (*).$$

II. La droite passant par un point (x', y', z'), et perpendiculaire au plan représenté par

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

a pour équations $\dfrac{x - x'}{A} = \dfrac{y - y'}{B} = \dfrac{z - z'}{C}$.

44. Problème VIII. — *Déterminer l'angle de deux plans* P, P'.

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations de ces plans. Par l'origine, menons deux droites D, D', respectivement perpendiculaires à P, P' : l'angle de ces droites est égal à l'angle cherché, ou il en est le supplément. D'ailleurs, les équations des perpendiculaires sont (43, II)

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}, \quad \frac{x}{A'} = \frac{y}{B'} = \frac{z}{C'},$$

par conséquent,

$$\cos(P, P') = \frac{AA' + BB' + CC'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

45. *Condition exprimant que deux plans sont perpendiculaires.* — D'après la dernière formule, cette condition est

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

46. *Conditions exprimant que deux plans sont parallèles.* —

(*) Si la droite était parallèle au plan des xy, le plan perpendiculaire ne pourrait plus être représenté par la dernière équation (18). Pour obtenir une équation qui subsiste dans tous les cas, il suffit de remplacer a et b par leurs valeurs $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. On trouve ainsi

$$(x - x')\cos\alpha + (y - y')\cos\beta + (z - z')\cos\gamma = 0.$$

Ces conditions, déjà trouvées dans le n° 35, résultent aussi de la formule précédente. Supposant $\cos(P, P') = 1$, on obtient effectivement

$$(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)-(AA'+BB'+CC')^2=0,$$

ou $$(AB'-BA')^2+(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2=0;$$

d'où enfin $$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

47. Problème IX. — *Trouver les angles que fait un plan avec les plans coordonnés.*

Reprenons la formule générale du n° 44, et supposons que le plan P' coïncide successivement avec les trois plans coordonnés; nous aurons

$$\cos(P, yz)=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos(P, zx)=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos(P, xy)=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

48. *Remarque.* — On trouverait directement les dernières formules, en cherchant les angles formés, avec les trois axes, par une perpendiculaire au plan P.

49. Problème X. — *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.*

Soient $$Ax+By+Cz+D=0, \quad (P)$$

$$x=az+p, \quad y=bz+q \quad (D)$$

les équations du plan P et de la droite D. Par l'origine, abaissons une perpendiculaire D' sur le plan P : l'angle formé par les droites D, D' sera le complément de l'angle cherché. D'ailleurs, les équations de la perpendiculaire sont

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C};$$

donc (25)

$$\cos(D, D')=\sin(P, D)=\frac{Aa+Bb+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

50. PROBLÈME XI. — *Calculer la distance* δ *de deux points* M', M'', *connaissant leurs coordonnées rectangulaires* x', y', z'; x'', y'', z''.

Si, par chacun des deux points, on fait passer trois plans, respectivement parallèles aux plans coordonnés, on formera un parallélipipède rectangle dont δ sera une diagonale. De plus, quelles que soient les positions des points M', M'', les arêtes de ce parallélipipède seront représentées par les valeurs absolues des binômes $x'-x''$, $y'-y''$, $z'-z''$.

Conséquemment

$$\delta=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}.$$

51. *Remarque*. — La distance de l'origine à un point (x', y', z') a pour expression

$$\delta=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

52. PROBLÈME XII. — *Trouver la distance d'un point donné à un plan donné.*

Le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan est représenté (43, II) par les *trois* équations

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (1)$$

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}. \quad (2)$$

D'ailleurs, δ étant la longueur de cette perpendiculaire, on a (50)

$$\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2. \quad (3)$$

Introduisant, dans l'équation du plan, les différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ (*D. D.*, 115), et posant, pour abréger,

$$D'=Ax'+By'+Cz'+D,$$

on change cette équation en

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D'=0.$$

Les propriétés des proportions donnent ensuite

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}=\frac{A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')}{A^2+B^2+C^2}$$

$$=-\frac{D'}{A^2+B^2+C^2}=\frac{\delta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

donc enfin $$\delta = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

53. *Remarques.* — I. La distance de l'origine au plan P a pour valeur

$$\delta = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

II. Dans ces formules, on donne au radical le signe du numérateur (*P. D.*, 116).

III. Soit p la distance de l'origine à un plan; soient α, β, γ les angles formés par p avec les trois axes : l'équation du plan est

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

54. Problème XIII. — *Trouver la distance d'un point donné* M *à une droite donnée* AB.

Première solution. — Les équations de la droite étant

$$x = az+p, \quad (1) \qquad y = bz+q, \quad (2)$$

imaginons, par le point M, un plan perpendiculaire à AB. Soit P le point où AB perce le plan : MP sera la distance cherchée δ. Or, le plan auxiliaire a pour équation (43)

$$a(x-x')+b(y-y')+(z-z') = 0. \quad (3)$$

De plus, $\delta^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2. \quad (4)$

Donc, en *résolvant les équations* (1), (2), (3) *par rapport à* $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, et en substituant les valeurs de ces inconnues dans l'équation (4), on aura la formule demandée. On obtient d'abord

$$x-x' = a(z-z')-(x'-az'-p),$$
$$y-y' = b(z-z')-(y'-bz'-q);$$

puis, en posant $A = x'-az'-p$, $B = y'-bz'-q$:

$$z-z' = \frac{aA+bB}{a^2+b^2+1},$$

$$y-y' = \frac{abA-(a^2+1)B}{a^2+b^2+1},$$

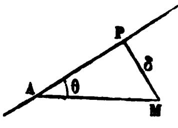
$$x-x' = \frac{-(b^2+1)A+abB}{a^2+b^2+1}.$$

Après quelques réductions faciles, on trouve enfin

$$\delta^2 = \frac{(b^2+1)A^2 - 2ab\,AB + (a^2+1)B^2}{a^2+b^2+1}.$$

Seconde solution. — On arrive à un résultat plus symétrique, en procédant comme il suit :

Soient a, b, c les coordonnées d'un point A de la droite AB, et α, β, γ les angles formés par cette droite avec les axes. Le triangle rectangle APM donne



$$\delta = \mathrm{AM}\sin\theta.$$

D'un autre côté, en désignant par α', β', γ' les angles que fait AM avec les axes, on a (26, III)

$$\begin{aligned}\sin^2\theta = {} & (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2 \\ & + (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2 \\ & + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2;\end{aligned}$$

et, par le principe des projections,

$$\cos\alpha' = \frac{x'-a}{\mathrm{AM}}, \quad \cos\beta' = \frac{y'-b}{\mathrm{AM}}, \quad \cos\gamma' = \frac{z'-c}{\mathrm{AM}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta^2 = {} & [(x'-a)\cos\beta - (y'-b)\cos\alpha]^2 \\ & + [(y'-b)\cos\gamma - (z'-c)\cos\beta]^2 \\ & + [(z'-c)\cos\alpha - (x'-a)\cos\gamma]^2 \;(*).\end{aligned}$$

55. *Remarque.* — En projetant AM sur AB, puis AP sur les trois axes, on obtient, pour les coordonnées du point P,

$$x = a + l\cos\alpha, \quad y = b + l\cos\beta, \quad z = c + l\cos\gamma.$$

Dans ces formules,

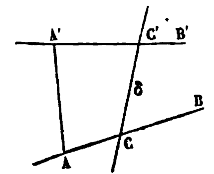
$$l = (x'-a)\cos\alpha + (y'-b)\cos\beta + (z'-c)\cos\gamma.$$

(*) A cause de $\delta^2 = \overline{\mathrm{AM}}^2 - \overline{\mathrm{AP}}^2$, on peut encore écrire, au lieu de la dernière formule,

$$\begin{aligned}\delta^2 = {} & (x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2 \\ & - [(x'-a)\cos\alpha + (y'-b)\cos\beta + (z'-c)\cos\gamma]^2.\end{aligned}$$

56. **Problème XIV.** — *Déterminer, en grandeur, la plus courte distance de deux droites* AB, A′B′.

En supposant, comme dans le Problème XIII, la droite AB déterminée par un de ses points A et par sa direction, nous avons, pour les équations de cette ligne,



$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}.$$

Semblablement, la droite A′B′ est représentée par

$$\frac{x-a'}{\cos\alpha'}=\frac{y-b'}{\cos\beta'}=\frac{z-c'}{\cos\gamma'}.$$

Soit CC′ la commune perpendiculaire à ces deux droites : la plus courte distance δ est la projection de AA′ sur CC′. Appliquant le principe des projections, et représentant par λ, μ, ν les angles formés par CC′ avec les axes, nous aurons donc

$$\delta=(a'-a)\cos\lambda+(b'-b)\cos\mu+(c'-c)\cos\nu.$$

Les angles λ, μ, ν doivent évidemment satisfaire aux relations

$$\cos\lambda\cos\alpha+\cos\mu\cos\beta+\cos\nu\cos\gamma=0,$$
$$\cos\lambda\cos\alpha'+\cos\mu\cos\beta'+\cos\nu\cos\gamma'=0,$$
$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1.$$

On tire, des deux premières,

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}=\frac{\cos\mu}{\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'}=\frac{\cos\nu}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}.$$

En vertu de la troisième, chacun de ces rapports est égal à $\frac{1}{\sin\theta}$, θ étant l'angle des deux droites données (26, III). Par conséquent,

$$\delta=(a'-a)\frac{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}{\sin\theta}+(b'-b)\frac{\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'}{\sin\theta}+(c'-c)\frac{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}{\sin\theta}.$$

57. *Remarque.* — La perpendiculaire à deux droites données est déterminée, *en direction* (*), par les formules

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'}{\sin\theta},$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'}{\sin\theta},$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\sin\theta}.$$

58. Problème XV. — *Déterminer, en position, la plus courte distance de deux droites.*

Soient, comme dans le problème précédent,

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{x-a'}{\cos\alpha'} = \frac{y-b'}{\cos\beta'} = \frac{z-c'}{\cos\gamma'}, \quad (2)$$

les équations des deux droites AB, A'B'. La plus courte distance CC' est l'intersection des deux plans ACC', A'C'C, dont il s'agit de trouver les équations.

On peut d'abord remarquer que l'équation de tout plan passant par la droite (1) peut être mise sous la forme

$$m\frac{x-a}{\cos\alpha} - (1+m)\frac{y-b}{\cos\beta} + \frac{z-c}{\cos\gamma} = 0, \quad (3)$$

m étant un paramètre arbitraire. Ce plan coïncidera avec ACC', si m satisfait à la condition

$$\frac{m}{\cos\alpha}\cos\lambda - \frac{1+m}{\cos\beta}\cos\mu + \frac{1}{\cos\gamma}\cos\nu = 0, \quad (4)$$

dans laquelle λ, μ, ν représentent, comme précédemment, les angles formés, avec les trois axes, par *la direction* de la plus courte distance. En effet, cette relation exprime que le plan (3) est parallèle à une droite faisant des angles λ, μ, ν avec les trois axes (40).

L'élimination de m, entre les équations (3), (4), donne

$$\begin{aligned}&(\cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu)(x-a)\\ &+(\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu)(y-b)\\ &+(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda)(z-c) = 0:\end{aligned}$$

(*) Mais non *en position*.

telle est l'équation du plan ACC'. Si l'on y remplace $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ par leurs valeurs

$$\frac{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'}{\sin\theta},$$
$$\frac{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'}{\sin\theta},$$
$$\frac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\sin\theta},$$

elle devient, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha\cos\theta - \cos\alpha')(x-a)\\ &+(\cos\beta\cos\theta - \cos\beta')(y-b)\\ &+(\cos\gamma\cos\theta - \cos\gamma')(z-c) = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&[(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma]\cos\theta\\ &= (x-a)\cos\alpha' + (y-b)\cos\beta' + (z-c)\cos\gamma'.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Semblablement, le plan A'C'C est représenté par

$$\left.\begin{aligned}&[(x-a')\cos\alpha' + (y-b')\cos\beta' + (z-c')\cos\gamma']\cos\theta\\ &= (x-a')\cos\alpha + (y-b')\cos\beta + (z-c')\cos\gamma.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Les équations (5), (6) sont celles qu'il s'agissait d'obtenir.

EXERCICES.

I. Les coordonnées étant obliques :

1°. Exprimer qu'une droite et un plan sont perpendiculaires.

2°. Déterminer l'angle de deux plans.

3°. Exprimer que deux plans sont perpendiculaires.

4°. Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.

II. Trouver les équations de la bissectrice de l'angle formé par deux droites données.

Résultat : Les équations des droites étant

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}, \quad \frac{x}{\cos\alpha'} = \frac{y}{\cos\beta'} = \frac{z}{\cos\gamma'},$$

la bissectrice est représentée par

$$\frac{x}{\cos\alpha + \cos\alpha'} = \frac{y}{\cos\beta + \cos\beta'} = \frac{z}{\cos\gamma + \cos\gamma'}.$$

III. Lieu des points également distants de deux droites qui se coupent.

IV. Lieu des points également distants de deux droites non situées dans un même plan.

Équation du lieu: $xy = mz.$

V. Lieu d'une droite qui rencontre, sous deux angles égaux, deux droites données, non situées dans un même plan.

Équation du lieu: $xy = mz.$

VI. Lieu décrit par l'arête d'un angle dièdre droit, dont les faces passent respectivement par deux droites données.

Équation du lieu: $a^2x^2 - y^2 + (a^2 - 1)z^2 = (a^2 - 1)b^2.$

VII. Lieu des points tels, que la distance de chacun d'eux à un point quelconque d'une ellipse donnée, soit une fonction entière et du premier degré des coordonnées de ce dernier point.

Résultat: L'ellipse donnée ayant pour équations

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad z = 0,$$

le lieu est l'hyperbole représentée par

$$(a^2 - b^2)z^2 - a^2x^2 = -a^2(a^2 - b^2), \quad y = 0.$$

VIII. Former les équations d'une droite qui rencontre, sous les angles φ, φ', deux droites ayant pour équations

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma},$$

$$\frac{-a'}{\cos\alpha'} = \frac{y-b'}{\cos\beta'} = \frac{z-c'}{\cos\gamma'}.$$

Résultat: θ étant l'angle des deux droites données, on trouve les deux équations

$$(l\cos\theta - m)^2$$
$$= [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - l^2](\cos\theta\cos\varphi - \cos\varphi')^2,$$
$$(l'\cos\theta - m')^2$$
$$= [(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 - l'^2](\cos\theta\cos\varphi' - \cos\varphi)^2,$$

dans lesquelles

$$l = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma,$$
$$l' = (x-a')\cos\alpha' + (y-b')\cos\beta' + (z-c')\cos\gamma';$$
$$m = (x-a)\cos\alpha' + (y-b)\cos\beta' + (z-c)\cos\gamma',$$
$$m' = (x-a')\cos\alpha + (y-b')\cos\beta + (z-c')\cos\gamma.$$

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

59. Première transformation. — *Transporter les axes parallèlement à eux-mêmes.*

Les principes dont nous avons fait usage dans la *Géométrie analytique à deux dimensions* (88) donnent, pour les formules cherchées,

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c;$$

a, b, c représentant les coordonnées de la nouvelle origine.

60. Deuxième transformation. — *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un système quelconque d'axes, de même origine que le premier.*

Soient x, y, z les coordonnées *rectangulaires* d'un point quelconque M; soient x', y', z' les coordonnées de ce point, relativement à trois axes quelconques Ox', Oy', Oz' passant par la première origine. Si nous projetons sur Ox le contour polygonal OR'P'M et la droite OM qui le ferme, nous aurons

$$\text{OR} = \text{OR}'\cos x'\text{O}x + \text{R}'\text{P}'\cos y'\text{O}x + \text{P}'\text{M}\cos z'\text{O}x,$$

ou

$$x = x'\cos(x', x) + y'\cos(y', x) + z'\cos(z', x).$$

Un simple changement de lettres donne ensuite

$$y = x'\cos(x',y) + y'\cos(y',y) + z'\cos(z',y),$$
$$z = x'\cos(x',z) + y'\cos(y',z) + z'\cos(z',z).$$

Pour abréger, on écrit ainsi ces formules :

$$\left.\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz', \\ y &= a'x' + b'y' + c'z', \\ z &= a''x' + b''y' + c''z'; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

mais on fait attention que, les droites Ox, Oy, Oz étant rectangulaires, les neuf cosinus désignés par a, b, c, a', b' c', a'', b'', c'' doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

61. Troisième transformation. — *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires, ayant même origine.*

Il suffit évidemment, pour résoudre cette question, d'employer les formules (1), en y joignant de nouvelles équations de condition, propres à exprimer que les nouveaux axes sont rectangulaires. Ces équations sont (27) :

$$\left.\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

62. Remarques. — I. Lorsque les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, les neufs quantités a, b, c,... devant satisfaire aux *six* équations (2), (3), il en reste *trois* dont on peut disposer arbitrairement ; mais de manière, cependant, qu'il en résulte des valeurs réelles pour les six autres.

II. Si l'on ajoute les équations (1) après les avoir multipliées, respectivement, par a, a', a'', par b, b', b'', par c, c', c'', on trouve

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z, \\ y' &= bx + b'y + b''z, \\ z' &= cx + c'y + c''z. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

III. On aurait pu obtenir, sans aucun calcul, ces dernières valeurs; car les deux systèmes d'axes étant rectangulaires, les nouvelles coordonnées doivent se déduire des anciennes, absolument comme celles-ci ont été déduites des autres.

IV. De la dernière remarque, on conclut que les quantités a, b, c,... doivent satisfaire aux *six* nouvelles relations

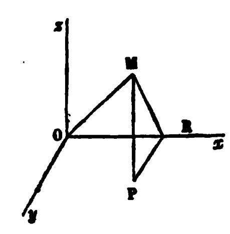
$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=1,\\ a'^2+b'^2+c'^2&=1,\\ a''^2+b''^2+c''^2&=1,\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned} aa'+bb'+cc'&=0,\\ a'a''+b'b''+c'c''&=0,\\ a''a+b''b+c''c&=0,\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

analogues aux équations (2) et (3).

63. Quatrième transformation. — *Passer d'un systeme de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées polaires.*

Prenant l'origine pour pôle et Ox pour axe polaire, nous aurons, dans les deux triangles *rectangles* ORM, MPR,



$$\text{OR} = \text{OM}\cos \text{MO}x,\quad \text{MR} = \text{OM}\sin \text{MO}x,$$
$$\text{RP} = \text{MR}\cos \text{MRP},\quad \text{MP} = \text{MR}\sin \text{MRP},$$

c'est-à-dire, en conservant les notations du n° 14:

$$x = u\cos\theta,$$
$$y = u\sin\theta\cos\psi,$$
$$z = u\sin\theta\sin\psi:$$

telles sont les formules cherchées.

Applications de la transformation des coordonnées.

64. Théorème I. — *Un changement de coordonnées rectilignes ne change pas le degré de l'équation d'une surface algébrique* (*D.D.*, 94).

65. Théorème II. — *Une surface d'ordre m ne peut être rencontrée en plus de m points par une droite* (*D. D.*, 98).

66. Théorème III. — *Une surface d'ordre m ne peut être coupée par un plan suivant une ligne d'un ordre supérieur à m.*

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface, équation que l'on suppose de degré m. Si l'on rapporte cette surface à de nouveaux axes, en prenant pour plan des $x'y'$ le plan sécant, on obtiendra une équation $F(x', y', z') = 0$, dont le degré sera m (64). La section faite par le plan donné sera représentée par cette dernière équation, jointe à $z' = 0$; donc, etc.

67. Problème I. — *Exprimer la distance de deux points, en fonction de leurs coordonnées obliques.*

Cherchons d'abord la distance δ d'un point quelconque M à l'origine des coordonnées. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de ce point, x', y', z' étant ses coordonnées obliques. Nous aurons

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

ou, en substituant pour x, y, z, leurs valeurs (60) :

$$\begin{aligned}\delta^2 = {} & x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ & + 2(ab + a'b' + a''b'')x'y' \\ & + 2(bc + b'c' + b''c'')y'z' \\ & + 2(ca + c'a' + c''a'')z'x'.\end{aligned}$$

Mais (61)

$$ab + a'b' + a''b'' = \cos(x', y'),$$
$$bc + b'c' + b''c'' = \cos(y', z'), \text{ etc.};$$

donc

$$\begin{aligned}\delta^2 = {} & x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ & + 2x'y'\cos(x', y') + 2y'z'\cos(y', z') + 2z'x'\cos(z', x').\end{aligned}$$

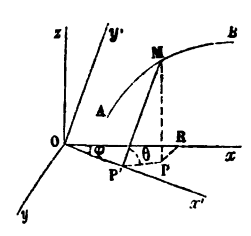
Pour passer au cas général, il suffit de supposer que les axes soient transportés parallèlement à eux-mêmes, de manière que les coordonnées du point O soient x'', y'', z'' : les quantités x', y', z', qui entrent dans la formule précédente, devront être remplacées par $x' - x''$, $y' - y''$, $z' - z''$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta^2 = {} & (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 \\ & + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos(x', y') \\ & + 2(y' - y'')(z' - z'')\cos(y', z') \\ & + 2(z' - z'')(x' - x'')\cos(z', x').\end{aligned}$$

68. Problème II. — *Déterminer la section d'une surface par un plan.*

Soient $F(x, y, z) = 0$, (1) $\quad Ax + By + Cz = 0$ (2)

les équations de la surface et du plan, en supposant, pour plus de simplicité, que celui-ci passe par l'origine. Si l'on éliminait z entre ces deux équations, on obtiendrait une équation $\varphi(x, y) = 0$ représentant, non la section AMB, mais sa projection sur le plan des xy (38). Pour obtenir cette section en *vraie grandeur*, on doit donc la rapporter à deux axes situés dans son plan. Nous prendrons, pour l'un de ces axes, la *trace* Ox' du plan sécant sur le plan des xy, l'autre axe Oy' étant perpendiculaire au premier.



Cela posé, soient OR, RP, PM les coordonnées d'un point quelconque M de la section, relativement aux trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et OP', P'M ses coordonnées par rapport à Ox', Oy'.

La projection P'P de PM étant perpendiculaire à P'M, l'angle MP'P mesure l'inclinaison du plan sécant sur le plan yOx. Par suite, en appelant φ l'angle xOx', nous aurons

$$\begin{aligned} OR &= OP' \cos\varphi + P'M \cos\theta \sin\varphi, \\ RP &= OP' \sin\varphi - P'M \cos\theta \cos\varphi, \\ PM &= P'M \sin\theta, \end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi + y' \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= x' \sin\varphi - y' \cos\varphi \cos\theta, \\ z &= y' \sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

69. *Remarque*. — Pour appliquer ces formules, on devra connaître les angles φ et θ. Or, en faisant $z = 0$ dans l'équation (2), on obtient

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi = -\frac{A}{B}, \quad \sin\varphi = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

et, d'un autre côté (47),

$$\cos\theta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}}.$$

EXERCICES.

I. Résoudre les équations

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+a'^2+a''^2=1, & ab+a'b'+a''b''=0, \\ b^2+b'^2+b''^2=1, & bc+b'c'+b''c''=0, \\ c^2+c'^2+c''^2=1, & ca+c'a'+c''a''=0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

par rapport aux quantités a'', b', b'', c, c', c''.

Résultat : En posant

$$a=\cos\theta,$$
$$a'=\sin\theta\sin\psi,$$
$$b=-\sin\theta\sin\varphi;$$

on trouve

$$a''=\sin\theta\cos\psi,$$
$$b'=\cos\theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi,$$
$$b''=\cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\cos\psi,$$
$$c=-\sin\theta\cos\varphi,$$
$$c'=\cos\theta\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi,$$
$$c''=\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\cos\psi \quad (*).$$

II. *Théorème.* — Si neuf quantités satisfont aux *six* équations (1), elles satisfont également : 1° aux *six* équations

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+b^2+c^2=1, & aa'+bb'+cc'=0, \\ a'^2+b'^2+c'^2=1, & a'a''+b'b''+c'c''=0, \\ a''^2+b''^2+c''^2=1, & a''a+b''b+c''c=0; \end{array}\right\} \quad (2)$$

2° aux *dix* équations

$$\left.\begin{array}{lll} b'c''-c'b''=\pm a, & c'a''-a'c''=\pm b, & c''a-a''c=\pm c, \\ b''c-c''b=\pm a', & c''a-a''c=\pm b', & a''b-b''a=\pm c', \\ bc'-cb'=\pm a'', & ca'-ac'=\pm b'', & b''c-c''b=\pm c'', \\ \multicolumn{3}{c}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=\pm 1;} \end{array}\right\} \quad (3)$$

3° à l'équation

$$a^2a'^2a''^2+b^2b'^2b''^2+c^2c'^2c''^2=a^2b^2c^2+a'^2b'^2c'^2+a''^2b''^2c''^2; \quad (4)$$

(*) Ces formules, très-utiles dans la Mécanique rationnelle, sont connues sous le nom de *formules d'Euler*.

4° à l'équation

$$15m^2+(r-s)^2+(r'-s')^2+(r''-s'')^2+4pq=0, \quad (5)$$

dans laquelle $m^2=a^2a'^2a''^2+b^2b'^2b''^2+c^2c'^2c''^2$,

$$p=ab'c''+a'b''c+a''bc', \quad q=ab''c'+a'bc''+a''b'c,$$
$$r=ab'b''+a'b''b+a''bb', \quad s=ac'a''+a'c''c+a''cc',$$
$$r'=bc'c''+b'c''c+b''cc', \quad s'=ba'a''+b'a''a+b''aa',$$
$$r''=ca'a''+c'a''a+c''aa', \quad s''=cb'b''+c'b''b+c''bb'. \ (*)$$

III. Les coordonnées étant obliques :

1°. Trouver la distance d'un point donné à un plan donné;

2°. Trouver la distance d'un point donné à une droite donnée;

3°. Déterminer, en grandeur, la plus courte distance de deux droites (**).

CHAPITRE V.

DU CENTRE DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE.

70. L'équation la plus générale du second degré, entre les trois variables x, y, z, étant

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy \\ +2Cx+2C'y+2C''z+D=0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

examinons si la surface qu'elle représente peut avoir un *centre*, c'est-à-dire *un point tel, que les points de la surface soient, deux à deux, symétriquement placés par rapport à ce point* (*D. D.*, 187). A cet effet, changeons x, y, z en $x+a$, $y+b$, $z+c$ (*D. D.*, 196), et cherchons à déterminer les coordonnées a, b, c de la nouvelle origine, de manière à faire disparaître les termes du premier degré

(*) Les relations (4) et (5) sont dues à l'illustre Jacobi.

(**) On résout aisément les trois derniers problèmes en exprimant que la distance cherchée est un minimum.

(*D. D.*, 190). Nous obtiendrons ainsi les équations de condition :

$$\left.\begin{aligned}&Aa + B'c + B''b + C = 0,\\ &A'b + B''a + Bc + C' = 0,\\ &A''c + Bb + B'a + C'' = 0\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dont *les premiers membres sont*, à un facteur près, *les dérivées* PARTIELLES *de $f(x, y, z)$, dans lesquelles on remplace x, y, z par a, b, c* (*D. D.*, 196). En même temps, nous aurons, au lieu de (1), l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + D' = 0, \quad (3)$$

dans laquelle

$$\left.\begin{aligned}D' = {} & Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab\\ & + 2Ca + 2C'b + 2C''c + D.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

71. *Discussion :* 1°. Lorsqu'on peut satisfaire aux *équations du centre* par des valeurs de a, b, c, *finies et déterminées*, la surface admet *un centre unique*, et la réduction à la forme (3) est possible d'une seule manière. De plus, si l'on ajoute membre à membre les équations (4) et (2), après avoir multiplié les trois dernières par a, b, c, on trouve

$$D' = Ca + C'b + C''c + D \quad (5).$$

Ainsi *le terme indépendant des variables, dans l'équation transformée, se compose du terme indépendant primitif, augmenté de la demi-somme des termes du premier degré, etc.* (*D. D.*, 200).

2°. Lorsque les équations (2) sont *incompatibles*, la surface est *dépourvue de centre*.

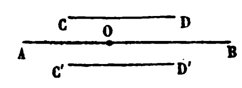
3°. Si le système (2) se réduit à *deux équations* distinctes, la surface a *une infinité de centres, dont le lieu est la droite* représentée par deux quelconques des équations (2) (*).

4°. Enfin, si les équations (2) se réduisent à *une seule équation*, la surface admet *une infinité de centres*, *ayant pour lieu le plan* représenté par cette équation.

(*) Les coordonnées a, b, c étant regardées comme des variables, chacune des équations (2) représente un plan. Dans le cas que nous considérons, les trois plans se coupent suivant une même droite, *lieu des centres*.

72. Dans le cas où *le lieu des centres* est *une droite* AB, l'équation (1) représente un *cylindre elliptique* ou *hyperbolique*, ayant pour variétés : *une droite, un lieu imaginaire,* ou *deux plans non parallèles.*

En effet, tout plan passant par AB coupe la surface suivant une ligne du second ordre (66) qui admet évidemment pour centres tous les points de AB; cette ligne se réduit donc au système de deux parallèles CD, C'D', situées à égales distances de AB; et, par conséquent, la surface est un cylindre ayant AB pour *axe* de figure. Mais, d'un autre côté, tout plan qui rencontre AB en un point O coupe la surface suivant une ligne ayant le point O pour centre; etc.



73. On voit, avec la même facilité, que *si le lieu des centres est un plan*, l'équation (1) représente *deux plans parallèles*, ou *deux plans confondus en un seul*, ou *un lieu imaginaire.*

74. *Remarques.* — I. Dans les deux derniers cas, l'équation (1) peut, d'une infinité de manières, être réduite à la forme (3).

II. Pour qu'il y ait *un centre unique,* il faut et il suffit que le *déterminant* du système (2) soit *différent de zéro.* Ce déterminant a pour valeur

$$\Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 \quad (*).$$

(*) Si l'on dispose ainsi les coefficients A, A', A'', B, B', B'':

$$\begin{matrix} A, & A', & A'', \\ B, & B', & B'', \\ B, & B', & B'', \end{matrix}$$

on voit que le déterminant est égal à la somme des produits des termes contenus dans les colonnes horizontales, moins la somme des produits des termes contenus dans les colonnes verticales. Ce procédé mnémotechnique a été indiqué par MM. Sonnet et Frontera.

EXERCICES.

I. Appliquer la théorie du centre aux surfaces représentées par les équations suivantes :

$$x^2+y^2+z^2-4yz+2zx-2xy+2x-4y-4z+1=0,$$
$$2(x-y-z)-(3x-y+4z)^2=0,$$
$$(x-y+z)^2+(3x-y+5z)^2=1.$$

II. Déterminer le centre de la surface qui a pour équation

$$x^3+y^3+z^3-xyz+3x^2-3y^2+3z^2$$
$$-yz+zx-xy+4x+2y+4z+2=0.$$

III. Trouver *les centres* de la surface dont l'équation est

$$\cos x+\cos y+\cos z=1.$$

IV. Trouver *les centres* de la courbe à double courbure représentée par les équations

$$x^2=\cos z,\quad y=\sin z.$$

V. L'hélice a-t-elle un centre?

VI. *Théorème.* — Si l'on désigne par x', x'', y', y'', z', z'' les distances comprises entre le sommet d'un angle trièdre trirectangle et les points où les arêtes de ce trièdre rencontrent une surface du second ordre, la fonction

$$\frac{(x'+x'')^2}{x'^2+x''^2}+\frac{(y'+y'')^2}{y'^2+y''^2}+\frac{(z'+z'')^2}{z'^2+z''^2}$$

est invariable, quelle que soit la position de l'angle trièdre. (*Théorème de M. Steiner.*)

CHAPITRE VI.

DES PLANS DIAMÉTRAUX ET DES PLANS PRINCIPAUX.

Équation générale des plans diamétraux.

75. Cherchons le lieu géométrique des milieux d'une série de ...ites parallèles à une direction donnée, et terminées à la sur-

face du second ordre ayant pour équation

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ \quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Soient $\qquad x = mz + \alpha, \quad y = nz + \beta \quad (2)$

les équations d'une de ces droites. En portant ces valeurs de x et de y dans l'équation (1), nous obtiendrons une équation de la forme

$$Rz^2 + 2Sz + T = 0, \quad (3)$$

dont les racines représenteront les *ordonnées* des points où la surface est rencontrée par la droite dont il s'agit, c'est-à-dire les ordonnées des extrémités de la *corde* déterminée par cette droite. Par suite (*D. D.*, 178) : 1° l'ordonnée du point milieu de la corde a pour valeur la racine de l'équation

$$Rz + S = 0, \quad (4)$$

dérivée de (3); 2° la *surface diamétrale* cherchée a pour équation

$$mf'_x + nf'_y + f'_z = 0, \quad (5)$$

ou

$$\begin{array}{l} (Ax + B'z + B''y + C)m \\ + (A'y + Bz + B''x + C')n \\ + A''z + By + B'x + C'' = 0, \end{array}$$

ou encore

$$\left.\begin{array}{l} (Am + B''n + B')x + (B''m + A'n + B)y \\ + (B'm + Bn + A'')z + Cm + C'n + C'' = 0. \end{array}\right\} \quad (6)$$

76. Remarques. — I. *Dans toute surface du second ordre, les surfaces diamétrales sont des plans.*

II. L'équation (5) étant une conséquence des équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

qui représentent le centre (70), il s'ensuit que *tous les plans diamétraux passent par le centre, ou par le lieu des centres.* De plus, *chacune des équations du centre représente un plan diamétral.*

III. Si les trois équations du centre se réduisent à $f'_x = 0$, l'équation (5) est vérifiée, quelles que soient les valeurs de m et de n.

Dans ce cas, *tous les plans diamétraux coïncident avec le lieu des centres*. Ce résultat du calcul est évident à priori; car la surface se compose de deux plans parallèles (73).

IV. Le plan diamétral, représenté généralement par l'équation (6), cessera d'exister si l'on a

$$Am + B''n + B' = 0, \quad A'n + B + B''m = 0,$$

$$A''n + B'm + Bn = 0, \quad Cm + C'n + C'' \gtrless 0.$$

Les trois premières relations expriment que la droite représentée par les équations (2), au lieu d'intercepter une corde sur la surface, rencontre celle-ci en un seul point : en effet, ces équations donnent

$$(Am + B''n + B')m + (A'n + B + B''m)n + A'' + B'm + Bn = 0,$$

ou $$Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn = 0,$$

ou $$R = 0.$$

V. On reconnaît, avec la même facilité, que si l'on a

$$Am + B''n + B' = 0, \quad A'n + B + B''m = 0,$$
$$A'' + B'm + Bn = 0, \quad Cm + C'n + C'' = 0,$$

auquel cas l'équation (6) devient identique, il en résulte

$$R = 0, \quad S = 0 \ (*).$$

D'après l'équation (3), ces deux dernières relations sont vérifiées dans deux cas : 1° lorsque la droite représentée par les équations (2) ne rencontre pas la surface; 2° lorsque cette droite est tout entière sur la surface.

VI. Si les coordonnées sont rectangulaires, et que a, b, c représentent les cosinus des angles formés avec les axes par la direction commune des cordes, l'équation (6) peut être remplacée par

$$\left.\begin{aligned}(Aa + B''b + B'c)x + (A'b + Bc + B''a)y\\ + (A''c + B'a + Bb)z + Ca + C'b + C''c = 0.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

(*) La fonction S a pour valeur

$$Am\alpha + A'n\beta + B\beta + B'\alpha + B''(m\beta + n\alpha) + Cm + C'n + C''$$

ou $$(Am + B''n + B')\alpha + (A'n + B + B''m)\beta + Cm + C'n + C''.$$

Des plans principaux.

77. Lorsqu'un plan diamétral est perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales, on lui donne le nom de *plan principal*. Afin de chercher si les surfaces du second ordre admettent des plans principaux, supposons les axes rectangulaires, et reprenons l'équation (7), qui représente le plan diamétral *conjugué* aux cordes parallèles à la direction déterminée par

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}. \quad (8)$$

Ce plan sera principal si les cosinus a, b, c satisfont aux relations

$$\frac{Aa+B''b+B'c}{a}=\frac{A'b+Bc+B''a}{b}=\frac{A''c+B'a+Bb}{c}. \quad (9)$$

En représentant par s la valeur commune de ces rapports, on peut remplacer les *deux* équations (9) par les *trois* équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}(A-s)a+B''b+B'c&=0,\\(A'-s)b+Bc+B''a&=0,\\(A''-s)c+B'a+Bb&=0.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

On conclut, des deux premières,

$$\frac{a}{c}=\frac{-B'(A'-s)+BB''}{(A-s)(A'-s)-B''^2},\quad \frac{b}{c}=\frac{-B(A-s)+B'B''}{(A-s)(A'-s)-B''^2};\quad(11)$$

puis, par la substitution dans la troisième,

$$\begin{gathered}(A-s)(A'-s)(A''-s)+2BB'B''\\-(A-s)B^2-(A'-s)B'^2-(A''-s)B''^2=0\ (*),\end{gathered}$$

(*) En comparant le premier membre à la valeur de Δ (74), on voit qu'il est égal au *déterminant* des quantités

$$\begin{array}{ccc}(A-s), & B'', & B',\\ B'', & (A'-s), & B,\\ B', & B, & (A''-s).\end{array}$$

C'est ce qu'il était facile de prévoir ; car les cosinus a, b, c ne pouvant être nuls tous trois, il faut, pour que les équations (10) soient compatibles, que ce déterminant soit égal à zéro.

ou $$s^3 - Ms^2 - Ns - \Delta = 0, \quad (12)$$

en posant, pour abréger :

$$M = A + A' + A'',$$
$$N = B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A + B''^2 - AA',$$
$$\Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

78. L'équation *caractéristique* (12), étant du troisième degré, a au moins une racine réelle, dont la substitution, dans les formules (11), donnera des valeurs réelles pour a, b, c (*). Si ces valeurs, substituées à leur tour dans l'équation (7), n'annulent pas les coefficients de x, de y et de z, cette équation représentera un plan principal, et l'on sera en droit d'affirmer que, *dans toute surface du second ordre, il existe au moins un plan principal*. Quoi qu'il en soit, le calcul précédent démontre l'existence d'un système de *droites principales* (**) dont la direction satisfait aux équations (10), et ce résultat suffit à l'objet que nous avons en vue.

79. *Remarque*. — A cause des relations (10), on peut écrire ainsi *l'équation du plan principal* :

$$(ax + by + cz)s + Ca + C'b + C''c = 0. \quad (9)$$

(*) On ne doit pas oublier que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. En outre, les formules (11) donnant

$$\frac{a}{-B'(A'-s) + BB''} = \frac{b}{-B(A-s) + B'B''}$$

ou
$$\frac{a}{\dfrac{1}{-B(A-s)+B'B''}} = \frac{b}{\dfrac{1}{-B'(A'-s)+BB''}},$$

on en conclut, à cause de la symétrie des équations (10),

$$\frac{a}{\dfrac{1}{-B(A-s)+B'B''}} = \frac{b}{\dfrac{1}{-B'(A'-s)+B''B}} = \frac{c}{\dfrac{1}{-B''(A''-s)+BB'}}.$$

Ces dernières relations deviendraient illusoires si l'on avait, à la fois,

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0.$$

(**) Nous employons cette dénomination pour éviter toute difficulté.

EXERCICES.

I. *Théorème.* — 1° L'équation caractéristique (12) a toujours ses trois racines réelles; 2° parmi ces trois racines, il y en a au moins une différente de zéro.

II. *Théorème* — Les droites principales qui correspondent à deux valeurs différentes de s sont perpendiculaires entre elles.

III. Déterminer les trois systèmes de cordes principales et les trois plans principaux de la surface représentée par

$$2x^2+4y^2-z^2+4yz-4zx-8xy+2x+4y+2z=0.$$

Résultats :

1°. $s^3-5s^2-22s-16=0,\quad s=-1,\quad s'=8,\quad s''=-2;$

2°.
$$\frac{a}{2}=\frac{b}{2}=\frac{c}{-1}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{a'}{4}=\frac{b'}{-5}=\frac{c'}{-2}=\frac{1}{\sqrt{45}},$$
$$\frac{a''}{1}=\frac{b''}{0}=\frac{c''}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

3°.
$$-(2x+2y-z)+5=0,$$
$$8(4x-5y-2z)-8=0,$$
$$-2(x+2z)+3=0.$$

CHAPITRE VII.

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ.

Disparition des rectangles.

80. Si l'on prend pour axe des z une *droite principale*, les équations (10) du n° 77 devront être vérifiées par $a=0$, $b=0$, $c=1$; ce qui exige que

$$B=0,\quad B'=0,\quad s=A''.$$

Ainsi, *lorsque l'axe des z est une droite principale, l'équation de la surface ne contient aucun des deux rectangles xz, yz; en sorte qu'elle prend la forme*

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \quad (1)$$

En même temps, l'une des valeurs de s est égale à A'' (*).

81. Pour que le terme en xy disparaisse, faisons tourner les axes des x et des y dans leur plan, en les laissant rectangulaires, c'est-à-dire employons les formules

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$
$$\tang 2\alpha = \frac{2B''}{A - A'} \ (D.\ D., 201);$$

et nous obtiendrons une équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + 2Qx + 2Q'y + 2Q''z + R = 0, \quad (2)$$

qui renferme encore *toutes les surfaces du second ordre, avec leurs variétés* (**).

Réduction aux deux formes principales.

82. Les équations qui déterminent le centre de la surface (2) sont (70)

$$Px_1 + Q = 0, \quad P'y_1 + Q' = 0, \quad P''z_1 + Q'' = 0.$$

Lorsque les coefficients P, P', P'' sont tous différents de zéro, ces équations donnent des valeurs finies et déterminées pour x_1, y_1, z_1, en sorte que *la surface a un centre unique*. Dans ce cas,

(*) Les valeurs des deux autres racines, données par la formule

$$s = \tfrac{1}{2}\left[A + A' \pm \sqrt{(A - A')^2 + B''^2}\right],$$

sont évidemment réelles. Il n'est pas difficile de conclure de là que, *dans tous les cas, l'équation* (**12**) *a ses trois racines réelles*. La discussion complète de cette équation est une question fort intéressante, que nous sommes obligé de passer sous silence.

(**) On a (*D. D.*, 204)

$$P + P' = A + A', \quad P - P' = \sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}, \quad P'' = A'',$$
$$Q = C\cos\alpha + C'\sin\alpha, \quad Q' = -C\sin\alpha + C'\cos\alpha, \quad Q'' = C'', \quad R = D.$$

transportons les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière à prendre le centre pour origine; nous obtiendrons une équation

$$Px^2+P'y^2+P''z^2=H, \quad (A)$$

qui représente une *première classe* de surfaces du second ordre (*).

83. Si un seul des coefficients P, P', P'' est nul, et que le terme tout connu qui lui correspond soit différent de zéro, la surface n'a pas de centre, et la transformation précédente n'est plus possible. Mais on peut disposer de la nouvelle origine de manière à faire disparaître le terme indépendant et deux des termes du premier degré.

Soient, par exemple, $P=0, \quad Q \gtrless 0.$

Si l'on change x, y, z en $x+x_1$, $y+y_1$, $z+z_1$, on déterminera x_1, y_1, z_1 par les équations

$$P'y_1^2+P''z_1^2+2Qx_1+2Q'y_1+2Q''z_1+R=0 \text{ (**)},$$
$$P'y_1+Q'=0, \quad P''z_1+Q''=0;$$

et les surfaces de la *seconde classe* seront représentées par

$$P'y^2+P''z^2+2Qx=0. \quad (B)$$

84. Supposons $P=0, \quad Q=0.$

Alors l'équation (2) devenant

$$P'y^2+P''z^2+2Q'y+2Q''z+R=0,$$

représente évidemment un *cylindre elliptique ou hyperbolique*. Cette surface ne constitue pas une nouvelle classe; car elle peut être donnée par l'équation (A), dans laquelle on supposerait $P=0$.

85. Si l'équation (2) ne contient ni x^2 ni y^2, elle se réduit à

$$P''z^2+2Qx+2Q'y+2Q''z+R=0.$$

En combinant cette dernière équation avec $z=h$, on obtient un

(*) $-H=Qx_1+Q'y_1+Q''z_1+R$ (71).

(**) Cette première équation, simplifiée au moyen des deux autres, se réduit à

$$2Qx_1+Q'y_1+Q''z_1+R=0.$$

résultat de la forme $Qx + Q'y + k = 0$. Par conséquent, la surface est *un cylindre*. Ce cylindre est *parabolique ;* car $y = 0$ donne $P''z + 2Qx + 2Q''z + R = 0$, équation d'une parabole. Ce genre particulier de surfaces rentre dans la *seconde classe ;* car l'équation (B), quand on suppose $P' = 0$, représente un cylindre parabolique.

86. On ne peut pas supposer $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$, attendu que l'équation (2) se réduirait au premier degré.

87. En résumé, toutes les surfaces du second ordre sont comprises dans les *deux classes* représentées par les équations (A) et (B). La première classe contient les *surfaces à centre unique* et les *surfaces qui ont une infinité de centres ;* la seconde classe (Q étant supposé différent de zéro) renferme les *surfaces dépourvues de centre.*

EXERCICES.

I. *Théorème.* — L'équation générale

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

étant réduite à la forme

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + 2Qx + 2Q'y + 2Q''z + R = 0,$$

les coefficients P, P', P'' ont pour valeurs les trois racines de l'équation caractéristique.

II. *Théorème.* — L'intersection de deux surfaces du second ordre, dont les plans principaux sont respectivement parallèles, est située sur une surface de révolution.

III. Rapporter, à son centre et à ses plans principaux, la surface représentée par

$$2x^2 + 4y^2 - z^2 + 4yz - 4xz - 8xy + 2x + 4y + 2z = 0 \text{ (page 43).}$$

Résultat : $$-x^2 + 8y^2 - 2z^2 + \frac{7}{2} = 0.$$

CHAPITRE VIII.

DISCUSSION DES SURFACES A CENTRE.

88. On a vu (82) que toutes ces surfaces sont comprises dans l'équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H. \quad (A)$$

Quelles que soient les valeurs des coefficients, *l'origine est un centre* (70). De plus, les axes étant rectangulaires, *les plans coordonnés sont des plans principaux.*

89. Pour simplifier la discussion, nous considérerons d'abord les cas dans lesquels l'équation (A) est *complète*. Comme le terme H peut toujours être supposé *positif*, ces cas sont au nombre de *quatre :*

1°. *Les trois carrés positifs ;*

2°. *Deux carrés positifs, un carré négatif ;*

3°. *Un carré positif, deux carrés négatifs ;*

4°. *Les trois carrés négatifs.*

Dans ce dernier cas, *l'équation* (A) *ne représente rien :* il nous reste donc à examiner les trois autres hypothèses.

Ellipsoïde.

90. En suivant la marche adoptée pour la discussion de l'ellipse (*D. D.*, 211), on trouve que : 1° la surface a *six sommets* A, A', B, B', C, C', déterminés par

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{H}{P}} = \pm a;$$

$$z = 0, \quad x = 0, \quad y = \pm\sqrt{\frac{H}{P'}} = \pm b;$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm\sqrt{\frac{H}{P''}} = \pm c.$$

2°. L'équation (A) peut être remplacée par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

3°. Les *traces* de la surface, sur les plans coordonnés, sont les ellipses ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}=1.$$

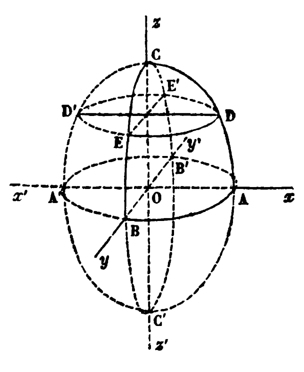
91. *Sections parallèles aux plans principaux.* — Si, dans l'équation (1), on fait $z=\gamma$, on obtient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Cette équation représente une *ellipse*, un *point*, ou un *lieu imaginaire*, suivant que γ est inférieur, égal ou supérieur à c. En excluant les deux dernières hypothèses, on peut donc dire que *les sections parallèles à un plan principal sont des ellipses*. De plus, *ces ellipses sont semblables*; car les demi-axes de chacune d'elles étant donnés par les formules

$$A=a\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{c^2}},\quad B=b\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{c^2}},$$

il s'ensuit que $$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}=\text{const.}$$



92. *Génération de la surface.* — Il résulte, de cette discussion, que *la surface peut être engendrée par une ellipse* DED'E', *toujours semblable à elle-même, dont les sommets* D, D' *s'appuieraient sur une ellipse directrice* ACA'C', *et dont le plan resterait constamment perpendiculaire à l'axe* CC' *de cette courbe.*

93. *Sections par des plans quelconques.* — En combinant l'équation (A) avec $z=mx+ny+p$, on obtient

$$(P+P''m^2)x^2+2P''mnxy+(P'+P''n^2)y^2+\ldots=H.$$

Le binôme B^2-4AC se réduit à $-4(PP'+PP''n^2+P'P''m^2)$, quantité essentiellement négative. Les projections des sections

planes et *ces sections* mêmes *sont* donc *des ellipses :* pour cette raison, la surface est appelée *ellipsoïde*.

94. *Cas particuliers de l'ellipsoïde.* — 1°. Lorsque deux des sections principales sont égales entre elles, la surface devient un *ellipsoïde de révolution* autour de l'axe perpendiculaire à la troisième section principale. Par exemple, si $a = b$, l'équation (1) se réduisant à

$$x^2 + y^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

il est évident que la surface peut être engendrée par la demi-ellipse CAC′ tournant autour de CC′. De plus, *tout plan passant par l'axe de rotation est un plan principal.*

2°. Si $a = b = c$, l'ellipsoïde se réduit à une *sphère*.

Hyperboloïde à une nappe.

95. *Sommets, axes, etc.* — Dans l'équation (A), supposons P, P′ positifs, P″ négatif; nous aurons, en mettant les signes en évidence,

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = H.$$

Opérant ensuite comme dans le cas de l'ellipsoïde, nous trouverons que :

1°. La surface a *quatre sommets réels* A, A′, B, B′ et *deux sommets imaginaires,* ayant pour coordonnées

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{H}{P}} = \pm a;$$

$$z = 0, \quad x = 0, \quad y = \pm\sqrt{\frac{H}{P'}} = \pm b;$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm\sqrt{\frac{H}{P''}} = \pm c\sqrt{-1}.$$

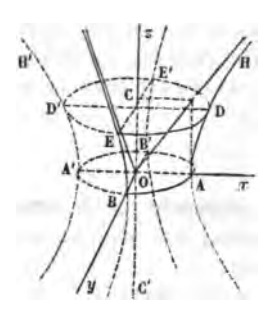
2°. L'équation (A) peut être réduite à

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2)$$

3°. Les sections principales sont l'ellipse et les hyperboles représentées par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

96. *Génération de la surface.* — Elle ne diffère de celle de l'ellipsoïde que par le changement de l'ellipse ACA'C' (92) en une *hyperbole directrice* AHA'H'. La surface est donc *indéfinie* et *continue :* on lui donne le nom d'*hyperboloïde à une nappe.*



97. *Sections par des plans quelconques.* — Changeant P″ en — P″, on obtient (93)

$$B^2 - 4AC = -4(PP' - PP''n^2 - P'P''m^2).$$

Cette quantité peut être *négative, nulle* et *positive ;* donc les sections planes de la surface peuvent être des *ellipses, des paraboles* et des *hyperboles.*

98. *Hyperboloïde de révolution.* — Si $b = a$, l'équation (2) représente un *hyperboloïde de révolution à une nappe,* engendré par la demi-hyperbole CAH tournant autour de son axe non transverse.

Hyperboloïde à deux nappes.

99. *Axes, sommets, etc.* — Supposons P positif, P′ et P″ négatifs; l'équation (A) deviendra

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = H,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3)$$

1°. La surface a seulement *deux sommets réels* A, A′, dont les coordonnées sont

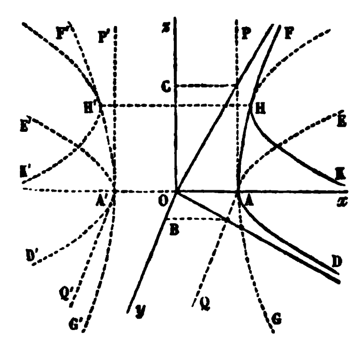
$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = \pm a.$$

2°. Les traces de la surface, sur les plans xOy, xOz, sont les deux hyperboles ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3°. Non-seulement le plan des yz ne coupe pas la surface, mais encore on n'obtient aucune section en donnant à x une valeur comprise entre $+a$ et $-a$. La surface est donc composée de deux

nappes séparées FAD, F′A′D′ : l'une est située à la droite du plan PAQ représenté par $x = a$, l'autre s'étend à la gauche du plan P′A′Q′, symétrique du premier relativement à l'origine. Comme d'ailleurs cette surface admet des sections hyperboliques, elle est convenablement désignée sous le nom d'*hyperboloïde à deux nappes*.



100. *Génération de la surface.* — En faisant $z = \gamma$ dans l'équation (3), on obtient

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2},$$

équation d'une hyperbole HKH′K′ *semblable* à l'hyperbole principale ADA′D′, et dont les sommets H, H′ sont situés sur la seconde hyperbole principale AFG... On passe donc du premier hyperboloïde au second, en changeant l'*ellipse génératrice* en une hyperbole.

101. *Hyperboloïde de révolution.* — Lorsque $b = c$, l'équation (3) devient

$$y^2 + z^2 = c^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

et l'on a un *hyperboloïde de révolution* autour de Ox. Si l'on veut conserver le mode de génération indiqué tout à l'heure, on doit prendre *l'hyperbole génératrice semblable à l'hyperbole directrice*.

102. *Remarque.* — On passe de l'équation (2) à l'équation (3), en changeant c en $c\sqrt{-1}$.

Cônes du deuxième degré.

103. Lorsque, dans l'équation (A), H = o, et qu'en même temps les coefficients P, P′, P″ sont différents de zéro, cette équation se réduit évidemment à l'une des deux formes suivantes :

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0, \quad (4) \qquad Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0. \quad (5)$$

1°. L'équation (4) se décompose en $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Elle représente donc *l'origine*.

2°. Dans l'équation (5), faisons $x = mz$, $y = nz$; nous obtiendrons, en supposant que z ne soit pas nul,

$$\mathrm{P}m^2 + \mathrm{P}'n^2 - \mathrm{P}'' = 0.$$

Par conséquent, la surface représentée par l'équation (5) est le lieu d'une droite qui passe par l'origine, et dont les *paramètres* m, n satisfont à la condition précédente. Cette surface est donc *un cône ayant pour centre l'origine* (*).

104. *Remarques.* — I. *Un point est une variété de l'ellipsoïde:* c'est un ellipsoïde dont les trois axes sont nuls (*D. D.*, 119, 211).

II. *Un cône du deuxième degré peut*, indifféremment, *être regardé comme une variété de l'hyperboloïde à une nappe, ou comme une variété de l'hyperboloïde à deux nappes:* c'est un hyperboloïde dans lequel les trois axes ont diminué jusqu'à zéro, en conservant des rapports constants (**).

Cylindre elliptique ou hyperbolique.

105. Dans l'équation (A), supposons toujours H positif, et annulons un ou deux des coefficients P, P', P''; nous obtiendrons les résultats suivants, qu'il suffit d'énoncer :

(*) Généralement, *toute équation homogène entre trois coordonnées rectilignes représente l'origine ou un cône ayant l'origine pour centre.*

(**) Si l'on prend, par exemple, l'équation de l'hyperboloïde à une nappe,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

qu'on y fasse $\frac{a}{c} = m$, $\frac{b}{c} = n$, elle se réduira, lorsque $c = 0$, à

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} - z^2 = 0.$$

Dans cette équation du cône, on peut, *pour la symétrie,* remettre $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ au lieu de m et de n, et l'on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

etc.

1°. $Px^2+P'y^2=H$: *cylindre droit, à base elliptique ;*

2°. $Px^2-P'y^2=H$: *cylindre droit, à base hyperbolique ;*

3°. $Px^2=H$: *deux plans parallèles ;*

4°. $-P'y^2=H$: *lieu imaginaire.*

106. De même, les équations (4) ou (5) donnent lieu aux variétés suivantes :

1°. $Px^2+P'y^2=0$: *une droite ;*

2°. $Px^2-P''z^2=0$: *deux plans qui se coupent ;*

3°. $Px^2=0$: *deux plans confondus en un seul.*

Cône asymptotique d'un hyperboloïde.

107. Prenons d'abord les équations

$$Px^2+P'y^2-P''z^2=H, \quad (1) \qquad Px^2+P'y^2-P''z^2=0 \quad (2)$$

qui représentent, respectivement, un hyperboloïde à une nappe et un cône (95, 102), et comparons les ordonnées des points qui ont même projection sur le plan des xy. En les supposant positives pour plus de simplicité, et en les représentant par z_1 et z_2, nous aurons :

$$1°. \quad z_1\sqrt{P''}=\sqrt{Px^2+P'y^2-H}, \quad z_2\sqrt{P''}=\sqrt{Px^2+P'y^2};$$

donc $z_1<z_2$: *l'hyperboloïde* (1) *est extérieur au cône* (2).

$$2°. \quad (z_2-z_1)\sqrt{P''}=\sqrt{Px^2+P'y^2}-\sqrt{Px^2+P'y^2-H}$$
$$=\frac{H}{\sqrt{Px^2+P'y^2}+\sqrt{Px^2+P'y^2-H}}.$$

Lorsque x et y augmentent indéfiniment, ou même lorsqu'une seule de ces variables croît au delà de toute limite, la fraction décroît indéfiniment. Il résulte de là que les deux surfaces tendent sans cesse à se rapprocher l'une de l'autre : pour cette raison, le cône est dit *asymptotique* à l'hyperboloïde.

108. La même discussion, appliquée aux équations

$$Px^2-P'y^2-P''z^2=H, \quad (3) \qquad Px^2-P'y^2-P''z^2=0, \quad (4)$$

montre que *l'hyperboloïde à deux nappes est intérieur à son cône asymptotique.*

EXERCICES.

I. *Théorème.* — 1° Les sections faites dans une surface du second ordre, par des plans parallèles, sont des courbes semblables et semblablement placées; 2° le lieu des centres de ces sections est un diamètre de la surface.

II. *Théorème.* — 1° Les sections faites par un même plan, dans un hyperboloïde et dans le cône asymptotique, sont deux courbes semblables et semblablement placées; 2° si ces sections sont des ellipses ou des hyperboles, elles sont concentriques.

III. *Théorème.* — Le cône asymptotique d'un hyperboloïde est le lieu des asymptotes des hyperboles que l'on obtient en coupant l'hyperboloïde par des plans passant en son centre.

IV. *Théorème.* — Toute surface à centre (non de révolution) admet deux séries de sections circulaires (*).

V. *Théorème.* — La courbe résultant de l'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles, est telle, que la somme des distances de chacun de ses points aux sommets des deux cônes, respectivement multipliées par des constantes, est une constante. Cette courbe, ainsi que les *ovales de Descartes*, admet un troisième foyer (**). (*Théorème de M. Chasles.*)

VI. Par le centre d'un ellipsoïde, on fait passer des plans qui déterminent des ellipses d'aire constante : quel est le lieu des perpendiculaires à ces plans, menées par le centre?

Réponse : Un cône du deuxième degré, dont les axes principaux coïncident, en direction, avec ceux de l'ellipsoïde.

VII. Trouver le lieu des foyers des sections faites dans un ellipsoïde, par des plans passant en son centre.

VIII. Étant donnés un cône du second ordre et un point dans son intérieur, mener un plan tel, que la section ait pour foyer le point donné.

(*) Ce théorème a été démontré pour le cône oblique, à base circulaire. (*D. D.*, 362.)

(**) Les deux premiers foyers sont les sommets des cônes donnés.

CHAPITRE IX.

DISCUSSION DES SURFACES DÉPOURVUES DE CENTRE.

109. Ces surfaces sont représentées (83) par l'équation

$$P'y^2 + P''z^2 + 2Qx = 0, \quad (B)$$

dans laquelle le coefficient de x est différent de zéro. Les axes étant supposés rectangulaires, il résulte, de l'inspection de cette équation, que *les plans zx et xy sont les seuls plans principaux de la surface* (*).

110. Sans rendre la discussion moins générale, on peut admettre que le coefficient Q est négatif : s'il était positif, on changerait x en $-x'$ (*D. D.*, 315). De même, on peut exclure le cas où les coefficients P, P' seraient tous deux négatifs. Cela posé, l'équation (B) aura nécessairement une des trois formes suivantes :

$$Py^2 + P'z^2 = 2Qx, \quad Py^2 - P'z^2 = 2Qx, \quad Py^2 = 2Qx.$$

Paraboloïde elliptique.

111. *Sections principales, axe, sommet, etc.* — Cette surface, représentée par l'équation

$$Py^2 + P'z^2 = 2Qx, \quad (1)$$

s'étend indéfiniment à la droite du plan des yz ; elle a pour *traces*, sur les deux *plans principaux* xOy, xOz, les *paraboles principales* AOA', BOB', respectivement représentées par

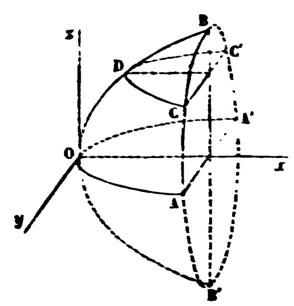
$$y^2 = \frac{2Qx}{P}, \quad z^2 = \frac{2Qx}{P'}.$$

(*) L'équation qui donne les directions des *droites principales* est

$$s^3 - (P' + P'')s^2 + P'P''s = 0.$$

Elle admet pour racines P', P'' et *zéro*. Les droites principales répondant à cette valeur nulle de s sont parallèles à l'axe des x (77) ; mais, comme chacune d'elles rencontre la surface en un seul point, elles ne déterminent pas de cordes ; etc.

Si l'on représente par $2p$ et $2p'$ les paramètres de ces *sections principales*, on pourra écrire ainsi l'équation (1):



$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p'}=2x. \quad (2)$$

L'intersection Ox des deux plans principaux est *l'axe du paraboloïde :* le point O, où il perce la surface, en est le *sommet.*

112. *Sections parallèles aux plans coordonnés.* — A l'inspection de l'équation (2), on reconnaît que : 1° *les sections parallèles au plan principal xOy sont des paraboles* CDC' *égales à la section principale* AOA'; 2° *les sections parallèles au plan principal xOz sont des paraboles égales à la section principale* BOB'; 3° *les sections perpendiculaires à l'axe sont des ellipses semblables, dont les sommets sont situés sur les paraboles principales.*

113. *Sections par des plans quelconques.* — Soit $z=mx+ny+q$ l'équation du plan sécant. Éliminant z, on trouve

$$(P+P'n^2)y^2+2P'mnxy+P'm^2+\ldots=0.$$

Le binôme caractéristique se réduit à $-PP'm^2$, quantité essentiellement négative, à moins que m ne soit nul. Par conséquent : 1° *les sections non parallèles à l'axe sont des ellipses ;* 2° *les sections parallèles à l'axe sont des paraboles.* De là, le nom de *paraboloïde elliptique.*

114. *Génération de la surface.* — Les sections perpendiculaires à l'axe étant des ellipses semblables (112, 3°), on pourrait adopter un mode de génération analogue à celui des surfaces à centre (92, 96, 100) ; mais il est bien plus simple de *faire mouvoir l'une des deux paraboles principales parallèlement à elle-même, de manière que son sommet parcoure l'autre parabole principale* (112, 1°). Cette génération remarquable accuse nettement la forme de la surface.

115. *Paraboloïde de révolution.* — Lorsque $p'=p$, l'équation (4) devenant

$$y^2+z^2=2px,$$

elle représente une surface de révolution autour de l'axe Ox, à section méridienne parabolique.

Paraboloïde hyperbolique.

116. *Sections principales, etc.* — L'équation

$$Py^2 - P'z^2 = 2Qx, \quad (3)$$

qui représente cette surface, peut être remplacée par

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x, \quad (4)$$

$2p$ et $2p'$ étant les paramètres des deux *paraboles principales* AOA', BOB'. Contrairement à ce qui a lieu dans le paraboloïde elliptique, ces deux paraboles ont leurs axes Ox, Ox' dirigés en sens contraires; d'où il résulte que la nouvelle surface s'étend de part et d'autre du plan yOz. L'*axe* xOx', intersection des deux plans principaux, rencontre encore la surface en son *sommet* O.

117. *Sections parallèles aux plans coordonnés.* — Les sections parallèles aux plans principaux sont, comme dans le cas du paraboloïde elliptique, égales aux paraboles principales; mais *les sections perpendiculaires à l'axe sont des hyperboles semblables, dont les sommets réels sont situés sur l'une ou sur l'autre des paraboles principales.*

En effet : 1° ces sections sont représentées par l'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2\alpha, \quad (5)$$

dans laquelle les coefficients p, p' sont constants; 2° suivant que la quantité α est positive ou négative, les sommets réels de l'hyperbole ont pour coordonnées

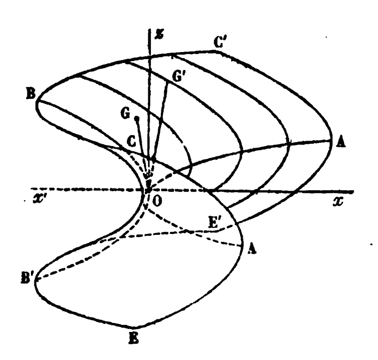
$$x = 0, \quad z = 0, \quad y = \pm\sqrt{2p\alpha},$$

ou

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm\sqrt{-2p'\alpha}.$$

118. Lorsque $\alpha = 0$, l'équation (5) donne $\frac{y}{z} = \pm\sqrt{\frac{p}{p'}}$. Par conséquent, le plan des yz coupe la surface suivant deux droites OG, OG', symétriques par rapport à Oz et par rapport à Oy.

119. *Remarque.* — Les asymptotes de toutes les sections parallèles au plan yOz se projettent suivant les droites OG, OG′ (*).



120. *Sections par des plans quelconques.* — En changeant P′ en — P′ dans le calcul du n° 113, on trouve que : 1° *les sections non parallèles à l'axe sont des hyperboles;* 2° *les sections parallèles à l'axe sont des paraboles* (**). La surface est donc convenablement appelée *paraboloïde hyperbolique.*

121. *Génération de la surface.* — Elle est toute semblable à celle du paraboloïde elliptique (114). Néanmoins, ces deux surfaces sont de natures complétement différentes. Si l'on veut, sans un *modèle en relief,* se rendre compte de la forme du paraboloïde hyperbolique, on remarquera que : 1° tous les points de cette surface se projettent, sur les plans des xy et des xz, *extérieurement* aux paraboles principales; 2° le contour de la surface, quand on la suppose limitée aux plans représentés par $y = \pm b$, $z = \pm c$, se compose des *quatre arcs paraboliques* CAE, C′A′E′, CBC′, EB′E′, ayant leurs sommets en A, A′, B, B′, etc.

Cylindre parabolique.

122. Cette surface, représentée par l'équation

$$Py^2 = 2Qx,$$

peut être regardée comme un cas particulier de chacun des deux paraboloïdes (110). Elle a un seul *plan principal,* qui est celui des zx.

(*) De là résulte que les plans GOx, G′Ox peuvent, *jusqu'à un certain point,* être considérés comme étant *asymptotiques.* Il ne faut pas oublier, cependant, qu'*ils coupent le paraboloïde* et que, dans la direction xOx', *ils s'en éloignent indéfiniment.*

(**) Sous-entendu : *ou des variétés de ces courbes.*

Résumé des deux derniers chapitres.

123. Une équation du deuxième degré, entre des coordonnées rectilignes, peut représenter *cinq genres* principaux de surfaces :

1er GENRE. *Ellipsoïde.* — Variétés : *point, lieu imaginaire, cylindre elliptique, droite, deux plans parallèles, deux plans confondus en un seul.*

2e GENRE. *Hyperboloïde à une nappe.* — Variétés : *Cône, cylindre hyperbolique, deux plans non parallèles.*

3e GENRE. *Hyperboloïde à deux nappes.*

4e GENRE. *Paraboloïde elliptique.* — Variété : *cylindre parabolique.*

5e GENRE. *Paraboloïde hyperbolique* (*).

EXERCICES.

I. *Théorème.* — Le paraboloïde elliptique (non de révolution) admet deux séries de sections circulaires.

II. *Théorème.* — 1°. Le paraboloïde elliptique peut être regardé comme la limite d'une série d'ellipsoïdes ou d'hyperboloïdes à deux nappes, dans lesquels deux sections principales auraient même sommet et même foyer. 2°. Le paraboloïde hyperbolique peut être regardé comme la limite d'une série d'hyperboloïdes à une nappe dans lesquels deux sections principales auraient même sommet et même foyer (*D. D.*, 319, 320).

III. *Théorème.* — Les droites qui rencontrent en un seul point la surface d'un paraboloïde sont parallèles à l'axe.

(*) Pour éviter un double emploi, nous n'avons cité qu'une seule fois les *variétés* qui appartiennent à plus d'un genre principal.

CHAPITRE X.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Hyperboloïde à une nappe.

124. THÉORÈME I. — *L'hyperboloïde à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes.*

Reprenons l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (1)$$

En la mettant sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2};$$

ou, ce qui est équivalent, sous celle-ci :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

on voit qu'elle est une conséquence des équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{A})$$

ou des équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right);\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{B})$$

λ et μ étant des *paramètres* arbitraires. D'ailleurs, les équations (A), étant du premier degré, représentent une infinité de droites; et il en est de même des équations (B); donc, etc.

125. REMARQUE. — *Les deux systèmes de génératrices sont es-*

sentiellement différents; c'est-à-dire que *les équations* (A) et (B) *ne peuvent représenter une même droite.* En effet, l'élimination de x et de z, entre les équations (A) et la première des équations (B), donne

$$\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

équation *non identique,* quels que soient λ et μ; donc les *trois* plans représentés par ces équations ne se coupent pas suivant une même droite; et il en est de même, à plus forte raison, pour les *quatre* plans (A), (B).

126. Théorème II. — *Deux génératrices d'un même système ne sont pas dans un même plan.*

Considérons, par exemple, avec la génératrice (A), une autre génératrice appartenant au même système que celle-ci. La seconde droite pourra être représentée par

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\lambda'\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda'}\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\}\quad (A')$$

pourvu que λ' soit différent de λ. Or, l'élimination des inconnues x, z, entre les équations (A), (A'), conduit aux deux équations incompatibles

$$1+\frac{y}{b}=0,\quad 1-\frac{y}{b}=0.$$

127. Théorème III. — *Deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan.*

Le calcul précédent, appliqué aux équations (A) et (B), donne

$$\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right)=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

équations qui rentrent l'une dans l'autre.

128. Remarques. — I. *Si* $\mu=-\lambda$, *les génératrices* (A) *et* (B) *sont parallèles.*

II. *Les génératrices des deux systèmes sont respectivement parallèles.*

129. Théorème IV. — *Par chaque point de l'hyperboloïde passent deux génératrices rectilignes.*

En effet, pour tout système de valeurs de x, y, z vérifiant l'équation (1), les équations (A) donneront une même valeur de λ, et les équations (B) une même valeur de μ.

130. Remarque. — *Par un point quelconque* M, *il ne passe que deux génératrices rectilignes* MA, MB.

Soit, s'il est possible, MC une troisième génératrice passant en M. Par différents points de cette droite, menons des génératrices du système (B) : elles rencontreront MA (127), et, par conséquent, elles seront dans le plan CAM; ce qui est impossible (126).

131. Théorème V. — *Les projections des génératrices, sur les plans des sections principales, sont tangentes à ces courbes.*

Considérons, par exemple, la section principale elliptique représentée par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (2)$$

Les équations d'une génératrice du système (A) étant

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

la projection de cette droite, sur le plan de l'ellipse, sera représentée par

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{y}{b}. \quad (3)$$

Les lignes (2) et (3) se toucheront, si l'élimination de x conduit à une équation dont les racines soient égales. Or, cette équation est

$$\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^2\frac{y^2}{b^2}+2\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{y}{b}+\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)=0,$$

ou

$$\left[\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{y}{b}+\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\right]^2=0;$$

donc, etc.

132. Théorème VI. — *Les génératrices de l'hyperboloïde sont parallèles aux génératrices du cône asymptotique.*

Le cône ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

une quelconque de ses génératrices peut être représentée par

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\theta\frac{y}{b},\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=-\frac{1}{\theta}\frac{y}{b}:$$

elle est donc parallèle, en même temps, à deux génératrices de l'hyperboloïde.

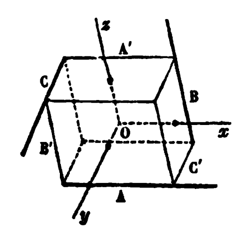
133. Corollaires. — I. *Trois génératrices d'un même système ne sont jamais parallèles à un même plan.*

En effet, ces trois droites sont respectivement parallèles à trois génératrices *distinctes* du cône asymptotique, et celles-ci ne sont pas dans un même plan.

II. *L'hyperboloïde à une nappe peut être engendré par une droite* G *qui s'appuierait sur trois génératrices* A, A′, A″ *d'un même système, prises comme directrices.*

En général, le mouvement d'une droite assujettie à rencontrer trois *directrices,* rectilignes ou curvilignes, est complétement déterminé. Par conséquent, la droite mobile G coïncidera, successivement, avec les génératrices B, B′, B″,..., du second système. Donc elle engendrera l'hyperboloïde.

134. Théorème VII. — *Lorsqu'une droite mobile s'appuie constamment sur trois droites fixes* A, B, C, *non parallèles à un même plan et telles, en outre, que deux quelconques d'entre elles ne soient pas dans un même plan, la surface ainsi engendrée est un hyperboloïde à une nappe* (*).



Par chacune des directrices A, B, C, faisons passer deux plans, respectivement parallèles aux deux autres droites : nous obtiendrons ainsi un parallélipipède dont A, B, C seront trois arêtes. Si nous prenons pour origine le centre du parallélipipède, et pour axes, des parallèles aux arêtes, les équations des directrices seront

$$A\begin{cases} y=b,\\ z=-c;\end{cases}\quad B\begin{cases} x=a,\\ y=-b;\end{cases}\quad C\begin{cases} z=c,\\ x=-a.\end{cases}$$

(*) Cette proposition est la réciproque du corollaire précédent.

Quant à la génératrice, elle peut être commodément représentée par

$$y-b+\lambda(z+c)=0, \quad y+b+\mu(x-a)=0;$$

car ces équations appartiennent à toutes les droites qui rencontrent A et B (36). En exprimant que cette génératrice s'appuie sur (C), nous obtenons

$$-b+\lambda c+\mu a=0;$$

d'où enfin $$ayz+bzx+cxy+abc=0. \quad (4)$$

Cette équation représente une surface du second ordre, qui a pour centre *unique* l'origine, et qui admet des génératrices rectilignes, tandis que l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes n'en admettent évidemment pas; cette surface est donc un hyperboloïde à une nappe.

135. *Remarque.* — Le calcul précédent met en évidence le second mode de génération de l'hyperboloïde. En effet, si l'on remplace les arêtes A, B, C par A′, B′, C′, les équations de ces nouvelles directrices seront

$$A'\begin{cases} y=-b, \\ z=c; \end{cases} \quad B'\begin{cases} x=-a, \\ y=b; \end{cases} \quad C'\begin{cases} z=-c, \\ x=a; \end{cases}$$

d'où il résulte que, pour obtenir la nouvelle équation, il suffirait de changer, dans l'équation (4), a, b, c, en $-a$, $-b$, $-c$: la *seconde surface coïncide* donc *avec la première*. De plus, *les nouvelles directrices sont des positions particulières de la première génératrice;* car A′, par exemple, est parallèle à A et rencontre B et C.

136. THÉORÈME VIII. — *La surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un axe fixe, non situé dans un même plan avec elle, est un hyperboloïde de révolution à une nappe.*

Prenons la droite fixe pour axe des z, et, considérant la droite mobile dans une position particulière BC, adoptons pour axe des y *la plus courte distance* OB des deux droites. Les coordonnées étant rectangulaires, la droite BC pourra être représentée

par

$$y = b, \quad \frac{z}{x} = \operatorname{tang} \alpha. \quad (5)$$

Cela posé, changeons le mode de génération donné; et, considérant BC comme une *directrice*, prenons pour génératrice un *parallèle* quelconque de la surface de révolution. Les équations de ce parallèle seront évidemment

$$x^2 + y^2 = \lambda^2, \quad z = \mu, \quad (6)$$

λ et μ étant deux paramètres. L'élimination de x, y, z entre les équations (5), (6) donne *l'équation de condition*

$$\mu^2 \cot^2 \alpha + b^2 = \lambda^2;$$

d'où

$$x^2 + y^2 - z^2 \cot^2 \alpha = b^2,$$

équation d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Paraboloïde hyperbolique.

137. Théorème IX. — *Le paraboloïde hyperbolique admet deux systèmes de génératrices rectilignes.*

L'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x \quad (1)$$

pouvant être obtenue, soit par l'élimination du paramètre λ entre les deux équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 2\lambda x, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\lambda}, \quad (A)$$

soit par l'élimination du paramètre μ entre

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \mu, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{2x}{\mu}, \quad (B)$$

la proposition est démontrée (124).

138. Remarque. — *Les deux systèmes de génératrices sont essentiellement différents.*

En effet, l'élimination de y et de z, entre les équations (A) et la première des équations (B) donne l'équation *déterminée*

$$2\lambda x = \mu;$$

donc, etc. (125).

139. Théorème X. — *Les génératrices d'un même système sont parallèles à un même plan.*

En effet, l'équation $\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\lambda}$

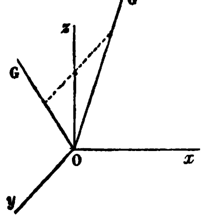
représente une série de plans parallèles entre eux; et il en est de même pour l'équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \mu.$$

140. *Remarques.* — I. Les équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = 0, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 0$$

représentent les deux *plans directeurs* du paraboloïde, c'est-à-dire les plans auxquels les génératrices sont parallèles. Ces plans G O x, G' O x passent par *l'axe* O x du paraboloïde et par les deux génératrices OG, GO' situées dans le plan des yz (118).



II. Les génératrices du système (A) se projettent, sur ce dernier plan, suivant des parallèles à OG; et les autres génératrices, suivant des parallèles à OG'.

141. Théorème XI. — *Deux génératrices d'un même système ne sont pas dans un même plan.*

Cette proposition, qui résulte de la seconde remarque, peut aussi se démontrer par le calcul suivant :

Soient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 2\lambda x, \\ &\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}\right\} (A) \qquad \left.\begin{aligned} &\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 2\lambda' x, \\ &\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\lambda'}, \end{aligned}\right\} (A')$$

les équations de deux génératrices d'un même système. L'élimination de y et de z conduit à la relation

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda'},$$

qui ne saurait avoir lieu si A et A' sont deux droites différentes.

142. Théorème XII. — *Deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan.*

En effet, l'élimination de x, y, z, entre les équations (A) et (B) (137), conduit à l'identité

$$\frac{\mu}{2\lambda}=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{2}{\mu}}.$$

143. Remarque. — *Le paraboloïde hyperbolique n'admet pas de génératrices parallèles.*

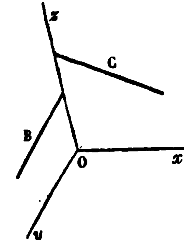
144. Théorème XIII. — *Par chaque point du paraboloïde passent deux génératrices rectilignes* (129).

145. Remarque. — *Par un point quelconque du paraboloïde, il ne passe que deux génératrices rectilignes* (130).

146. Théorème XIV. — *Les projections des génératrices, sur les plans des sections principales, sont tangentes à ces courbes* (131).

147. Corollaire. — *Le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite* G *qui s'appuierait sur trois génératrices d'un même système, prises comme directrices* (133, II).

148. Théorème XV. — *Lorsqu'une droite mobile s'appuie constamment sur trois droites fixes* A, B, C, *parallèles à un même plan et telles, en outre, que deux quelconques d'entre elles ne soient pas dans un même plan, la surface ainsi engendrée est un paraboloïde hyperbolique.*



Prenons, pour axe des x, la droite A; pour axe des z, une position particulière de la génératrice; et, pour axe des y, une parallèle à B. Les équations des trois directrices seront

$$\text{(A)}\ \begin{cases} y=0,\\ z=0;\end{cases}\qquad \text{(B)}\ \begin{cases} x=0,\\ z=c;\end{cases}\qquad \text{(C)}\ \begin{cases} y=ax,\\ z=c'.\end{cases}$$

D'ailleurs, la génératrice peut être représentée par

$$y=\lambda z,\quad x=\mu(z-c);$$

et, pour qu'elle rencontre C, les paramètres λ, μ doivent satis-

faire à la condition

$$\lambda c' = a\mu(c' - c).$$

Par suite, la surface engendrée a pour équation

$$c'y(z - c) - a(c' - c)xz = 0.$$

Comme les équations du centre

$$z = 0, \quad z - c = 0, \quad c'y - a(c' - c)x = 0$$

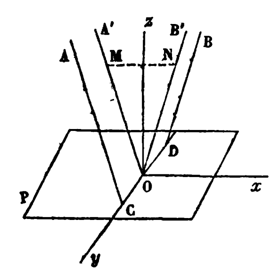
sont incompatibles, et que d'ailleurs la surface est engendrée par une droite, elle est nécessairement un paraboloïde hyperbolique.

149. *Remarque.* — Les génératrices du système auquel appartiennent A, B, C sont représentées par

$$z = \gamma, \quad c'y(\gamma - c) - a(c' - c)\gamma x = 0.$$

150. Théorème XVI. — *Lorsqu'une droite s'appuie sur deux droites fixes* A, B *non situées dans un même plan, en restant parallèle à un plan donné* P, *elle engendre un paraboloïde hyperbolique.*

Nous prendrons pour axe des y la droite qui joint les *traces* C, D des directrices sur le *plan directeur* P; pour origine, le milieu O de CD; pour axe des x, l'intersection du plan P avec le plan A'OB', parallèle aux directrices. Enfin, OA', OB' étant des parallèles à ces droites, nous choisirons, pour axe des z, le *diamètre* des cordes MN parallèles à Ox. De cette manière, les équations des directrices sont



$$(\mathrm{A}) \begin{cases} y = b, \\ x = az; \end{cases} \qquad (\mathrm{B}) \begin{cases} y = -b, \\ x = -az. \end{cases}$$

La génératrice, étant parallèle au plan des xy, sera représentée par

$$z = \gamma, \quad x = \alpha y + \beta.$$

Pour qu'elle rencontre les deux directrices, les trois paramètres α, β, γ doivent satisfaire aux conditions

$$a\gamma = b\alpha + \beta, \quad -a\gamma = -b\alpha + \beta;$$

ou plutôt à ces deux-ci :

$$\beta = 0 \ (^*), \quad a\gamma = b\alpha.$$

On en conclut, pour l'équation de la surface,

$$ayz - bx = 0;$$

etc.

EXERCICES.

I. Lieu des points également distants de deux droites non situées dans un même plan (*paraboloïde hyperbolique*).

II. Lieu des points également distants d'une droite et d'un plan qui se coupent (*cône du second degré*).

III. Lieu décrit par l'arête d'un angle dièdre droit, dont les faces passent respectivement par deux droites données, non situées dans un même plan (*hyperboloïde à une nappe*).

IV. *Théorème.* — Lorsque deux surfaces du second ordre se coupent, si la *courbe d'entrée* est plane, la *courbe de sortie* l'est pareillement.

V. *Théorème.* — Lorsque deux surfaces du second ordre ont un plan principal commun, leur intersection se projette, sur ce plan principal, suivant une conique.

VI. Lieu des points tels, que la distance de chacun d'eux à un point quelconque d'une ellipse donnée soit une fonction rationnelle et du premier degré des coordonnées rectilignes de ce dernier point (*une hyperbole située dans un plan perpendiculaire à celui de l'ellipse, ayant pour sommets les foyers de l'ellipse, et réciproquement*).

VII. *Théorème.* — Si une ellipse et une hyperbole, situées dans deux plans perpendiculaires entre eux, sont telles, que les sommets de l'une des courbes soient les foyers de l'autre, tout cône ayant pour base l'ellipse et pour sommet un point de l'hyperbole est un cône de révolution.

VIII. *Théorème.* — Par le sommet de tout cône du deuxième degré passent deux droites faisant, avec une génératrice quelconque, deux angles dont la somme est constante.

(*) Cette valeur de β apprend que *la génératrice rencontre, à chaque instant, l'axe* O*z*. Des considérations géométriques fort simples peuvent servir à démontrer la même propriété.

IX. *Théorème.* — Les cordonnées étant supposées rectangulaires, les deux équations

$$\begin{aligned}
&[(b'c''-b''c')x+(c'a''-c''a')y+(a'b''-a''b')z]^2\\
+&[(b''c-bc'')x+(c''a-ca'')y+(a''b-ab'')z]^2\\
+&[(bc'-b'c)x+(ca'-c'a)y+(ab'-a'b)z]^2=1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[(b'c''-b''c')x+(b''c-bc'')y+(bc'-b'c)z]^2\\
+&[(c'a''-c''a')x+(c''a-ca'')y+(c'a-ca')z]^2\\
+&[(a'b''-a''b')x+(a''b-ab'')y+(a'b-ab')z]^2=1
\end{aligned}$$

représentent deux ellipsoïdes égaux (*Théorème de Jacobi*).

CHAPITRE XI.

DISCUSSION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES DU SECOND DEGRÉ, A TROIS VARIABLES.

Préliminaires.

151. Pour déterminer la nature du lieu représenté par une équation numérique

$$\left.\begin{aligned}
f(x,y,z)=\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{B}''xy\\
+2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+2\mathrm{C}''z+\mathrm{D}=0,
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

on commence par chercher s'il admet *un centre unique, une droite lieu des centres, un plan lieu des centres,* ou enfin s'il est *dépourvu de centre.* A cet effet, on formera les *équations du centre* (70) :

$$\left.\begin{aligned}
f'_x&=\mathrm{A}x+\mathrm{B}'z+\mathrm{B}''y+\mathrm{C}=0,\\
f'_y&=\mathrm{A}'y+\mathrm{B}''x+\mathrm{B}z+\mathrm{C}'=0,\\
f'_z&=\mathrm{A}''z+\mathrm{B}y+\mathrm{B}'x+\mathrm{C}''=0;
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

et, en cherchant à les résoudre, on saura quel est celui des quatre cas auquel se rapporte l'équation proposée (71).

Premier cas : un centre unique.

152. En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière à prendre le centre pour nouvelle origine, on réduit (70) l'équation (1) à l'une des deux formes

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0, \quad (3)$$

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = H. \quad (4)$$

Or (103) : 1°. L'équation (3) représente un *cône* ou *l'origine ;*

2°. L'équation (4) peut représenter : un *ellipsoïde,* un *hyperboloïde à une nappe,* un *hyperboloïde à deux nappes,* ou un *lieu imaginaire.*

153. L'équation (3) représentera un *cône* si l'on peut mener, par l'origine, un plan qui rencontre le lieu suivant deux droites. En particulier, si les sections faites par les plans coordonnés ne se réduisent pas, toutes les trois, à l'origine, le lieu sera certainement un cône.

154. Quand l'équation (3) est vérifiée seulement par $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, le lieu se réduit à *l'origine.* Il est facile de reconnaître que les conditions nécessaires pour que ce cas particulier se présente, sont :

$$B^2 - A'A'' < 0, \quad B'^2 - A''A < 0, \quad B''^2 - AA' < 0,$$
$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 > 0 \ (*).$$

155. Pour discuter l'équation (4), on peut toujours, préalablement, rendre H *positif* dans le second membre. Cela posé, il existe, entre les longueurs des axes principaux de la surface que cette équation représente, et les racines de l'équation *caractéristique* (77), une relation remarquable, exprimée par la proposition suivante.

156. Théorème. — *Les carrés des demi-axes principaux* (réels ou imaginaires) *de la surface* (4) *ont pour valeurs* $\frac{H}{s}, \frac{H}{s'}, \frac{H}{s''}$, s, s', s'' *étant les racines de l'équation caractéristique.*

Représentons par u la longueur d'un de ces demi-axes et par x, y, z les coordonnées du sommet, réel ou imaginaire, auquel il aboutit : ces quatre quantités sont déterminées (77) par les équa-

---

(*) On suppose $A > 0$.

tions

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=u, \quad (\alpha)$$

$$\frac{\mathrm{A}a+\mathrm{B}''b+\mathrm{B}'c}{a}=\frac{\mathrm{A}'b+\mathrm{B}c+\mathrm{B}''a}{b}=\frac{\mathrm{A}''c+\mathrm{B}'a+\mathrm{B}b}{c}=s. \quad (\beta)$$

Or, l'élimination de x, y, z entre les équations (4) et (α) donne

$$u^2=\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}a^2+\mathrm{A}'b^2+\mathrm{A}''c^2+2\mathrm{B}bc+2\mathrm{B}'ca+\mathrm{B}''ab},$$

et, d'un autre côté, les rapports égaux (β) donnent, à cause de $a^2+b^2+c^2=1$,

$$s=\mathrm{A}a^2+\mathrm{A}'b^2+\mathrm{A}''c^2+2\mathrm{B}bc+2\mathrm{B}'ca+\mathrm{B}''ab;$$

donc, etc.

157. *Remarque.* — Toute surface à centre unique ayant au moins trois axes principaux, les valeurs de u^2 sont réelles et finies; donc il en est de même pour les valeurs de s; donc *l'équation caractéristique a ses trois racines réelles et différentes de zéro.* Ce résultat est conforme à ce que l'on a vu plusieurs fois.

158. Reprenons à présent la discussion de l'équation (4). L'application du théorème de Descartes (*Alg.*, 279) fera connaître le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation caractéristique; donc, d'après le théorème précédent:

L'équation (4) *représente un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes, ou un lieu imaginaire, suivant que le nombre des variations de l'équation caractéristique est trois, deux, un ou zéro.*

159. *Remarque.* — Le théorème ci-dessus (156) suppose les axes coordonnés rectangulaires; mais *la règle contenue dans la dernière proposition est applicable aux coordonnées obliques.* En effet, si l'on transforme la surface donnée S en une autre surface S', de manière qu'à tout point M de la première, ayant pour coordonnées *obliques* x, y, z, corresponde, sur S', un point M' dont les coordonnées *rectangulaires* x', y', z' soient respectivement égales à x, y, z, cette seconde surface, évidemment de *même espèce* que la première, sera représentée par l'équation (4), dans laquelle on changerait seulement x, y, z en x', y', z'. L'espèce de la surface S sera donc déterminée par la règle précédente.

Deuxième cas : une droite lieu des centres.

160. On peut encore (mais cela n'est pas indispensable) ramener l'équation (1) à l'une des deux formes (3), (4), en prenant *un des centres* pour nouvelle origine. Cela posé :

1°. L'équation (3) peut représenter *une droite* ou *deux plans non parallèles ;*

2°. L'équation (4) peut représenter *un cylindre elliptique, un cylindre hyperbolique* ou *un lieu imaginaire*. On détermine l'espèce du lieu en considérant les sections faites par les plans coordonnés.

161. *Remarque.* — Quand l'équation (1) représente une droite, cette ligne est le lieu des centres; par conséquent, *l'équation* (1) *équivaut au système des équations* $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. En même temps *le premier membre de cette équation est, d'une infinité de manières, décomposable en la somme de deux carrés* (*D. D.*, 124, IV).

Troisième cas : un plan lieu des centres.

162. Dans ce cas, l'équation (1) représente en général *deux plans parallèles*, symétriquement placés par rapport au *lieu des centres*, et dont les variétés sont : *deux plans confondus en un seul*, ou un *lieu imaginaire* (73). Les sections faites par les plans coordonnés déterminent la nature du lieu.

163. *Remarque.* — Le premier membre de l'équation (1) est, *à un facteur près*, égal à $(f'_x)^2 - \lambda$, λ étant une quantité réelle.

Quatrième cas : aucun centre.

164. Lorsque les équations du centre sont incompatibles, la surface représentée par l'équation (1) est un *paraboloïde elliptique*, un *paraboloïde hyperbolique*, ou un *cylindre parabolique*.

Pour reconnaître auquel de ces trois genres appartient la surface, il suffit de former les binômes $B^2 - A'A''$, $B'^2 - A''A$, $B''^2 - AA'$: 1° *s'ils sont nuls tous trois, la surface est un cylindre ;* 2° *suivant qu'un de ces binômes* (au moins) *est négatif ou positif, la surface est un paraboloïde elliptique ou un paraboloïde hyperbolique.*

On justifie cette règle en observant que : 1° *dans un paraboloïde*

quelconque, les sections paraboliques sont paralleles à l'axe (113, 120); 2° *les trois plans coordonnés ne peuvent être parallèles à une même droite;* 3° *le paraboloïde elliptique n'admet aucune section hyperbolique; etc.* (113).

Complément de la discussion des surfaces à centre unique.

165. L'équation *caractéristique* fait bien connaître l'espèce de la surface représentée par une équation donnée, mais elle n'apprend rien quant à la *forme* de la surface, à sa *situation* relativement aux plans coordonnés, etc. Nous allons donc reprendre la discussion des surfaces à centre unique, en adoptant une marche analogue à celle que l'on suit pour les courbes du second ordre (*D. D.*, Chap. XI). Cette seconde méthode, qui complète la première, peut même en tenir lieu, car elle n'exige pas la formation de l'équation caractéristique.

166. Supposons, comme dans le n° 152, que l'équation proposée ait été ramenée à la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=H, \quad (1)$$

le second membre H étant *positif*. Si A'' n'est pas nul, les deux valeurs de z seront données par la formule

$$z=my+nx\pm\sqrt{ay^2+bxy+cx^2+f}, \quad (2)$$

dans laquelle

$$m=-\frac{B}{A''}, \quad n=-\frac{B'}{A''}, \quad a=\frac{B^2-A'A''}{A''^2}, \text{ etc.}$$

En raisonnant comme dans le chapitre cité, on conclut que:

1°. $$z_1=my+nx \quad (3)$$

représente un plan qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des z : c'est le *plan diamétral conjugué* à cet axe,

2°. $$Z=\sqrt{ay^2+bxy+cx^2+f} \quad (4)$$

est *l'ordonnée comptée à partir du plan diamétral;*

3°. La courbe suivant laquelle la surface est coupée par son plan diamétral est déterminée par les équations

$$z=my+nx, \quad (3) \qquad ay^2+bxy+cx^2+f=0: \quad (5)$$

cette dernière, qui représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z (*), représente aussi la projection de la courbe d'intersection, faite sur le plan des xy.

167. Remarquons à présent que la partie du plan des xy, sur laquelle se projettent les points de la surface satisfaisant à l'inégalité

$$ay^2 + bxy + cx^2 + f > 0, \quad (6)$$

est séparée, du reste de ce plan, par la courbe (5), dont il vient d'être question (**). D'ailleurs l'équation (5) peut représenter *une ellipse, un lieu imaginaire,* ou *une hyperbole;* donc nous avons à examiner trois cas principaux.

168. Premier cas : *l'équation* (5) *représente une ellipse.* — Suivant que la surface se projette à *l'intérieur* ou à *l'extérieur* de cette courbe, elle est évidemment un *ellipsoïde* ou un *hyperboloïde à une nappe;* d'après l'inégalité (6), on a donc :

Pour $f > 0$, *un ellipsoïde;*

Pour $f < 0$, *un hyperboloïde à une nappe.*

169. Deuxième cas : *l'équation* (5) *représente un lieu imaginaire.* — Lorsqu'il en est ainsi, le premier membre de cette équation reste *toujours positif* ou *toujours négatif;* et, conséquemment, l'équation (1) représente un *hyperboloïde à deux nappes,* ou un *lieu imaginaire.* Donc

Pour $f > 0$, *un hyperboloïde à deux nappes;*

Pour $f < 0$, *un lieu imaginaire.*

170. Troisième cas : *l'équation* (5) *représente une hyperbole.* — Une discussion toute semblable à la précédente conduit à ce résultat :

Pour $f > 0$, *un hyperboloïde à une nappe;*

Pour $f < 0$, *un hyperboloïde à deux nappes.*

171. Nous avons supposé, dans ce qui précède, A″ différent de

(*) Ce cylindre est tangent à la surface, tout le long de la courbe dont il s'agit. (*Voyez* le *Traité de Géométrie descriptive.*)

(**) La courbe d'intersection de la surface et du plan diamétral est le *contour apparent* de la surface, relatif au plan des xy; la courbe (5) est donc la *projection du contour apparent.* (*Géométrie descriptive.*)

zéro. Si ce coefficient est nul, c'est-à-dire si le terme en z^2 manque, et qu'il en soit de même pour y^2 et pour z^2, l'équation (1) prend la forme

$$\mathrm{B}yz + \mathrm{B}'zx + \mathrm{B}''xy = \mathrm{H}. \quad (7)\ (^*)$$

Dans cette nouvelle équation, les trois coefficients B, B', B" sont différents de zéro, sans quoi *la surface aurait une infinité de centres*, contrairement à l'hypothèse. Cette surface, évidemment indéfinie dans tous les sens, est donc un des deux hyperboloïdes. De plus, l'équation du *cône asymptotique* est

$$\mathrm{B}yz + \mathrm{B}'zx + \mathrm{B}''xy = 0. \quad (8)\ (^{**})$$

172. On a vu, dans le Chapitre X, que les génératrices de l'hyperboloïde à une nappe sont respectivement parallèles aux génératrices du cône asymptotique. Or le cône (8) admet, pour une de ses génératrices, l'axe des z. Conséquemment, *pour que la surface* (7) *soit un hyperboloïde à une nappe, il faut et il suffit qu'elle contienne une parallèle à l'axe des z;* ou, ce qui est équivalent, *il faut et il suffit que l'équation* (7) *soit rendue identique, par un système de valeurs réelles de x et de y.*

Cette condition donne

$$\mathrm{B}y + \mathrm{B}'x = 0, \quad \mathrm{B}''xy = \mathrm{H};$$

puis
$$x = \pm\sqrt{-\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{B'B''}}}, \quad y = \mp\sqrt{-\frac{\mathrm{B'H}}{\mathrm{BB''}}}.$$

H étant supposé positif, ces valeurs seront réelles si, parmi les coefficients B, B', B", il y en a *un nombre impair qui soit négatif*, ou, plus simplement, *si le produit* BB'B" *est négatif*. Le cas que nous examinons se résume donc ainsi :

$\mathrm{BB'B''} < 0$, *hyperboloïde à une nappe ;*

$\mathrm{BB'B''} > 0$, *hyperboloïde à deux nappes.*

(*) Pour plus de simplicité, on a supprimé le facteur 2.

(**) En effet: 1° l'équation (8) représente un cône concentrique avec la surface (7); 2° la différence des valeurs de z, représentée par

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{B}y + \mathrm{B}'x},$$

diminue indéfiniment quand x ou y augmente.

Recherche des génératrices rectilignes.

173. Hyperboloïde a une nappe. — Pour trouver les génératrices rectilignes d'une pareille surface, représentée par

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = H, \quad (1)$$

essayons de mettre cette équation sous la forme

$$L^2 - M^2 + N^2 = 1, \quad (2)$$

L, M, N étant des polynômes du premier degré, contenant x, y, z: si cette transformation peut être effectuée, les génératrices d'un des systèmes seront déterminées (**124**) par les équations

$$L + M = \lambda(1 + N), \quad L - M = \frac{1}{\lambda}(1 - N), \quad (3)$$

et celles de l'autre système par les équations

$$L + M = \mu(1 - N), \quad L - M = \frac{1}{\mu}(1 - N). \quad (4)$$

174. En supposant A différent de zéro, et en groupant convenablement les termes qui contiennent x, nous pourrons écrire l'équation (1), d'abord sous cette forme :

$$(Ax + B'z + B''y)^2 - (B'z + B''y)^2 + AA'y^2 + AA''z^2 + 2ABy z = AH,$$

puis sous celle-ci :

$$\begin{aligned}&(Ax + B'z + B''y)^2 - (B''^2 - AA')y^2\\ &- 2(B'B'' - AB)yz - (B'^2 - AA'')z^2 = AH.\end{aligned}$$

Si le binôme $B''^2 - AA'$ n'est pas nul, nous pourrons encore remplacer la dernière équation par

$$\left.\begin{aligned}&(B''^2 - AA')(Ax + B'z + B''y)^2\\ &- [(B''^2 - AA')y + (B'B'' - AB)z]^2 - A\Delta z^2\\ &= AH(B''^2 - AA'),\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

en posant, comme dans le Chapitre V,

$$\Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

et l'équation (5) sera celle que nous cherchions.

En effet, si l'on suppose l'hyperboloïde rapporté aux plans dont

les équations sont

$$Ax+B'z+B''y=0,\quad (B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z=0,\quad z=0\ (^*),$$

les nouvelles coordonnées X, Y, Z *d'un point quelconque* (x, y, z) *seront égales aux premiers membres de ces équations, respectivement multipliés par des constantes réelles* α, β, γ (**); *de sorte que l'on aura, au lieu de l'équation* (5),

$$\frac{\alpha^2}{AH}X^2-\frac{\beta^2}{AH(B''^2-AA')}Y^2-\frac{\Delta\gamma^2}{B''^2-AA'}Z^2=1.$$

Or cette dernière équation, qui a la forme $Px^2+P'y^2+P''z^2=1$, représente, par hypothèse, un hyperboloïde à une nappe; donc deux des coefficients P, P', P'' doivent être positifs, le troisième étant négatif.

Admettons, pour fixer les idées, que les quantités A, Δ et B''^2-AA' soient positives; alors, en comparant les équations (5) et (2), nous pourrons prendre

$$L^2=\frac{(Ax+B'z+B''y)^2}{AH},$$

$$M^2=\frac{[(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z]^2}{AH(B''^2-AA')},$$

$$N^2=\frac{\Delta z^2}{H(B''^2-AA')}.$$

175. *Remarques.* — I. Lorsque les quantités A', A'', $B^2-A'A''$, $B'^2-A''A$ sont différentes de zéro, l'équation (1) peut encore être réduite aux deux formes suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}(B^2-A'A'')(A'y+B''x+Bz)^2\\ -[(B^2-A'A'')z+(B''B-A'B')x]^2-A'\Delta x^2\\ =A'H(B^2-A'A''),\end{array}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{array}{l}(B'^2-A''A)(A''z+By+B'x)^2\\ -[(B'^2-A''A)x+(BB'-A''B'')y]^2-A''\Delta y^2\\ =A''H(B'^2-A''A).\end{array}\right\}\quad(7)$$

(*) Le troisième plan est évidemment celui des xy. Le deuxième est *le plan diamétral conjugué à l'axe des x* (76, II).

(**) Pour abréger, nous supprimons la démonstration, qui ne saurait embarrasser le lecteur.

II. Chacune des équations (5), (6), (7) représente la surface (1), rapportée à un *système de diamètres conjugués* (*).

III. Si la surface, au lieu d'être, comme on le suppose, un hyperboloïde à une nappe, est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes, les équations (5), (6), (7) auront la forme

$$L^2 + M^2 + N^2 = 1$$

dans le premier cas, et la forme

$$L^2 - M^2 - N^2 = 1$$

dans le second.

IV. Conséquemment, la *décomposition* du premier membre de l'équation (1), *en une somme ou une différence de carrés*, constitue une *troisième méthode* de discussion des surfaces à centre (**).

176. Nous avons supposé, dans ce qui précède, les quantités A et $B''^2 - AA'$ différentes de zéro (***). Si ce binôme est nul sans que A le soit, le trinôme $Ax^2 + 2B''xy + A'y^2$ est un carré, et l'on peut écrire ainsi l'équation (1) :

$$Az(A''z + By + B'x) = AH - (Ax + B''y)^2. \quad (8)$$

Le produit AH est nécessairement positif, sans quoi le plan des xy, qui passe par le centre, ne couperait pas la surface, ce qui ne saurait avoir lieu, cette surface étant un hyperboloïde à une nappe. Le second membre de l'équation (8) est donc égal au produit des facteurs *réels* $\sqrt{AH} + (Ax + By)$, $\sqrt{AH} - (Ax + By)$; et, conséquemment, les génératrices de l'un des systèmes sont représentées par

$$\left.\begin{aligned} Az &= \lambda\left(\sqrt{AH} + Ax + By\right), \\ A''z + By + B'x &= \frac{1}{\lambda}\left(\sqrt{AH} - Ax - By\right), \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

(*) Dans toute surface du second ordre, trois diamètres sont dits *conjugués*, quand chacun d'eux est parallèle aux cordes que le plan des deux autres divise en parties égales.

(**) Nous engageons le lecteur à étudier une très-savante Note de M. Hermite, insérée dans le *Programme* rédigé par MM. *Gerono* et *Roguet*.

(***) Plus généralement, au moins un des coefficients A, A′, A″, différent de zéro, ainsi que le binôme correspondant.

et celles de l'autre système par

$$\left.\begin{aligned} Az &= \mu\left(\sqrt{AH} - Ax - By\right), \\ A''z + By + B'x &= \frac{1}{\mu}\left(\sqrt{AH} + Ax + By\right). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

177. Lorsque l'équation (1) se réduit à

$$Byz + B'zx + B''xy = H, \quad (11)$$

deux des génératrices de l'hyperboloïde sont (172) représentées par

$$x = \pm\alpha = \pm\sqrt{-\frac{BH}{B'B''}}, \quad y = \pm\beta = \mp\frac{B'}{B}\alpha.$$

Faisons passer un plan par l'une de ces deux droites : il coupera de nouveau la surface suivant une seconde génératrice dont les équations sont, ainsi qu'on le voit aisément (**),

$$y - \beta = \lambda(x - \alpha), \quad Bz + B''x = -\frac{1}{\lambda}(B''\beta + B'z). \quad (12)$$

Ces deux équations déterminent donc un premier système de génératrices. Les génératrices du second système sont représentées par

$$y + \beta = \mu(x + \alpha), \quad Bz + B''x = -\frac{1}{\mu}(-B''\beta + B'z). \quad (13)$$

178. *Remarque.* — L'élimination de λ, entre les équations (12), conduit à

$$Byz + B'zx + B''xy - (B\beta + B'\alpha)z - B''\alpha\beta = 0 :$$

en vertu des relations $B\beta + B'\alpha = 0$, $B''\alpha\beta = H$ (172), cette équation ne diffère pas de la proposée. Les équations (13) donnent lieu à une remarque analogue.

(*) Ce paragraphe est extrait d'une Note de M. *Gerono*, insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XV.

(**) En remplaçant y par $\beta + \lambda(x - \alpha)$ dans l'équation (11), on obtient

$$(Bz + B''x)[\beta + \lambda(x - \alpha)] + B'zx - H = 0.$$

Le premier membre doit être divisible par $x - \alpha$; donc l'équation

$$(Bz + B''x)\lambda + B''\beta + B'z = 0$$

représente la projection de la seconde génératrice sur le plan zx.

179. Paraboloïde hyperbolique. — Soit

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy \\ \quad +2Cx+2C'y+2C''z+D=0 \end{array}\right\} \quad (14)$$

l'équation de cette surface : le déterminant Δ est égal à zéro (164). De plus, au moins un des binômes $B^2-A'A''$, $B'^2-A''A$, B''^2-AA' est positif (164). En supposant que ce soit B''^2-AA', on peut écrire ainsi l'équation (14) :

$$\left.\begin{array}{l} (B''^2-AA')(Ax+B'z+B''y)^2 \\ -[(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z]^2 \\ +A(B''^2-AA')(2Cx+2C'y+2C''z+D)=0; \end{array}\right\} \quad (15)$$

pourvu que A soit différent de zéro. Cette hypothèse étant admise pour un instant, les génératrices du premier système seront représentées par les équations

$$\left.\begin{array}{l} Ax+B'z+B''y+\dfrac{(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z}{\sqrt{B''^2-AA'}} \\ \qquad =\lambda(2Cx+2C'y+2C''z+D), \\ Ax+B'z+B''y-\dfrac{(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z}{\sqrt{B''^2-AA'}} \\ \qquad =-\dfrac{A}{\lambda}; \end{array}\right\} \quad (16)$$

et celles du second système par les équations

$$\left.\begin{array}{l} Ax+B'z+B''y-\dfrac{(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z}{\sqrt{B''^2-AA'}} \\ \qquad =\mu(2Cx+2C'y+2C''z+D), \\ Ax+B'z+B''y+\dfrac{(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z}{\sqrt{B''^2-AA'}} \\ \qquad =-\dfrac{A}{\mu}. \end{array}\right\} \quad (17)$$

180. *Remarque*. — L'équation

$$(B''^2-AA')(Ax+B'z+B''y)^2-[(B''^2-AA')y+B'B''-AB)z]^2=0$$

représente les plans directeurs du paraboloïde (140) (*).

(*) Quoique ces deux plans ne passent pas nécessairement par le *sommet* de la surface (140), on peut leur conserver le nom de *plans directeurs*, parce que les génératrices rectilignes sont parallèles à l'un ou à l'autre.

181. Lorsque A est nul, l'équation (15) devient identique. Mais si l'on met d'abord l'équation (14) sous la forme

$$\begin{aligned}&(B''^2 - AA')(A'y + B'z + B''x)^2\\ &-[(B''^2 - AA')x + (BB'' - A'B')z]^2\\ &+ A'(B''^2 - AA')(2Cx + 2C'y + 2C''z + D) = 0,\end{aligned}$$

on obtient, en faisant $A = 0$,

$$\begin{aligned}&(A'y + B'z + B''x)^2 - \left[B''x + \left(B - \frac{A'B'}{B''}\right)\ \right]^2\\ &+ A'(2Cx + 2C'y + 2C''z + D) = 0.\end{aligned}$$

Par suite, les génératrices sont représentées par

$$\left.\begin{aligned}&A'y + B'z + B''x + \left[B''x + \left(B - \frac{A'B'}{B''}\right)z\right]\\ &\qquad = \lambda(2Cx + 2C'y + 2C''z + D),\\ &A'y + B'z + B''x - \left[B''x + \left(B - \frac{A'B'}{B''}\right)z\right]\\ &\qquad = -\frac{A'}{\lambda},\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

et par

$$\left.\begin{aligned}&A'y + B'z + B''x - \left[B''x + \left(B - \frac{B''}{A'B'}\right)z\right]\\ &\qquad = \mu(2Cx + 2C'y + 2C''z + D),\\ &A'y + B'z + B''x + \left[B''x + \left(B - \frac{A'B'}{B''}\right)z\right]\\ &\qquad = -\frac{A'}{\mu}.\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

182. Les dernières formules sont encore en défaut lorsque A' est nul. Mais, à cause de $A = 0$, $A' = 0$, $\Delta = 0$, on a $A'' = \frac{2BB'}{B''}$; d'où l'on conclut aisément, pour les équations des génératrices,

$$\left.\begin{aligned}&2(B'z + B''y) = \lambda(2Cx + 2C'y + 2C''z + D),\\ &Bz + B''x = -\frac{B''}{\lambda},\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

et

$$\left.\begin{aligned}&2(Bz + B''x) = \mu(2Cx + 2C'y + 2C''z + D),\\ &B'z + B''y = -\frac{B''}{\mu}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

183. *Remarque.* — Dans ce dernier cas, les équations des deux plans directeurs sont

$$Bz + B''x = 0, \quad B'z + B''y = 0.$$

184. Cylindre parabolique. — Les relations

$$B^2 - A'A'' = 0, \quad B'^2 - A''A = 0, \quad B''^2 - AA' = 0, \quad \Delta = 0$$

donnent $$AA'A'' = BB'B'', \quad B'B'' = AB.$$

Conséquemment, l'équation (14) équivaut à

$$A^2x^2 + B''^2y^2 + B'^2z^2 + 2B'B''yz + 2AB'zx + 2AB''xy$$
$$+ A(2Cx + 2C'y + 2C''z + D) = 0;$$

ou encore, à

$$(Ax + B''y + B'z)^2 + A(2Cx + 2C'y + 2C''z + D) = 0; \quad (22)$$

pourvu que A soit différent de zéro (1).

Ainsi, *quand l'équation représente un cylindre parabolique, les six termes du second degré forment un carré.* Cette propriété est une généralisation de celle que l'on a vue dans la discussion de l'équation à deux variables (*D. D.*, 124).

185. Ayant mis l'équation du cylindre sous la forme (22), on obtient immédiatement, pour les équations des génératrices,

$$Ax + B''y + B'z = \lambda, \quad 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = -\frac{\lambda^2}{A}. \quad (23)$$

186. *Remarque.* — Pour fixer les idées, nous avons supposé que, parmi les coefficients A, A', A'', le premier était différent de zéro : si ces coefficients étaient nuls tous trois, l'équation ne représenterait pas un cylindre parabolique.

Applications.

187. *Exemple I.*

$$x^2 - y^2 + 2z^2 - 2yz - 4zx + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0. \quad (1)$$

Coordonnées du centre : $x = -1, \quad y = -2, \quad z = -2.$

Equation réduite : $x^2 - y^2 + 2z^2 - 2yz - 4zx + 4xy = 1. \quad (2)$

Equation caractéristique : $s^3 - 2s^2 - 10s - 1 = 0.$

Le premier membre de cette équation présentant une seule va-

riation, la surface est un *hyperboloïde à deux nappes*. Le plan diamétral, conjugué à l'axe des z, a pour équation

$$z_1 = x + \frac{1}{2}y.$$

Il ne coupe pas l'hyperboloïde; car l'ordonnée, comptée à partir de ce plan, est exprimée par

$$Z = \frac{1}{2}\sqrt{3y^2 - 4xy + 2x^2 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{(3y^2 - 2x)^2 + 2x^2 + 6};$$

et cette quantité est essentiellement positive.

Il résulte, de la dernière valeur, que l'équation (2) peut être écrite ainsi :

$$3(2z - 2x - y)^2 - (3y - 2x)^2 - 2x^2 = 6.$$

Sous cette forme, qu'on aurait pu obtenir directement, on reconnaît encore que la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

188. *Exemple II.*

$$x^2 - y^2 + 2z^2 - 2yz + 4zx + 4xy + 2x - 4y - 1 = 0.$$

Coordonnées du centre : $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{2}{15}$, $z = -\frac{2}{3}$.

Equation réduite : $x^2 - y^2 + 2z^2 - 2yz + 4zx + 4xy = \frac{2}{15}$.

La *décomposition en carrés* donne, par exemple,

$$(x + 2z + 2y)^2 - 2z^2 - 10yz - 5y^2 = \frac{2}{15},$$

puis $$2(x + 2z + 2y)^2 - (2z + 5y)^2 + 15y^2 = \frac{4}{15}.$$

La surface est donc un *hyperboloïde à une nappe*, dont les génératrices sont représentées par les deux systèmes d'équations :

$$(x + 2z + 2y)\sqrt{2} + (2z + 5y) = \lambda(2 + 15y),$$

$$(x + 2z + 2y)\sqrt{2} - (2z + 5y) = \frac{2 - 15y}{15\lambda};$$

$$(x + 2z + 2y)\sqrt{2} + (2z + 5y) = \mu(2 - 15y),$$

$$(x + 2z + 2y)\sqrt{2} - (2z + 5y) = \frac{2 + 15y}{15\mu}.$$

189. *Exemple III.*

$$3x^2+8y^2+24z^2-28yz-18zx+10xy-2x+4y=0.$$

La surface, qui n'a pas de centre, coupe le plan des xy suivant une hyperbole : elle est donc un *paraboloïde hyperbolique*. D'ailleurs, l'équation pouvant être mise sous la forme

$$(3x+5y-9z)^2-(y-3z)^2=6(x-2y),$$

les génératrices du premier système sont représentées par les équations

$$x+2y-4z=2\lambda(x-2y),\quad 3x+4y-6z=\frac{1}{\lambda},$$

et celles du second système par

$$x+2y-4z=2\mu,\quad 3x+4y-6z=\frac{1}{\mu}(x-2y).$$

La valeur de y, déduite de la proposée, étant

$$y=\frac{14z-5x-2}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{x^2+4zx+4z^2+36x-56z+4},$$

on en conclut que le paraboloïde se projette, sur le plan des zx, à l'*extérieur* de la parabole représentée par

$$(x+2z)^2+36x-56z+4=0;$$

etc.

190. *Exemple IV.*

$$2x^2+5y^2+2z^2+2y^2+6xy+2y+4z+2=0. \quad (1)$$

Équations du centre :

$$2x+3y=0,\quad 5y+z+1=0,\quad 2z+y+2x=0.$$

La troisième équation est une conséquence des deux autres; donc l'équation proposée représente un cylindre ayant pour axe la *droite centrale* (72). La trace de ce cylindre, sur le plan des xy, est représentée par l'équation

$$2x^2+5y^2+6xy+2y+2=0,$$

laquelle se décompose en

$$2x+3y=0,\quad y+2=0.$$

Par conséquent, *le lieu se réduit à la droite centrale*. La décomposition en carrés conduit au même résultat; car l'équation (1)

peut être écrite ainsi :

$$(2x+3y)^2+(y+2z+2)^2=0 \text{ (*)}.$$

EXERCICES.

I. $x^2+2y^2+2z^2+2xy$
$-2x-4y-4z=0$ (*ellipsoïde*);

$3x^2+2y^2+2z^2+2yz$
$+6x+6y+6z+9=0$ (*point*);

$3x^2+y^2+z^2+yz-3zx-2xy$
$+y+2=0$ (*lieu imaginaire*);

$x^2+y^2+2z^2+2yz+2zx+2xy$
$-2x-2y+2z=0$ (*cylindre elliptique*);

$x^2+2y^2+z^2-2yz-2xy$
$+2y-2z+1=0$ (*droite*);

$x^2+y^2+9z^2-6yz+6zx-2xy$
$-x+y-3z=0$ (*deux plans parallèles*);

$x^2+y^2+9z^2-6yz+6zx-2xy$
$-2x+2y-6z+1=0$ (*un seul plan*).

II. $x^2+y^2+2z^2+4yz-2zx-2xy$
$+2y-3=0$ (*hyperboloïde à une nappe*);

$3x^2+2y^2+4yz-2zx$
$-4x-8z-8=0$ (*cône*);

$x^2-y^2-2z^2-4yz+2xy$
$+2y+2z=0$ (*cylindre hyperbolique*);

$x^2+6yz+3zx+2xy$
$+x+3z=0$ (*deux plans qui se coupent*.

(*) En terminant, nous rappellerons encore cette propriété : *Si un polynôme est égal à la somme de deux carrés, on peut, d'une infinité de manières, le décomposer en deux autres carrés* (*D. D.*, **124**). Par exemple, le premier membre de l'équation (1), que nous venons de décomposer (à un facteur près), en

$$(2x+3y)^2+(y+2z+2)^2,$$

se décompose en

$$(x+y-z-1)^2+(x+2y+z+1)^2,$$

puis en

$$(8x+15y+6z+6)^2+(6x+5y-8z-8)^2, \text{ etc.}$$

III. $$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4zx + 2xy + 4y + 4z - 9 = 0$$ (*hyperboloïde à deux nappes*).

IV. $$x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4yz + 2xy - 3x - 4y - 3z = 0$$ (*paraboloïde elliptique*);

$$x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 30yz + 6zx - 10xy - 2x - 2y = 0$$ (*cylindre parabolique*).

V. $$x^2 + y^2 - 2z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 2y + 2z = 0$$ (*paraboloïde hyperbolique*).

VI. *Théorème.* — Le paraboloïde hyperbolique a deux génératrices parallèles à un plan quelconque (non parallèle à l'axe).

VII. Déterminer les relations qui existent entre le lieu représenté par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

et le lieu représenté par l'équation homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

CHAPITRE XII.

RECHERCHE DES ÉQUATIONS DE QUELQUES SURFACES.

Surfaces cylindriques.

191. Soient $F(x, y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$ (1)

les équations de la *directrice* donnée; soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \quad (2)$$

les équations de la *génératrice* : a, b sont des constantes données, α, β, des paramètres variables. En éliminant x, y, z entre ces quatre équations, on trouvera, dans chaque cas particulier, une certaine *équation de condition*

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad (3)$$

exprimant que la génératrice s'appuie sur la directrice : cette re-

lation *algébrique* entre α et β remplace la condition *géométrique* à laquelle la génératrice est assujettie. L'élimination des deux paramètres, entre les équations (2) et (3), conduira donc à un résultat de la forme

$$y - bz = \varphi(x - az): \quad (A)$$

telle est l'*équation générale des surfaces cylindriques.*

Surfaces coniques.

192. La directrice étant donnée, comme dans le numéro précédent, par les équations (1), les équations de la génératrice seront

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c),$$

a, b, c représentant les coordonnées du sommet ou du *point directeur.* La condition exprimant que la génératrice rencontre la directrice sera encore remplacée par une équation de la forme (3), obtenue en éliminant x, y, z. Conséquemment, *l'équation générale des surfaces coniques* est

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right). \quad (B)$$

193. Si le sommet est pris pour origine, l'équation (B) se réduit à

$$\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right). \quad (C)$$

Cette dernière forme montre *que l'équation de toute surface conique est homogène* (*), *quand le centre est pris pour origine:* ce résultat s'accorde avec ce qu'on a vu précédemment.

194. Application. — *Trouver l'équation du cône circonscrit à une surface du second ordre,* ayant pour équation

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2By z + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Le cône sera *circonscrit,* si chacune de ses génératrices perce la surface en deux points confondus en un seul.

(*) Les deux membres de l'équation (C) sont des fonctions homogènes, du degré zéro (*D. D.,* 6).

Cela posé, soient, en prenant le sommet pour origine,

$$x = \alpha z, \quad y = \beta z$$

les équations de la génératrice. Les ordonnées des points où elle rencontre la surface satisfont à l'équation

$$R z^2 + 2 S z + D = 0,$$

dans laquelle

$$R = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A'' + 2B\beta + 2B'\alpha + 2B''\alpha\beta, \quad S = C\alpha + C'\beta + C''.$$

Les deux points coïncideront si $S^2 = RD$. Par conséquent, l'équation $\beta = \varphi(\alpha)$ devient ici

$$(C\alpha + C'\beta + C'')^2 = (A\alpha^2 + A'\beta^2 + A'' + 2B\beta + 2B'\alpha + 2B''\alpha\beta)D.$$

Par suite, le cône est représenté par

$$\left.\begin{array}{l}(Cx + C'y + C''z)^2 \\ = (Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy)D.\end{array}\right\} \quad (5)$$

195. *Remarque.* — La *courbe de contact* du cône et de la surface donnée, évidemment représentée par les équations (5) et (4), est représentée aussi par cette dernière équation, jointe à

$$(Cx + C'y + C''z)^2 + (2Cx + 2C'y + 2C''z + D)D = 0.$$

Le premier membre de cette nouvelle équation est le carré de $Cx + C'y + 2C''z + D$. On conclut de là que *la courbe suivant laquelle un cône touche une surface du second ordre est contenue dans un plan parallèle au plan diamétral conjugué avec la droite qui joint le sommet du cône au centre de la surface* (*).

(*) Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre; la droite dont il s'agit sera représentée par $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$, et le plan diamétral qui lui est conjugué aura pour équation

$$\begin{array}{c}(Ax_1 + B'z_1 + B''y_1)x + (A'y_1 + B''x_1 + Bz_1)y \\ + (A''z_1 + By_1 + B'x_1)z + Cx_1 + C'y_1 + C''z_1 = 0,\end{array}$$

ou, plus simplement,

$$-Cx - C'y - C''z + Cx_1 + C'y_1 + C''z_1 = 0.$$

Surfaces de révolution.

196. On peut regarder une pareille surface comme *engendrée par une circonférence dont le centre décrit une droite donnée, dont le plan reste perpendiculaire à cette droite, et qui rencontre une ligne donnée* (*).

Adoptant ce mode de génération, et représentant par a, b, c les coordonnées d'un point C de l'axe, nous prendrons, pour équations de cette droite,

$$x - a = m(z - c), \quad y - b = n(z - c).$$

Les *parallèles* de la surface peuvent être obtenus en coupant des sphères ayant pour centre commun le point C, par des plans perpendiculaires à l'axe; les équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \alpha^2,$$
$$m(x - a) + n(y - b) + (z - c) = \beta$$

représentent donc la génératrice (**). En exprimant qu'elle rencontre la directrice donnée, on arrivera, comme dans les exemples précédents, à une équation de condition telle que $\alpha^2 = \varphi(\beta)$. Par suite, *l'équation générale des surfaces de révolution est*

$$\left.\begin{array}{l}(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \\ = \varphi[m(x - a) + n(y - b) + z - c].\end{array}\right\} \quad (D)$$

197. *Remarque.* — Si l'on prend l'axe de rotation pour axe des z. on peut supposer $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; l'équation (D) devient donc

$$x^2 + y^2 = \varphi(z) - z^2,$$

ou, plus simplement,

$$x^2 + y^2 = \psi(z). \quad (E)$$

Cette dernière exprime, comme on pouvait s'y attendre, que *le rayon du parallèle dépend de sa distance à l'origine.*

198. Application. — *Trouver l'équation du tore.*

La directrice étant *un cercle situé dans un même plan avec l'axe*

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie.

(**) On suppose les coordonnées rectangulaires.

de rotation, nous pouvons représenter cette ligne par

$$(x-a)^2+z^2=R^2, \quad y=0.$$

L'élimination de x, y, z entre ces deux équations et

$$x^2+y^2=\alpha^2, \quad z=\beta,$$

conduit à
$$(\pm\alpha-a)^2+\beta^2=R^2.$$

Conséquemment, le tore a pour équation

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=R^2.$$

ou
$$(x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

Surfaces conoïdes.

199. On donne ce nom aux surfaces engendrées par *une droite assujettie à rester parallèle à un plan donné, et à s'appuyer sur une directrice rectiligne et sur une autre directrice quelconque* (*).

Si l'on prend le *plan directeur* pour plan des xy, et la directrice rectiligne pour axe des z, *l'équation générale des surfaces conoïdes* aura évidemment la forme

$$\frac{y}{x}=\varphi(z). \quad (F)$$

200. Application. — *Trouver l'équation de l'héliçoïde à plan directeur.*

Ici, la seconde directrice est une *hélice* tracée sur un cylindre dont l'axe est la directrice rectiligne supposée, pour plus de simplicité, perpendiculaire au plan directeur. Considérons seulement le cas où la tangente à l'hélice fait, avec le plan directeur, un angle de 45°. En prenant pour unité le rayon du cylindre, et en faisant passer l'axe des x par un point de l'hélice, nous aurons, pour les équations de cette courbe,

$$x=\cos z, \quad y=\sin z \; (**).$$

(*) Le paraboloïde hyperbolique est un conoïde dans lequel la seconde directrice est rectiligne.

(**) Pour trouver ces équations, on doit se rappeler que, dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne; etc.

Les équations de la génératrice sont d'ailleurs

$$\frac{y}{x} = \alpha, \quad z = \beta;$$

α et β satisfaisant à la relation

$$\alpha = \operatorname{tang} \beta,$$

que l'on obtient en éliminant x, y et z. Par suite, l'équation de l'héliçoïde est

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} z.$$

EXERCICES.

I. Discuter la courbe que l'on obtient en coupant un tore par un plan *oblique* à l'axe de rotation et passant par le *centre* de la surface. Dans quel cas cette courbe se compose-t-elle du système de deux cercles ?

II. *Théorème.* — L'héliçoïde à plan directeur peut être engendré par une droite qui s'appuie sur une génératrice du cylindre auquel appartient l'hélice directrice.

III. *Théorème.* — Si l'on projette une hélice sur le *plan directeur,* au moyen de droites parallèles à une tangente à cette courbe, la projection sera une cycloïde.

IV Trouver l'équation de l'*héliçoïde développable,* ou du lieu des tangentes à une hélice.

Résultat :

$$x \cos\left(z \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right) + y \sin\left(z \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right) = 1.$$

V. Une circonférence C, de rayon R, *roule* dans l'intérieur d'une circonférence fixe C′, de rayon 2R, en entraînant une circonférence C″ qui a, avec la circonférence C, un diamètre commun, mais dont le plan est perpendiculaire au plan des circonférences C, C′. On demande : 1° quelle est la ligne décrite dans l'espace par un point quelconque lié à la circonférence C″ ; 2° quelle est la surface engendrée par C″.

VI. Discuter les surfaces représentées par les équations

$$z = \frac{y^2 + x^2 - xy}{y^2 - x^2 - xy}, \quad z = \frac{y^2 - 2xy + 2x}{y^2 - 2xy + 2y}, \quad z = \frac{(y-x)^2}{(y+x)^2}.$$

VII. Trouver les sections rectilignes de la surface dont l'équation est

$$x^3+y^3+z^3=1.$$

VIII. $$z=e^x+e^y,\quad z=\log\frac{\cos x}{\cos y},$$

$$z=\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)\ (\textit{héliçoïde rampant}).$$

IX. Une sphère, dont le centre est sur la surface d'un cône de évolution, coupe cette surface suivant une certaine ligne L. Si l'on ait le développement du cône, la ligne L se transforme en une utre ligne L′, dont on demande l'équation.

CHAPITRE XIII.

THÉORIES GÉNÉRALES (*).

De la tangente.

201. On sait que *la projection de la tangente à une courbe est angente à la projection de la courbe* (**). D'après ce théorème, si ne courbe est représentée par

$$x=f(z),\quad y=\varphi(z),\quad (1)$$

s équations de la tangente à cette ligne, au point (x, y, z), sont

$$X-x=f'(z)(Z-z),\quad Y-y=\varphi'(z)(Z-z),\quad (2)$$

u, plus simplement,

$$X-x=x'(Z-z),\quad Y-y=y'(Z-z).\quad (3)\ (***)$$

(*) Les théories contenues dans ce dernier chapitre étant presque inispensables à l'étude de la Mécanique, nous n'avons pas cru devoir les asser sous silence.

(**) *Géométrie descriptive*, seconde partie.

(***) Nous représenterons, dorénavant, par X, Y, Z les coordonnées ourantes, par x, y, z les coordonnées d'un point particulier; x', y' ', etc., désigneront des dérivées (*D. D.*, 134).

202. Passons au cas général d'une courbe représentée par

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0. \quad (4)$$

Dans ces deux équations, x et y sont des fonctions implicites de z. Nous aurons donc (*Alg.*, **214**), en conservant la notation précédente,

$$x'F'_x + y'F'_y + F'_z = 0, \quad x'\Phi'_x + y'\Phi'_y + \Phi'_z = 0. \quad (5)$$

On pourrait résoudre ces dernières équations par rapport à x', y'; après quoi l'on substituerait, dans les équations (3), les valeurs trouvées pour ces deux inconnues; mais il est évidemment plus simple de remplacer, dans les équations (5), x' par $\frac{X - x}{Z - z}$ et y' par $\frac{Y - y}{Z - z}$. On obtient ainsi, pour les équations de la tangente,

$$\left.\begin{aligned} (X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0, \\ (X - x)\Phi'_x + (Y - y)\Phi'_y + (Z - z)\Phi'_z = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Du plan tangent et de la normale.

203. Théorème. — *Les tangentes en un point* M *d'une surface, à toutes les courbes menées de ce point sur la surface, sont situées dans un même plan, appelé plan tangent à la surface.*

Ce théorème résulte immédiatement des équations (6). En effet, chacune de ces équations représente un plan qui passe par le point M (x, y, z), et dont la position dépend *d'une seule* des deux surfaces caractérisées par les fonctions F et Φ. Si donc l'on fait varier cette seconde fonction, on obtiendra différentes courbes, toutes situées sur la première surface, et dont les tangentes appartiendront au premier des deux plans. C'est ce qu'il fallait démontrer (*).

204. Corollaire. — *La tangente en un point de la courbe suivant laquelle se coupent deux surfaces, est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces, en ce point.*

205. La *normale* en un point (x, y, z) d'une surface est la perpendiculaire au plan tangent, en ce point. Conséquemment, si les

(*) Nous laissons de côté certains cas exceptionnels (*Géométrie descriptive*, seconde partie).

axes sont rectangulaires, les équations de la normale seront

$$\frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}=\frac{Z-z}{F'_z}. \quad (7)$$

Des lignes considérées comme trajectoires.

206. On peut regarder une ligne quelconque, plane ou à double courbure, comme *le lieu des positions d'un point* M *qui se meut d'après une loi déterminée :* ce lieu, c'est-à-dire la *trajectoire du point,* sera complétement défini si les coordonnées x, y, z de M sont exprimées en fonction d'un *paramètre* t (*).

D'après cette considération, les équations (4) peuvent être remplacées par

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t). \quad (8)$$

Au moyen de cette convention, la tangente au point M sera représentée par les équations très-symétriques

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}, \quad (9)$$

dans lesquelles x', y', z' désignent les dérivées de x, y, z, relatives à t.

207. *Remarque.* Si $t=z$, les équations (9) ne diffèrent pas des équations (3).

Du plan normal.

208. Le *plan normal* à une courbe, en un point M, est le plan mené par ce point, perpendiculairement à la tangente. De cette définition résulte immédiatement *l'équation du plan normal :*

$$(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0. \quad (10)$$

En effet, cette équation appartient à un plan passant par le point M (x, y, z), et perpendiculaire à la droite représentée par les équations (9).

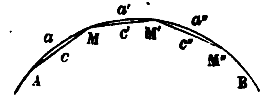
(*) On peut supposer que t représente *le temps,* compté à partir de la *position initiale* du mobile.

Dérivée de l'arc.

209. Lemme. — *La différence entre un petit arc de courbe et la corde correspondante peut devenir aussi petite que l'on voudra par rapport à l'arc.*

La différence $a - c$ entre l'arc a et la corde c peut évidemment être représentée par af: il s'agit de démontrer que la *fraction* f s'annule avec a, ou qu'elle a pour limite zéro.

Si cette limite était différente de zéro, la fraction f surpasserait, à chaque instant, une certaine constante positive k, et l'on aurait



$$a - c > ak.$$

Appliquons cette inégalité aux différents *éléments* a, a', a'',..., d'un arc quelconque AB; il en résultera

$$(a + a' + a'' + \ldots) - (c + c' + c'' + \ldots) > (a + a' + a'' + \ldots)k;$$

ou, en désignant par A la longueur de AB, et par P le périmètre du polygone inscrit AMM'... B :

$$A - P > Ak.$$

Quand le nombre des points de division M, M', M",..., augmente indéfiniment, le périmètre P tend vers *sa limite* A; donc la dernière inégalité est absurde, etc.

210. Corollaires. — I. *La différence entre l'arc a et sa corde c a la forme $a\varepsilon$, ε ayant pour limite zéro.*

II. *Le rapport de l'arc à la corde, qui décroît avec l'arc, a pour limite l'unité* (*).

En effet, de $a - c = a\varepsilon$, on conclut

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

211. Théorème. — *La dérivée s' d'un arc de courbe, et les dérivees x', y', z des coordonnées du point* M *qui le termine, sont liées par l'équation*

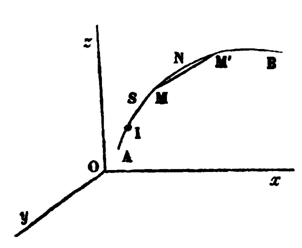
$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (11)$$

(*) Le théorème sur la limite du rapport entre un arc et son sinus est un cas particulier de celui-ci.

Soient, comme précédemment

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t),\quad (8)$$

les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe AB. Soit s la longueur d'un arc IM de AB, cet arc étant compté à partir d'une certaine *origine* I. La quantité s est évidemment une fonction de la *variable indépendante* t : nous allons démontrer que cette fonction est définie par l'équation (11).



Soit M' un point de AB, aussi voisin qu'on le voudra de M; soient

$$x+\Delta x,\quad y+\Delta y,\quad z+\Delta z,\quad s+\Delta s,$$

les valeurs de x, y, z, s relatives à ce nouveau point. En représentant par c la corde MM', on aura, les axes étant rectangulaires,

$$c^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2;$$

ou, à cause de $c=(1-\varepsilon)\Delta s$ (210), et en divisant les deux membres par $(\Delta t)^2$:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2(1-\varepsilon)^2=\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2.$$

Passant à la limite, et ayant égard au corollaire I, on obtient l'équation (11).

212. *Remarques.* — I. Le problème de la *rectification des courbes* consiste à trouver la fonction s, connaissant sa dérivée s' : il ne diffère pas du problème des *quadratures* (*D. D.*, 344).

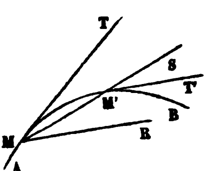
II. D'après les équations (9) et (11), les cosinus des angles α, β, γ, que fait la tangente avec les axes, sont donnés par les formules

$$\cos\alpha=\frac{x'}{s'},\quad \cos\beta=\frac{y'}{s'},\quad \cos\gamma=\frac{z'}{s'}.\quad (12)$$

Du plan osculateur.

213. *Définition.* — Le plan osculateur à une courbe AB, en un point M, est la limite vers laquelle tend le plan passant par la tan-

gente MT et par la sécante MM'S, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment de M (*).



214. *Remarque.* — Si l'on mène MR parallèle à la tangente M'T', le plan TMR se confondra, à la limite, avec le plan osculateur.

En effet, l'angle SM'T' a pour limite zéro; donc l'angle des plans TMS, TMR a également pour limite zéro.

215. *Équation du plan osculateur.* — Pour la trouver, nous commencerons, en nous appuyant sur la dernière remarque, par former l'équation du plan TMR.

Soit $$A(X-x)+B(Y-y)+Z-z=0 \quad (\alpha)$$

cette équation. Les tangentes MT, M'T' font, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à x', y', z', et à $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ (**). Donc (41)

$$Ax'+By'+z'=0,$$
$$A(x'+\Delta x')+B(y'+\Delta y')+z'+\Delta z'=0;$$

ou, plus simplement,

$$Ax'+By'+z'=0, \quad (\beta) \qquad A\Delta x'+B\Delta y'+\Delta z'=0. \quad (\gamma)$$

L'élimination de A et de B, entre les équations (β), (γ), (α), donne ensuite

$$\begin{aligned}&(y'\Delta z'-z'\Delta y')(X-x)\\ +&(z'\Delta x'-x'\Delta z')(Y-y)\\ +&(x'\Delta y'-y'\Delta x')(Z-z)=0.\end{aligned}$$

Divisant tous les termes par Δt, et passant à la limite, nous trouvons enfin l'*équation du plan osculateur :*

$$\left.\begin{aligned}&(y'z''-z'y'')(X-x)\\ +&(z'x''-x'z'')(Y-y)\\ +&(x'y''-y'x'')(Z-z)=0.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

(*) Le plan osculateur d'une courbe plane est évidemment le plan même de cette ligne.

(**) Il est à peine besoin de rappeler que $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ représentent les *accroissements des fonctions* x', y', z', correspondant à l'accroissement Δt de la variable t.

Du cercle osculateur.

216. *Définition.* — Le cercle osculateur à une courbe AB, en un point M, est la limite des cercles ayant, avec cette courbe, une tangente commune MT, et passant par un point M′ voisin de M.

217. *Axe du cercle osculateur.* — Ce cercle, évidemment situé dans le plan osculateur de la courbe, serait déterminé si l'on en connaissait *l'axe*, c'est-à-dire la droite menée par le centre, perpendiculairement au plan osculateur.

L'axe du cercle quelconque dont le cercle osculateur est la limite, est l'intersection du plan normal en M avec le plan perpendiculaire au milieu de MM′; mais, l'emploi de ce dernier plan conduisant à des transformations assez difficiles à saisir, nous admettrons, pour abréger et simplifier, que *l'axe du cercle osculateur est la limite vers laquelle tend l'intersection du plan normal en* M *avec le plan normal en* M′ (*).

L'équation du plan normal en M étant

$$(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0, \quad (10)$$

si l'on y remplace x, y, z, x', y', z' par leurs valeurs en fonction de t, elle prendra la forme

$$F(X, Y, Z, t)=0.$$

L'équation du plan normal en M′ sera donc

$$F(X, Y, Z, t+\Delta t)=0;$$

et l'intersection des deux plans pourra être représentée, soit par ces deux équations, soit par la première jointe à

$$\frac{F(X, Y, Z, t+\Delta t)-F(X, Y, Z, t)}{\Delta t}=0.$$

A la limite, cette dernière équation devient (**)

$$F'_t(X, Y, Z, t)=0.$$

(*) Cette proposition peut être rigoureusement démontrée.

(**) La transformation précédente est celle dont on fait usage pour établir la *théorie des enveloppes*.

Ainsi, *l'axe du cercle osculateur est représenté par l'équation du plan normal et par l'équation dérivée de celle-ci.*

Cette équation dérivée est, à cause de la formule (11)

$$(X-x)x''+(Y-y)y''+(Z-z)z''=s'^2. \quad (14)$$

218. *Remarque.* — Le *centre* du cercle osculateur a pour coordonnées les valeurs de X, Y, Z qui vérifient les équations (10), (13) et (14).

219. *Rayon du cercle osculateur* (*). — Posons, dans ces équations,

$$X-x=\rho\cos\lambda,\quad Y-y=\rho\cos\mu,\quad Z-z=\rho\cos\nu:$$

ρ représente la distance comprise entre le point M de la courbe AB et le centre C du cercle osculateur, c'est-à-dire le rayon de ce cercle; λ, μ, ν sont les angles que fait *la direction* MC avec les parties positives des axes. Nous aurons ainsi

$$x'\cos\lambda+y'\cos\mu+z'\cos\nu=0,$$
$$(y'z''-z'y'')\cos\lambda+(z'x''-x'z'')\cos\mu+(x'y''-y'x'')\cos\nu=0,$$
$$[x''\cos\lambda+y''\cos\mu+z''\cos\nu]\rho=s'^2. \quad (\delta)$$

Les deux premières équations donnent,

$$\frac{\cos\lambda}{z'(z'x''-x'z'')-y'(x'y''-y'x'')}$$
$$=\frac{\cos\mu}{x'(x'y''-y'x'')-z'(y'z''-z'y'')}$$
$$=\frac{\cos\nu}{y'(y'z''-z'y'')-x'(z'x''-x'z'')},$$

ou

$$\frac{\cos\lambda}{x''(y'^2+z'^2)-x'(y'y''+z'z'')}$$
$$=\frac{\cos\mu}{y''(z'^2+x'^2)-y'(z'z''+x'x'')}$$
$$=\frac{\cos\nu}{z''(x'^2+y'^2)-z'(x'x''+y'y'')}.$$

(*) Pour une raison que nous ne pouvons indiquer ici, ce rayon est 'á aussi *rayon de courbure.*

A cause de la relation

$$x'^2+y'^2+z'^2=s'^2, \quad (11)$$

qui conduit à $\qquad x'x''+y'y''+z'z''=s's'',$

nous pouvons encore remplacer les égalités précédentes par cel-les-ci :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos\lambda}{s'x''-x's''}=\frac{\cos\mu}{s'y''-y's''}=\frac{\cos\nu}{s'z''-z's''}\\ =\frac{1}{s'\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}\end{aligned}\right\} \quad (15)\,(*);$$

n sorte que les trois cosinus sont déterminés.

Substituant leurs valeurs dans l'équation (δ), on obtient enfin

$$\rho=\frac{s'^2}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}. \quad (16)$$

220. *Remarque*. — On conclut aisément, des formules (2) et les équations (15) et (16) :

$$\frac{\cos\lambda}{(\cos\alpha)'}=\frac{\cos\mu}{(\cos\beta)'}=\frac{\cos\nu}{(\cos\gamma)'}=\frac{\rho}{s'}, \quad (17)$$

es accents indiquant des dérivées relatives à t.

EXERCICES.

I. Dans le cas de l'hélice, représentée par

$$x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=t,$$

n trouve :

1°. *Équations de la tangente :*

$$\frac{X-\cos t}{-\sin t}=\frac{Y-\sin t}{\cos t}=Z-t;$$

(*) En effet, la somme des carrés des trois premiers dénominateurs st

$$(x'^2+y'^2+z'^2)s''^2-2(x'x''+y'y''+z'z'')s's''+(x''^2+y''^2+z''^2)s'^2$$
$$=s'^2s''^2-2s'^2s''^2+(x''^2+y''^2+z''^2)s'^2; \text{ etc.}$$

2°. *Équation du plan normal :*

$$-X\sin t + Y\cos t + Z - t = 0;$$

3°. $$s' = \sqrt{2};$$

4°. $$\cos\alpha = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}},\quad \cos\beta = \frac{\cos t}{\sqrt{2}},\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

5°. *Équation du plan osculateur :*

$$X\sin t - Y\cos t + Z - t = 0;$$

6°. $\cos\lambda = -\cos t,\quad \cos\mu = -\sin t,\quad \cos\nu = 0,\quad \rho = 2$ (*).

II. Appliquer les formules (9), (10),..., (17) à l'*hélice conique*, dont les équations sont

$$x = t\cos t,\quad y = t\sin t,\quad z = t.$$

III. Un point parcourt une circonférence pendant que celle-ci tourne autour d'un de ses diamètres, supposé fixe. La *vitesse angulaire* du point est égale à la *vitesse de rotation* de la circonférence. On demande : 1° les équations de la trajectoire; 2° l'équation du plan osculateur de cette ligne; 3° l'expression de son rayon de courbure; etc.

IV. Un conoïde, circonscrit à une sphère, a pour directrice rectiligne une *tangente* à cette surface, perpendiculaire au plan directeur du conoïde. On demande : 1° l'équation du conoïde; 2° les équations de la courbe suivant laquelle il touche la sphère; etc.

Résultats :

1°. *Équation du conoïde :*

$$(x^2+y^2)z^2 - R^2x^2 = 0.$$

2°. *Équations de la courbe de contact :*

$$(x^2+y^2)z^2 - R^2x^2 = 0,\quad x^2+y^2+z^2 - 2Rx = 0;$$

ou $$z^2 - Rx = 0,\quad x^2+y^2 - Rx = 0 \ (^{**});$$

(*) On déduit, des dernières valeurs, que *l'hélice donnée, et le lieu de ses centres de courbure, sont deux courbes symétriques par rapport à l'axe du cylindre.*

(**) Les projections de cette courbe, sur deux des *plans principaux* du conoïde, sont donc *une parabole* et *un cercle*.

ou encore $x = R\sin^2 t,\quad y = R\sin t\cos t,\quad z = R\sin t$ (*).

3°. *Équation du plan osculateur :*

$$X\sin t\,(3\cos^2 t + \sin^2 t) + 2Y\cos^3 t - 2Z + R\sin^3 t = 0.$$

4°. *Rayon de courburc :*

$$\rho = R\,\frac{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5+3\cos^2 t}}.$$

(*) Les dernières valeurs montrent que *la courbe de contact de la sphère et du conoïde est* précisément *la trajectoire proposée* dans la question III. Des considérations géométriques très-simples conduisent au même résultat.

Cette même courbe jouit d'une propriété curieuse, découverte par Viviani : *Si l'on considère le triangle sphérique ayant pour côtés deux quadrants perpendiculaires et la demi-trajectoire passant par leurs extrémités, ce triangle est équivalent au carré du rayon de la sphère.*

MÉCANIQUE.

CHAPITRE Ier.

INTRODUCTION.

Notions préliminaires.

1. Les *corps* sont ordinairement considérés comme des assemblages de parties très-petites, de forme invariable, physiquement indivisibles, appelées *atomes, molécules* (*) ou *points matériels.*

2. Il paraît impossible de définir, d'une manière satisfaisante, soit le *temps,* soit l'*espace.* Malgré cette impossibilité, on conçoit clairement que : *tout corps occupe dans l'espace, à chaque instant, un lieu déterminé.*

3. Si ce lieu est invariable, au moins *pendant un certain temps,* et si chacune des parties du corps participe à cette invariabilité, le corps est dit *en repos;* dans le cas contraire, on dit qu'il est *en mouvement.* En d'autres termes :

Un corps est en repos si chacune de ses parties occupe un lieu invariable; il est en mouvement si quelqu'une de ses parties occupe, successivement, divers lieux dans l'espace.

4. *Remarques.* — I. Le repos et le mouvement, tels que nous venons de les considérer, sont appelés *repos absolu* et *mouvement absolu.* Mais, comme *l'espace est infini,* nous ne pouvons juger de la position d'un corps qu'en le rapportant à d'autres corps ou à nous-mêmes : tous les mouvements que nous observons sont donc des *mouvements relatifs.* A plus forte raison, nous ne pouvons connaître que le *repos relatif.* Quand nous affirmons qu'un meuble, placé dans une chambre, est en repos, nous voulons exprimer

(*) La distinction entre les atomes et les molécules, bonne quand on étudie les corps au point de vue de la Physique ou de la Chimie, est inutile en Mécanique.

seulement que ce meuble ne change pas de situation à l'égard des parois de la chambre : en réalité, le meuble, aussi bien que la chambre, participe au mouvement de rotation de la terre, à son mouvement de translation autour du soleil et au mouvement de translation du système solaire. Le *repos absolu* est donc peut-être une simple abstraction.

II. Pour qu'un corps soit en repos, même en repos relatif, il ne suffit pas que sa surface extérieure conserve une position invariable; il faut encore que chacune de ses parties soit immobile. Une sphère dont le centre serait fixe, et qui, par conséquent, semblerait en repos, pourrait cependant avoir des mouvements plus ou moins compliqués.

III. L'idée de mouvement entraîne celle de *continuité :* on ne comprendrait pas qu'un point matériel eût occupé deux positions différentes A, B, sans avoir décrit, dans l'espace, une certaine ligne terminée par A et par B. Cette ligne est ce qu'on appelle la *trajectoire* du point.

5. La *Mécanique* est la science du mouvement.

De la mesure du temps.

6. Bien qu'on ne puisse pas *définir* le temps (2), il est facile de concevoir des *temps égaux*, et, par suite, d'arriver à la notion de la *mesure du temps.*

Supposons, en effet, que des corps A, B, C, D, ..., *identiques* de forme, de composition, de volume, etc., soient successivement mis en mouvement, dans des circonstances *identiques,* à cela près que le mouvement de B commence quand cesse celui de A, que le mouvement de C commence quand cesse celui de B, etc. : les temps pendant lesquels s'exécuteront ces mouvements successifs seront dits *égaux entre eux.*

Pour fixer les idées, admettons que les corps A, B, C,... soient des sphères pesantes, égales entre elles, suspendues par des fils égaux et également inclinées sur la verticale. Si nous abandonnons à l'action de la pesanteur la sphère A, le fil qui la soutenait se rapprochera de la verticale pour s'en écarter ensuite; quand il aura effectué une *oscillation* complète, c'est-à-dire quand il cessera de s'écarter de la verticale, abandonnons à l'action de la pesanteur la sphère B : la *durée de l'oscillation* de celle-ci sera égale à la du-

de la première oscillation. En continuant de la même manière, on voit que les sphères A, B, C, D,... exécutent leurs oscillations consécutives dans des temps égaux, et que les temps pendant lesquels s'effectuent deux, trois, quatre,... oscillations, sont doubles, triples, quadruples,... de la durée d'une seule oscillation.

7. Chacun des appareils dont nous venons de donner l'idée est ce qu'on appelle un *pendule*. Si le corps pesant est réduit à un point matériel, et que le fil de suspension soit inextensible et sans pesanteur, l'appareil, qui devient alors purement idéal, prend le nom de *pendule simple : un pendule simple est* donc *un point matériel pesant, suspendu à l'extrémité inférieure d'un fil inextensible et sans pesanteur, dont l'autre extrémité est fixe.* On appelle, en général, *pendule composé,* tout corps solide pesant, qui oscille autour d'un axe horizontal fixe.

8. Que le pendule soit simple ou composé, ses oscillations s'exécutent dans des temps égaux, c'est-à-dire qu'elles sont *isochrones* (*). Il n'est donc pas nécessaire, pour mesurer un temps quelconque, d'employer, comme nous l'avions supposé tout à l'heure, plusieurs pendules A, B, C, D,... oscillant successivement; il suffit de compter le nombre des oscillations exécutées, pendant ce temps, par un pendule unique.

9. La durée du jour *sidéral* n'ayant pas varié d'une manière appréciable depuis les plus anciennes observations, elle pourrait être prise comme unité de temps; et, pour évaluer les *fractions de jour,* on compterait le nombre des oscillations effectuées par un pendule quelconque, pendant le temps donné et pendant un jour sidéral. Néanmoins, on a trouvé plus commode de prendre pour unité le *jour solaire moyen,* et de le partager en 86400 secondes sexagésimales. En outre, on a adopté pour *pendule-étalon* celui qui exécute son oscillation en une seconde, ou qui bat 86400 oscillations en un jour solaire moyen.

(*) Cette proposition n'est pas vraie d'une manière absolue : par suite de la résistance de l'air, des frottements, etc., l'*amplitude* des oscillations diminue de plus en plus, et le pendule finit par s'arrêter.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT D'UN POINT.

Mouvement uniforme.

10. Nous avons déjà vu que l'on appelle *trajectoire* d'un point matériel la ligne décrite par ce point dans l'espace. Suivant que la trajectoire est droite ou courbe, le mouvement est dit *rectiligne* ou *curviligne*.

11. Au lieu de considérer, dans le mouvement d'un point matériel, la nature de la trajectoire, on peut étudier la *relation* qui existe *entre l'espace parcouru* par le mobile, compté à partir d'une certaine origine, *et le temps* correspondant. Cette relation est la plus simple possible quand *le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux*, auquel cas le mouvement est dit *uniforme*.

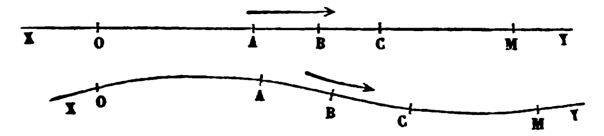
12. Il résulte, de cette définition du mouvement uniforme, que si le mobile a parcouru un certain espace dans un temps donné, il parcourra un espace double, triple, quadruple,... dans un temps double, triple, quadruple,... : autrement dit, *les espaces parcourus sont proportionnels au temps*. Par suite, *si l'on divise l'espace parcouru,* quel qu'il soit, *par le temps employé à le parcourir, on devra trouver un quotient constant : ce quotient,* évidemment *égal à l'espace parcouru dans l'unité de temps, est ce qu'on appelle la vitesse du mobile* (*).

13. Si, comme on le suppose habituellement (9), l'unité de temps est la seconde sexagésimale, on aura, pour *valeur de la vitesse,* dans un mouvement uniforme quelconque, *l'espace parcouru par le mobile en une seconde.*

14. Il nous est bien facile actuellement d'obtenir la *formule du*

(*) « Pour parler exactement, cet espace n'est que la mesure de la vitesse, et non pas la vitesse elle-même. La vitesse d'un point matériel en mouvement est une chose qui réside dans ce point, dont il est animé, qui le distingue actuellement d'un point matériel en repos, et n'est pas susceptible d'une autre définition. » (Poisson, *Traité de Mécanique*.)

mouvement uniforme, c'est-à-dire la relation entre l'espace et le temps. En effet, soient XY la trajectoire du point matériel M;



O l'*origine des espaces*, ou le point fixe à partir duquel sont comptées les distances; A la position du mobile à l'*origine des temps* (*) : si nous appelons a la distance OA, et si nous désignons par b chacun des espaces égaux AB, BC,... parcourus dans l'unité de temps, nous aurons, pour expression de la distance x à laquelle sera le mobile M, au bout d'un nombre quelconque t d'unités de temps,

$$x = a + bt. \quad (1)$$

15. *Remarques.* — I. Dans cette formule, b, espace parcouru dans l'unité de temps, est la vitesse (**).

II. Si l'on supposait que le mobile fût parti du point A, *x ne représenterait plus un espace parcouru :* pour rendre la formule plus générale, il vaut mieux admettre que *le point matériel* M *se meut, depuis un temps indéfini, sur sa trajectoire* XY, *et qu'il a passé en* A *à l'origine des temps.*

III. L'équation (1) a été obtenue en supposant que le mouvement avait lieu dans le sens indiqué par la flèche; s'il s'exécute en sens contraire, la formule propre à le représenter ne différera de la première que par le changement de b en $-b$. On peut donc employer cette formule (1) dans tous les cas, pourvu que l'on convienne de regarder une vitesse comme positive ou comme négative, suivant que le mouvement a lieu dans un sens ou dans le sens opposé.

16. Si l'origine des espaces correspond à l'origine des temps, $a = 0$, et l'équation (1) se réduit à

$$x = bt. \quad (2)$$

(*) Ordinairement, A est la *position initiale du mobile ;* mais cela n'est pas nécessaire.

(**) On verra plus loin ce qu'on doit entendre par *direction* de la vitesse, dans le cas d'un mouvement curviligne.

Dans cette nouvelle formule, x *représente* véritablement *l'espace parcouru pendant le temps t* (*); aussi la vitesse b a-t-elle pour expression $\frac{x}{t}$.

Mouvement varié.

17. *Un mouvement varié* est celui qui n'est *ni uniforme, ni composé de mouvements uniformes*. Il est évident que, pour une même trajectoire, on peut imaginer une infinité de mouvements variés : chacun d'eux sera déterminé quand on donnera *la relation* $\varphi(x, t) = 0$ *qui existe entre l'espace et le temps* (11). Par exemple,

$$x = t^2 - 3t + 2, \quad (1)$$

$$x = \frac{1+t}{1+t^2}, \quad (2)$$

$$x = \sin t, \quad (3)$$

sont les formules d'autant de mouvements, très-différents les uns des autres. En effet, on reconnaît sans peine que :

1°. Dans le mouvement déterminé par la formule (1), le temps t variant de $-\infty$ à $+\infty$, l'espace x varie de $+\infty$ à $-\frac{1}{4}$, et de $-\frac{1}{4}$ à $+\infty$;

2°. Dans la deuxième formule,

t variant de $-\infty$ à $-(1+\sqrt{2})$, x varie de 0 à $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$;

t variant de $-(1+\sqrt{2})$ à -1, x varie de $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ à 0;

t variant de -1 à $\sqrt{2}-1$, x varie de 0 à $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$;

t variant de $\sqrt{2}-1$ à $+\infty$, x varie de $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ à 0 (**).

(*) C'est-à-dire, *pendant un temps dont le rapport à l'unité est représenté par t*.

(**) La discussion des formules (1) et (2) est toute semblable à celle que l'on rencontre dans les questions de maximum et de minimum. (*B., Alg.*)

3°. Le mouvement représenté par la formule (3) est périodique, c'est-à-dire que si l'on fait croître t de $-\infty$ à $+\infty$, l'espace x, toujours compris entre $+1$ et -1, repassera indéfiniment par les mêmes valeurs : cette formule indique donc un mouvement de *va-et-vient*, analogue à celui d'un *factionnaire*.

18. *Courbe des espaces.* — La théorie des coordonnées et des lieux géométriques peut être utilement appliquée à l'étude du mouvement d'un point matériel. En effet, si l'on prend des abscisses proportionnelles aux temps et des ordonnées proportionnelles aux espaces correspondants, le lieu de l'équation $\varphi(x, t) = 0$, lieu auquel on donne le nom de *courbe des espaces*, indique à chaque instant la situation du mobile sur la trajectoire. Ainsi, suivant que l'ordonnée d'un point de la première courbe est *positive* ou *négative*, le mobile est *à droite* ou *à gauche* de l'origine des espaces; suivant que l'ordonnée *croît* ou *décroît*, le mobile *s'éloigne* ou *se rapproche* de cette origine; etc. (*). Les mouvements considérés ci-dessus (17) seraient représentés, respectivement, par une parabole ordinaire, par une courbe du troisième degré, et par une sinusoïde.

19. *Remarque.* — Souvent l'équation $\varphi(x, t) = 0$ est remplacée par une *table numérique* donnant certaines valeurs de t et les valeurs correspondantes de x, fournies par l'observation directe. Alors, pour construire la courbe des espaces, on effectue une véritable *interpolation* (*Alg.*, 353).

CHAPITRE III.

DE LA VITESSE.

20. *Vitesse moyenne.* — On a vu, plus haut, ce qu'on appelle vitesse dans un mouvement uniforme. Pour arriver à la définition de la vitesse dans un mouvement varié quelconque, nous considérerons d'abord la *vitesse moyenne* dans un mouvement composé de

---

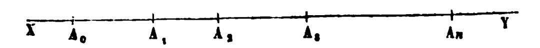
(*) On verra bientôt que cette construction graphique donne aussi la vitesse du mobile, *en grandeur* et *en signe*.

mouvements uniformes; et, à cet effet, nous nous proposerons la question suivante :

Un mobile a parcouru, successivement,

La partie	A_0A_1	*de sa trajectoire,*	*avec une vitesse constante*	v_1,
»	A_1A_2	»	»	v_2,
»	A_2A_3	»	»	v_3,
.....	.....	.....	.....	.....
»	$A_{n-1}A_n$	»	»	v_n;

quelle serait la vitesse V *d'un second mobile qui parcourrait, d'un mouvement uniforme, la trajectoire* A_0A_n, *de manière à rencontrer le premier mobile aux extrémités* A_0, A_n *de cette ligne ?*



Soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les temps employés par le premier mobile à parcourir les espaces A_0A_1, $A_2A_3, \ldots$, $A_{n-1}A_n$. La formule du n° 16 donnera, *puisque les mouvements sont uniformes,*

$$A_0A_1 = v_1t_1, \quad A_1A_2 = v_2t_2, \ldots, \quad A_{n-1}A_n = v_nt_n.$$

D'un autre côté, le second mobile doit parcourir uniformément l'espace A_0A_n, dans un temps égal à $t_1+t_2+\ldots+t_n$; la vitesse V de son mouvement, ou la *vitesse moyenne* cherchée, a donc pour valeur

$$V = \frac{A_0A_n}{t_1+t_2+\ldots+t_n};$$

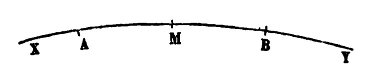
ou, ce qui est équivalent,

$$V = \frac{v_1t_1+v_2t_2+\ldots+v_nt_n}{t_1+t_2+\ldots+t_n}.$$

On reconnaît, dans le second membre, une expression analogue à celle que donnerait la *règle de société* ou plutôt la *règle des moyennes. La vitesse moyenne* V, dans un mouvement composé de mouvements uniformes, *est donc égale à la moyenne des vitesses.*

21. *Définition de la vitesse.* — Considérons à présent un mouvement varié quelconque, et soient A, B, les positions occupées

par le mobile au bout des temps t, $t+\Delta t$. *Si l'on divise* la distance $AB=\Delta x$, c'est-à-dire l'*accroissement de l'espace*, par Δt, ou par l'*accroissement du temps, on aura la vitesse moyenne* relative à la partie AB de la trajectoire. Cette vitesse est celle d'*un mobile auxiliaire m* qui, partant du point A en même temps que le mobile M, arriverait avec celui-ci en B, après avoir parcouru uniformément la ligne AB. On comprend, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, que le mouvement du mobile auxiliaire différera d'autant moins du mouvement de l'autre mobile, que l'intervalle Δt sera plus petit. Pour cette raison, on appelle *vitesse du mobile* M, *au bout du temps t, la limite v vers laquelle tend sa vitesse moyenne* $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, *lorsque les accroissements de l'espace et du temps convergent vers zéro.*



22. *Mesure de la vitesse.* — Si la *relation entre l'espace et le temps* est donnée sous la forme $x=f(t)$, on aura

$$v=\lim\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=\lim\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t);$$

donc *la vitesse, dans un mouvement varié quelconque, a pour mesure la dérivée de l'espace, par rapport au temps* (*).

Ainsi, dans les trois mouvements considérés ci-dessus, déterminés par les relations

$$x=t^2-3t+2,\quad x=\frac{1+t}{1+t^2},\quad x=\sin t,$$

les (**) vitesses sont, respectivement,

$$v=2t-3,\quad v=\frac{1-2t-t^2}{(1+t^2)^2},\quad v=\cos t.$$

23. Un mouvement est dit *accéléré* ou *retardé*, suivant que sa vitesse augmente ou diminue avec le temps. Dans le premier des trois exemples précédents, le mouvement est sans cesse accéléré,

---

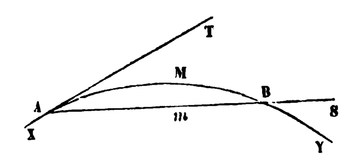
(*) Cet énoncé suppose que l'espace et le temps ont été remplacés par leurs mesures respectives, c'est-à-dire par des nombres.

(**) Pour abréger, on dit : *la vitesse*, au lieu de : *la mesure de la vitesse*. (*Voyez* la note du n° **12**.)

parce que la quantité $2t-3$ augmente avec t. La discussion du deuxième exemple montre que, le temps croissant de $-\infty$ à $+\infty$, le mouvement est d'abord *retardé*, puis *accéléré*, puis de nouveau *retardé*, puis enfin *accéléré*. Quant à la formule $v=\cos t$, elle montre clairement que le mouvement est *périodique*, ce que nous savions déjà (17, 3°).

24. *Représentation graphique de la vitesse.* — De la formule $v=f'(t)$, on conclut immédiatement que *la vitesse est représentée, en grandeur et en signe, par le coefficient angulaire de la tangente à la courbe des espaces* (18). La construction de cette courbe fait donc connaître, non-seulement *la situation du mobile sur sa trajectoire* (18), mais encore *la vitesse dont il est animé actuellement, et le sens dans lequel il se meut*; de sorte que la discussion complète du mouvement d'un point dont la trajectoire est supposée connue, se réduit à un simple exercice graphique.

25. *Direction de la vitesse.* — Reprenons les hypothèses établies dans le n° 21, mais admettons que le *mobile auxiliaire m*, au lieu de parcourir l'arc AMB, décrive la corde AB. Sa vitesse, pour chacune des positions attribuées au point B, est dirigée suivant la sécante ABS, dont la limite est la tangente AT. Par conséquent, *la direction de la vitesse d'un point matériel est, à chaque instant, la direction de la tangente à la trajectoire* (*).



26. Problème. — *Connaissant la vitesse* (en fonction du temps), *trouver l'espace.*

Ce problème consiste évidemment à *remonter de la dérivée* $f'(t)$, *à la fonction primitive* $f(t)$ (*Alg.*, 227). Nous le résoudrons dans quelques cas simples.

(*) La considération du *mouvement suivant la corde* AB conduit à la mesure de la vitesse trouvée ci-dessus. En effet,

$$\frac{AB}{\Delta t}=\frac{\Delta x(1-\varepsilon)}{\Delta t}\ (T.\ D.,\ 210);$$

donc

$$\lim\frac{AB}{\Delta t}=\lim\frac{\Delta x}{\Delta t}=v.$$

1°. $v = \frac{t}{1+t^2}$. Cette formule donne

$$x = \frac{1}{2} l(1+t^2) + \text{const.}$$

Pour que le mouvement soit complétement déterminé, il faut que l'on connaisse un système de valeurs de x et de t. Si, par exemple, $x = 0$ *pour* $t = 0$, auquel cas *l'origine des espaces correspond à l'origine des temps*, la *constante arbitraire* est nulle, et

$$x = \frac{1}{2} l(1+t^2).$$

2°. $v = \sin 2t - \sin t$; d'où

$$x = -\frac{1}{2}\cos 2t + \cos t + \text{const.}$$

En supposant $t = 0$ pour $x = 0$, on trouve

$$x = 2\cos t \sin^2 \frac{1}{2} t.$$

Le mouvement est oscillatoire : la valeur de x varie entre -2 et $+\frac{1}{4}$; les maximums et les minimums de vitesse répondent à

$$\cos t = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}; \text{ etc.}$$

3°. $v = \frac{t^4+1}{t^6+1}$. On trouve (*Alg.*, 441)

$$x = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tang} \frac{3t(1-t^2)}{t^4 - 4t^2 + 1},$$

en supposant encore que l'origine des espaces corresponde à l'origine des temps. Nous engageons le lecteur à faire la discussion de ces deux formules.

EXERCICES.

I. Étudier les mouvements définis par les équations

$$x = \frac{1}{3}\sin^3 t, \quad x = \frac{\sin t}{2+\cos t}, \quad x = \frac{t}{e^t - e^{-t}}, \quad x = \frac{t^3 - 7t + 6}{(t^2+1)^2};$$

construire, pour chacun d'eux, la courbe des espaces et la courbe des vitesses.

II. Mêmes questions pour les mouvements définis par les formules

$$v = \sin t + \sin 2t - \sin 3t, \quad v = \frac{t^2+1}{t^4+1},$$

$$v = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad v = \frac{1-t}{e^t}.$$

CHAPITRE IV.

DU MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ.

27. Après le mouvement uniforme, le plus aisé à étudier est le *mouvement uniformément varié,* dans lequel *la relation entre la vitesse et le temps* est

$$v = b + ct, \quad (1)$$

b et c étant des *constantes* données. De ces deux quantités, la première, égale à la valeur de v correspondant à $t = 0$, est appelée, pour cette raison, *vitesse initiale;* l'autre est l'*accélération,* c'est-à-dire *la quantité dont la vitesse augmente ou diminue dans l'unité de temps.*

28. *Remarques.* — I. *Quand la vitesse augmente avec le temps,* c'est-à-dire *quand l'accélération c est positive,* le mouvement est dit *uniformément accéléré;* dans le cas contraire, il est *uniformément retardé.*

II. Soient t_0, t_1 deux valeurs de t, et v_0, v_1 les valeurs correspondantes de v. On aura, par la formule (1),

$$v_1 - v_0 = c(t_1 - t_0),$$

ou

$$c = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}.$$

Ainsi, *dans tout mouvement uniformément varié, l'accélération est égale à l'accroissement de la vitesse, divisé par l'accroissement du temps.*

29. La formule (1) donne (**26**)

$$x = a + bt + \frac{1}{2}ct^2. \quad (2)$$

La constante arbitraire a est évidemment *l'arc de trajectoire compris entre la position initiale du mobile et l'origine des espaces.*

30. Si l'on compte les espaces à partir de cette position initiale, $a = 0$, et la formule (2) devient

$$x = bt + \frac{1}{2}ct^2. \quad (3)$$

31. Admettons, en outre, que *la vitesse initiale b soit nulle* : les équations (3) et (1) se réduiront à

$$x = \frac{1}{2}ct^2, \quad (\text{A}) \qquad v = ct. \quad (\text{B})$$

Ces dernières formules mettent en évidence les propriétés suivantes, qui appartiennent à tout mouvement uniformément accéléré (*), quand l'origine des espaces se confond avec la position initiale du mobile, et que celui-ci n'a pas de vitesse initiale :

1°. *La vitesse acquise est proportionnelle au temps.*

2°. *L'espace parcouru est proportionnel au carré du temps.*

3°. *La vitesse acquise au bout de la première unité de temps est égale au double de l'espace parcouru pendant ce laps de temps.*

Pour vérifier cette troisième loi, il suffit d'observer que, si l'on fait $t = 1$ dans les formules (B), (A), elles donnent

$$v = c, \quad 2x = c.$$

Chute des corps pesants.

32. Les lois que nous venons d'énoncer sont celles qui président au mouvement des corps pesants ou *corps graves*, tombant dans le vide, sans vitesse initiale. L'accélération c, relative à ce cas naturel, est ordinairement représentée par la lettre g, initiale du mot

(*) Il est toujours permis de supposer que le mouvement auquel se rapportent ces deux formules est *accéléré*; en effet, on peut compter les espaces dans le sens de ce mouvement, et alors la constante c est positive.

gravité. On a trouvé $g = 9,80896$. En adoptant ce résultat de l'expérience, nous pouvons dire que : *un corps tombant librement dans le vide, sans vitesse initiale, parcourt, dans la première seconde de sa chute, un espace égal à* $4^m,90448$; *sa vitesse, à la fin de ce laps de temps, est égale* à $9^m,80896$ (*).

De plus, si h représente la hauteur d'où le corps est tombé, on aura, au lieu des formules (A), (B),

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad (C) \qquad v = gt. \quad (D)$$

33. En éliminant t entre ces deux équations, on obtient

$$h = \frac{v^2}{2g}, \quad (E)$$

ou

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (F)$$

Cette dernière formule donne *la vitesse* v DUE *à la hauteur* h : on voit que *la vitesse* DUE *croît proportionnellement à la racine carrée de la hauteur*. Ainsi, *quand les espaces parcourus par le corps qui tombe croissent comme les nombres* 1, 4, 9, 16, 25,...; *les vitesses acquises croissent comme les nombres* 1, 2, 3, 4, 5,..., c'est-à-dire qu'*elles sont proportionnelles aux temps employés à parcourir ces espaces* (31).

34. Les relations (A) ou (C) donnent lieu à cette autre remarque : *les espaces que parcourt le corps pesant, en des temps consécutifs tous égaux entre eux, croissent comme les nombres* 1, 3, 5, 7,....

EXERCICES.

I. A n secondes d'intervalle, on a laissé tomber, du haut d'une tour, deux corps pesants. On demande à quel moment la distance qui les sépare sera b.

Réponse : $\left(\frac{b}{ng} - \frac{n}{2}\right)$ secondes après la chute du second corps.

II. Un projectile est lancé verticalement, de bas en haut, avec une vitesse initiale a. On demande : 1° à quelle hauteur h il par-

(*) Ces nombres se rapportent à des observations faites au niveau de la mer, à la latitude de Paris.

viendra; 2° quel temps T il emploiera pour revenir au point de départ (*).

Résultat : $h = \frac{a^2}{2g}$, $T = \frac{2a}{g}$.

III. A n secondes d'intervalle, et dans la même direction verticale, on a lancé deux projectiles dont la vitesse initiale commune est a. On demande le temps t qu'emploiera le second projectile pour atteindre le premier.

Résultat : $t = \frac{a}{g} - \frac{n}{2}$.

IV. Comment doit-on modifier les formules

$$v = gt, \quad h = \frac{1}{2} gt^2,$$

si l'heure est prise pour unité de temps?

Réponse : $V = 3600 g\theta$,
$h = 1800 g\theta^2$ (**).

CHAPITRE V.

DE LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS ET DES VITESSES.

Composition des mouvements.

35. Ainsi que nous l'avons déjà dit (4), on juge qu'un corps M est en mouvement dans l'espace, quand il change de situation à l'égard de différents corps A, B, C,..., supposés fixes. Si cette fixité était réelle, le *mouvement relatif* de M ne différerait pas de son *mouvement absolu*. Mais, en général, les choses ne se passent pas de cette manière, et le mouvement absolu du corps M est une

(*) On admet que les formules du mouvement sont :

$$v = a - gt, \quad x = at - \frac{1}{2} gt^2.$$

θ représente le temps, exprimé en heures.

combinaison de son mouvement relatif et du mouvement des corps A, B, C,...

Remarquons tout de suite que si, au lieu du mouvement absolu du système A, B, C,..., on considérait son mouvement à l'égard d'un second système A′, B′, C′,..., la *composition des deux mouvements* donnerait, non le mouvement absolu de M, mais le mouvement de ce corps relativement au système A′, B′, C′,..., pris comme point de repère. Si on voulait aller plus loin, on aurait à composer ce mouvement relatif avec le mouvement, absolu ou relatif, des corps A′, B′, C′; et ainsi de suite.

Par exemple, si une bille roule sur le pont d'un bateau, tandis que celui-ci est emporté par le courant d'une rivière, la composition de ces deux mouvements élémentaires donnera le mouvement de la bille par rapport au rivage. Il resterait, pour déterminer la trajectoire de la bille relativement au système solaire, *supposé fixe*, à composer les deux premiers mouvements avec la rotation et la translation de la terre.

36. L'exemple précédent prouve que les compositions de mouvements peuvent toujours être ramenées à la question suivante :

Connaissant le mouvement d'un corps M, *par rapport à différents corps* A, B, C,... ; *connaissant, en outre, le mouvement du système de ces derniers corps; trouver le mouvement absolu de* M.

La solution générale de ce problème reposant sur des considérations géométriques assez délicates, nous nous contenterons de traiter quelques cas particuliers très-simples.

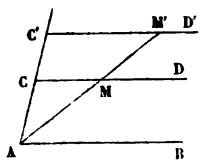
37. Composition de deux mouvements rectilignes uniformes. — *Un point matériel parcourt, avec une vitesse constante, une droite donnée, tandis que celle-ci a un mouvement de translation rectiligne et uniforme* (*). *Quel est le mouvement absolu du point* (**)?

Soient AB et A les positions initiales de la droite et du point; soient CD et M leurs positions au bout du temps quelconque t;

(*) Cette expression, *mouvement de translation rectiligne et uniforme*, signifie que tous les points de la droite décrivent, avec une même vitesse constante, des droites parallèles.

(**) Pour réaliser cette hypothèse, on pourrait faire glisser un *anneau* le long d'une *tringle*, tandis que l'on ferait mouvoir celle-ci.

soient enfin C'D' et M' leurs positions au bout du temps quelconque t'. Le mouvement de la droite donnée étant un mouvement de translation rectiligne, AB, CD, C'D' sont parallèles, et leurs extrémités A, C, C' sont en ligne droite. De plus, ce mouvement de translation est uniforme; donc (16)



$$\frac{AC}{AC'} = \frac{t}{t'}.$$

D'un autre côté, le mouvement *relatif* du point est uniforme; ainsi

$$\frac{CM}{C'M'} = \frac{t}{t'}.$$

Ces deux proportions donnent

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{CM}{C'M'}.$$

Imaginons les droites AM, AM': elles détermineront deux triangles ACM, AC'M', semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc les angles CAM, C'A'M' sont égaux; et AMM' *est une ligne droite.* De plus,

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{AC}{AC'},$$

ou, par ce qui précède, $\frac{AM}{AM'} = \frac{t}{t'}.$

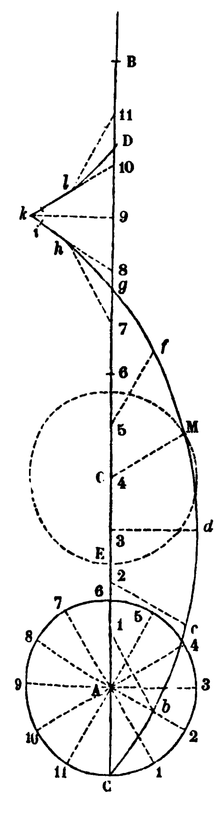
Ainsi, *le mouvement absolu du point matériel est rectiligne et uniforme.* En d'autres termes :

Le mouvement RÉSULTANT *de deux mouvements rectilignes et uniformes est également rectiligne et uniforme.*

38. Composition de deux mouvements uniformes, l'un rectiligne, l'autre circulaire. — *Un point matériel parcourt, avec une vitesse constante, une circonférence donnée, tandis que le centre de celle-ci a un mouvement rectiligne uniforme. Quel est le mouvement absolu du point?*

Soient AC et C les positions initiales de la circonférence et du ·ınt; soient OM et M leurs positions au bout du temps quelcon-

que t; soit enfin B la position du centre de la circonférence au moment où le point mobile accomplit sa révolution. Puisque les deux mouvements composants sont uniformes, on aura, en appelant R le rayon OM,



$$\frac{AO}{AB} = \frac{\text{arc EM}}{2\pi R}.$$

Ainsi, *à chaque instant, le rayon* OM *fait, avec la direction* OA, *un angle proportionnel à cette droite.* Cette propriété définit la trajectoire CMkD (*).

Pour construire cette ligne par points, on divise, en un même nombre de parties égales, la droite AB et le cercle CA; puis, par les points de division de AB, on mène les droites $1b$, $2c$, $3d$,..., respectivement égales et parallèles aux rayons A1, A2, A3,...; après quoi l'on fait passer un trait continu par les points C, b, c, d....

39. *Remarque.* — Si le cercle et la droite n'étaient pas situés dans un même plan, la trajectoire CMkD deviendrait une *courbe à double courbure.* Dans le cas particulier où le cercle se mouvrait perpendiculairement à la droite, le point M décrirait une *hélice.*

40. Composition de deux mouvements circulaires uniformes. — *Un point matériel parcourt, avec une vitesse constante,*

(*) Si l'on rapporte cette courbe à la droite AB et à une perpendiculaire passant en A, les coordonnées du point M seront données par les deux formules

$$y = at - R\cos bt, \quad x = R\sin bt;$$

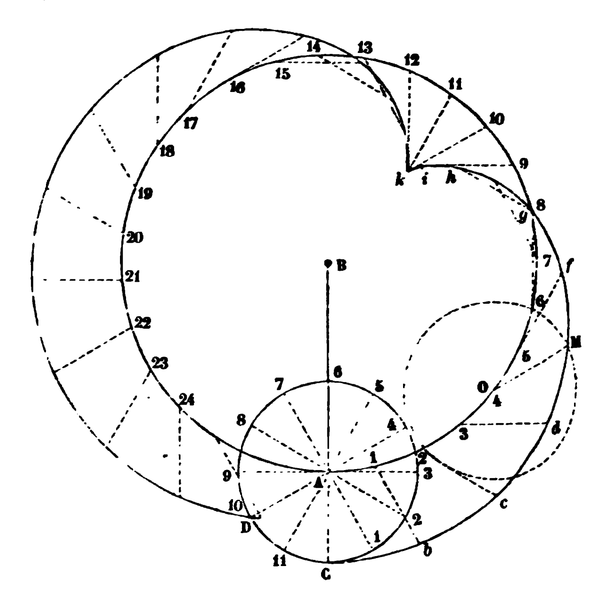
d'où

$$y = \frac{a}{b}\cdot \text{arc}\sin\frac{x}{R} - \sqrt{R^2 - x^2},$$

a et b étant *la vitesse de translation* du cercle et *la vitesse de rotation* du

une circonférence donnée, tandis que le centre de celle-ci décrit, uniformément, une seconde circonférence. Quel est le mouvement absolu du point?

Ce cas est à peu près réalisé dans le mouvement de la lune autour de la terre : il donne lieu à une construction qui ne diffère de la précédente que par le changement de la droite AOB en une circonférence AOB. On trouve ainsi, pour trajectoire du point, la courbe C*c*M*k*D.



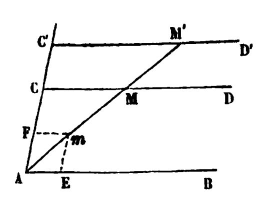
41. *Remarque.* — On peut démontrer que la *trajectoire du point* M *est une épicycloïde,* c'est-à-dire *la ligne engendrée par un point qui serait lié à un cercle roulant sur un cercle fixe* (*).

point M. Cette dernière équation a une grande analogie avec celle de la *cycloïde* (*D. D.*, 69); d'où l'on peut conclure que les deux courbes appartiennent à la même *famille:* en effet, *la trajectoire* CM*k*D *peut être engendrée par un point qui serait lié à un cercle roulant sur la droite* AB.

(*) Soient, en effet, *b* et *a* les vitesses angulaires du point matériel M

Composition des vitesses.

42. Reprenons l'exemple qui nous a servi à montrer la composition de deux mouvements rectilignes uniformes, et cherchons comment la vitesse du *mouvement résultant* est liée aux vitesses des *mouvements composants*.

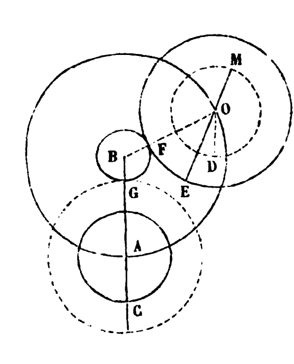


Soit, au bout de la première unité de temps, m la position du point matériel sur sa trajectoire rectiligne AMM', de telle sorte que Am représente la vitesse du mouvement résultant. Menons mF parallèle à la droite mobile AB et mE parallèle à la *trajectoire* ACC' *du point* A : les

---

et du centre mobile O, de manière que

$$\frac{\text{angle ABO}}{\text{angle DOM}} = \frac{a}{b}.$$



Des points O, B, pris comme centres, décrivons deux circonférences FE, FG, tangentes en F : la proposition énoncée ci-dessus se réduit à faire voir que l'on peut déterminer les rayons OF, BF par la condition

$$\text{arc FE} = \text{arc FG}.$$

Or, $\text{arc FE} = \text{OF}.\text{angle FOE}$;

$\text{arc FG} = \text{BF}.\text{angle FBG}$;

donc l'on doit avoir

$$\frac{\text{OF}}{\text{BF}} = \frac{\text{FBG}}{\text{FOE}} = \frac{\text{ABO}}{\text{DOM} - \text{ABO}},$$

ou

$$\frac{\text{OF}}{\text{BF}} = \frac{a}{b-a}.$$

Par conséquent, si le cercle FOE roule, sans glissement, sur le cercle FBG, le point E viendra coïncider avec le point G ; et, en même temps, les points O, M coïncideront, respectivement, avec les points A, C.

On démontre, de la même manière, que la trajectoire construite ci-dessus (38) est une *cycloïde allongée* ou *accourcie*.

deux côtés AE, AF du parallélogramme AEmF représenteront, respectivement, la vitesse du point matériel, relativement à AB, et la vitesse de cette droite (*).

Ainsi, *la vitesse du mouvement rectiligne uniforme résultant de deux autres mouvements rectilignes uniformes, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses des mouvements composants.*

Cette proposition fondamentale est connue sous le nom de THÉORÈME DU PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES.

43. *Remarques.* — I. Si l'on convient d'appeler *vitesses composantes* les vitesses des mouvements auxquels participe le point m, et *vitesse résultante* la vitesse de son mouvement effectif, on pourra simplifier ainsi l'énoncé précédent :

La vitesse résultante de deux vitesses données est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses composantes.

II. On doit bien se garder de croire qu'*un point matériel peut être animé de plusieurs vitesses simultanées :* comme il décrit une seule trajectoire, il possède une seule vitesse.

44. *Polygone des vitesses.* — Nous avons vu (35) qu'après avoir cherché le mouvement résultant de deux mouvements simples, on peut combiner ce mouvement résultant avec un troisième mouvement simple, et ainsi de suite. De même, après avoir réduit deux vitesses à une seule, au moyen de la règle précédente, on peut composer, avec cette vitesse résultante, une troisième vitesse donnée, et ainsi de suite. L'application de cette règle permet donc de trouver la résultante d'un nombre quelconque de vitesses. Il est facile de voir que cette recherche se réduit, dans tous les cas, à la construction géométrique résultant du théorème suivant:

La résultante d'un nombre quelconque de vitesses est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un

---

(*) Cette dernière vitesse a été désignée, par Coriolis, sous le nom de *vitesse d'entraînement :* c'est la vitesse avec laquelle est *entraîné* le système auquel appartient le point matériel m. Les vitesses représentées par Am et AE sont, l'une, la *vitesse absolue* du point, l'autre, sa *vitesse relative.*

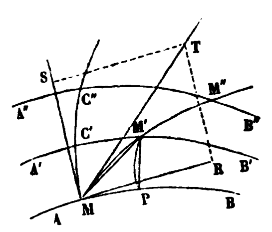
polygone fermé dont les autres côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent les vitesses composantes, en grandeur et en direction.

45. *Parallélipipède des vitesses.* — En particulier :

La vitesse résultante de trois vitesses, non situées dans un même plan, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses composantes.

46. *Généralisation des théorèmes précédents.* — Ces théorèmes ont été obtenus en supposant que les mouvements composants étaient rectilignes et uniformes; mais cette restriction n'est pas nécessaire. Pour le faire voir, il suffit de considérer le cas de deux mouvements composants; car le *polygone des vitesses* est un corollaire du théorème fondamental.

Supposons donc qu'un point matériel parcoure une courbe quelconque, plane ou à double courbure, mobile dans l'espace. Soient AB, A'B', A"B",... diverses positions de cette ligne, et M, M', M",... les positions correspondantes du point. Soient t et $t+\Delta t$ les valeurs du temps, qui répondent aux positions M et M'.



Pendant le temps Δt, le point matériel a parcouru un certain arc MP de AB : le point P, situé sur cette ligne, a donc décrit lui-même, dans ce laps de temps, un certain arc M'P.

Cela posé, si nous menons les cordes MP, PM', M'M, nous aurons, dans le triangle MPM',

$$\frac{\mathrm{MP}}{\sin \mathrm{MM'P}} = \frac{\mathrm{PM'}}{\sin \mathrm{M'MP}} = \frac{\mathrm{MM'}}{\sin \mathrm{MPM'}},$$

ou

$$\frac{\frac{\mathrm{MP}}{\Delta t}}{\sin \mathrm{MM'P}} = \frac{\frac{\mathrm{PM'}}{\Delta t}}{\sin \mathrm{M'MP}} = \frac{\frac{\mathrm{MM'}}{\Delta t}}{\sin \mathrm{MPM'}};$$

puis, en passant à la limite et en menant les tangentes MR, MT, MS à la courbe mobile, à la trajectoire MM'M" et à la courbe MC'C"

décrite *par le point* M *de* AB :

$$\frac{\lim \frac{MP}{\Delta t}}{\sin TMS} = \frac{\lim \frac{PM'}{\Delta t}}{\sin TMR} = \frac{\lim \frac{MM'}{\Delta t}}{\sin RMS} \;(*).$$

Mais
$$\lim \frac{MP}{\Delta t} = \textit{vitesse relative} = v,$$
$$\lim \frac{PM'}{\Delta t} = \textit{vitesse d'entraînement} = v_1,$$
$$\lim \frac{MM'}{\Delta t} = \textit{vitesse absolue} = V.$$

De plus, les tangentes MR, MS, MT, *situées dans le plan tangent à la surface décrite par la courbe mobile,* sont les directions des vitesses v, v_1, V (25). La relation précédente devient donc

$$\frac{v}{\sin(V, v_1)} = \frac{v_1}{\sin(V, v)} = \frac{V}{\sin(v, v_1)}.$$

Chacune des trois vitesses étant proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres, ces trois droites sont deux côtés et l'une des diagonales d'un parallélogramme, etc. (**).

Application de la théorie des coordonnées à la composition des vitesses.

47. *Point mobile projeté sur un axe fixe.* — Soit AB la trajectoire d'un point matériel. Soit M la position de ce point, au bout du temps quelconque t. Si l'on projette M sur un axe Ox, on pourra

(*) La trajectoire du point P se confond, à la limite, avec la courbure MCC'. Par conséquent, la corde PM' tend à se confondre, en direction, avec la tangente MS; et lim MM'P = TMS.

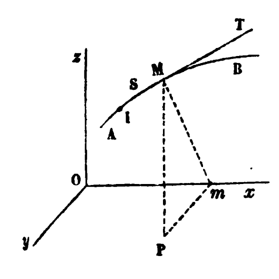
(**) Si l'on mène TR parallèle à SM et TS parallèle à RM, on aura

$$\frac{MR}{\sin(V, v_1)} = \frac{MS}{\sin(V, v)} = \frac{MT}{\sin(v, v_1)};$$

ou, par ce qui précède, $\frac{MR}{v} = \frac{MS}{v_1} = \frac{MT}{V}$.

Si donc la résultante V est représentée par MT, les vitesses composantes, v, v_1, seront représentées par MR et MS.

regarder la projection m comme étant la position occupée, au bout du temps t, par un second mobile qui parcourrait l'axe. Il existe, entre les vitesses V et v des deux mobiles, une relation très-simple, que l'on peut énoncer ainsi :



La vitesse de la projection est égale à la projection de la vitesse.

En effet, si s désigne l'arc IM décrit par le premier mobile, à partir d'une certaine origine I, on a d'abord (**22**)

$$V = s', \quad v = x'.$$

D'un autre côté, l'angle α formé par les directions des deux vitesses est donné (*T. D.*, **212**) par la formule

$$\cos\alpha = \frac{x'}{s'}.$$

Donc $$v = V\cos\alpha.$$ C. Q. F. D. (*)

48. Soient $x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$

les équations de la trajectoire. Le théorème précédent, appliqué aux trois projections du point matériel M, donne, en désignant leurs vitesses par V_x, V_y, V_z :

$$V_x = V\cos\alpha, \quad V_y = V\cos\beta, \quad V_z = V\cos\gamma,$$

et $$V^2 = (V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2.$$

Ainsi, *quand un point mobile est projeté sur trois axes rectangulaires, le carré de sa vitesse est égal, à chaque instant, à la somme des carrés des vitesses des trois projections.*

49. *Remarque.* — Ce théorème ne diffère pas de celui du *parallélipipède des vitesses*. En effet, V_x, V_y et V_z peuvent être considérées comme les vitesses de trois mouvements simples, ainsi définis : 1° le point M se meut sur une droite parallèle à Ox ; 2° cette droite se meut dans un plan parallèle à xy, de manière que tous

(*) Pour plus de simplicité, nous avons considéré des projections orthogonales ; mais le théorème subsiste dans le cas où elles sont obliques.

ses points décrivent des parallèles à Oy; 3° tous les points de ce plan mobile décrivent des parallèles à Oz; etc.

50. *Composition et décomposition d'un nombre quelconque de vitesses.* — Soient, au bout du temps t, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les vitesses des mouvements élémentaires auxquels participe le point matériel. Pour trouver la résultante V de toutes ces vitesses, on peut commencer par décomposer chacune d'elles parallèlement à trois axes rectangulaires : toutes les composantes parallèles à l'axe des x ont une résultante unique, égale à leur somme algébrique; et il en est de même pour les deux autres groupes de composantes. Conséquemment, si l'on désigne par A, B, C, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, $\gamma_2, \ldots$ les angles formés avec les trois axes par les directions de la vitesse V et des vitesses données, on aura

$$\left.\begin{aligned} V\cos A &= v_1\cos\alpha_1 + v_2\cos\alpha_2 + \ldots + v_n\cos\alpha_n,\\ V\cos B &= v_1\cos\beta_1 + v_2\cos\beta_2 + \ldots + v_n\cos\beta_n,\\ V\cos C &= v_1\cos\gamma_1 + v_2\cos\gamma_2 + \ldots + v_n\cos\gamma_n; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ou, pour abréger,
$$V\cos A = \Sigma v\cos\alpha,$$
$$V\cos B = \Sigma v\cos\beta,$$
$$V\cos C = \Sigma v\cos\gamma;$$

puis
$$V^2 = (\Sigma v\cos\alpha)^2 + (\Sigma v\cos\beta)^2 + (\Sigma v\cos\gamma)^2. \quad (2)$$

51. *Remarques.* — I. Dans les équations (1) et (2), chaque vitesse peut être supposée positive : sa direction est complétement déterminée au moyen des cosinus des angles qu'elle fait avec les trois axes.

II. Si l'on développe l'équation (2), on trouve, en désignant par v et v' deux quelconques des vitesses données,

$$V^2 = \Sigma v^2 + 2\Sigma vv'\cos(v, v').$$

Ainsi, *le carré de la vitesse résultante est égal à la somme des carrés des vitesses composantes, plus deux fois la somme des produits deux à deux de ces composantes par le cosinus de l'angle formé par leurs directions.*

Des mouvements apparents.

52. Nous avons vu (36) comment on peut *trouver le mouvement absolu d'un corps* M, *connaissant son mouvement relatif*, et

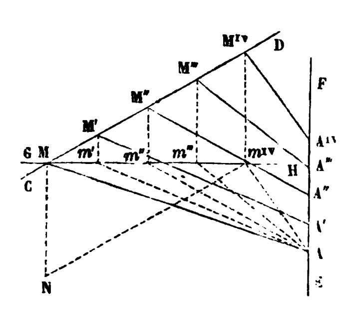
le mouvement absolu du corps A *auquel* M *est rapporté* (*). Au lieu de ce problème, on peut se proposer celui-ci, dont la solution renferme toute la théorie des *mouvements apparents :*

Connaissant les mouvements absolus de deux corps M *et* A, *trouver le mouvement relatif de* M.

Ce problème étant inverse du précédent, on le résoudra par les mêmes principes, appliqués dans un autre ordre. C'est ce que les exemples suivants vont mettre hors de doute.

53. Problème I. — *Un point matériel se meut sur une droite* CD, *avec une vitesse constante. Quel est son mouvement à l'égard d'un observateur qui se meut sur une droite* EF, *avec une vitesse constante ?*

Soient M et A, M' et A', M'' et A'',... les positions correspondantes des deux mobiles, au bout des temps o, t, $2t$, $3t$,.... Si l'observateur n'a pas la conscience de son mouvement propre, il lui semblera qu'il est immobile en A, et que le point matériel occupe, successivement, les positions M, m', m'',... déterminées par les parallélogrammes AA'M'm', AA''M''m'', AA'''M'''m''',.... (**). La ligne GH est donc la *trajectoire apparente* du point. D'ailleurs, les mouvements donnés étant uniformes, nous aurons, à cause des parallélogrammes,



$$\frac{MM'}{M'm'} = \frac{MM''}{M''m''} = \frac{MM'''}{M'''m'''} = \ldots$$

et

$$Mm' = m'm'' = m''m''' = \ldots.$$

(*) Pour plus de simplicité, nous supposons les corps A, B, C,..., réduits à un seul.

(**) Quand l'observateur est arrivé en A', il voit le point dans la direction A'M'. On doit donc, pour avoir la position apparente du point, l'observateur étant supposé fixe, mener Am' égale et parallèle à A'M' : c'est ce que réalise le parallélogramme AA'M'm'.

Ainsi, le *mouvement apparent du point matériel est rectiligne et uniforme.*

54. *Remarques.* — I. Le mouvement absolu du point matériel peut, évidemment, être regardé comme un *mouvement composé* (37), résultant de son mouvement apparent et d'un autre mouvement rectiligne et uniforme, commun à tous les points de la trajectoire apparente GH, et égal au mouvement de l'observateur : *le mouvement apparent d'un corps n'est donc que son mouvement relatif, l'observateur étant pris pour point de repère.*

II. Menons la droite MN égale et parallèle $A^{IV}A$, et achevons le parallélogramme $MNm^{IV}M^{IV}$. La droite GH sera la diagonale de ce parallélogramme. Par conséquent,

Pour obtenir le mouvement apparent d'un point matériel, il suffit de composer son mouvement absolu, avec un mouvement égal et contraire à celui de l'observateur; ou, en termes plus simples :

Pour obtenir le mouvement apparent d'un point matériel, on imprime à ce point et à l'observateur un mouvement commun, égal et contraire à celui de l'observateur.

III. La composition des vitesses ne différant pas de la composition des mouvements, au moins quand ceux-ci sont rectilignes et uniformes, il s'ensuit que :

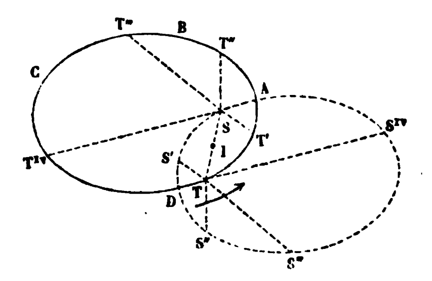
La vitesse apparente d'un point matériel est la résultante de sa vitesse absolue et d'une vitesse égale et parallèle à celle de l'observateur, mais dirigée en sens contraire.

55. PROBLÈME II. — *Trouver le mouvement apparent d'un point fixe* S, *pour un observateur* T *qui décrirait une ellipse ayant ce point pour foyer* (*).

Si l'observateur se croit immobile en T, le point fixe S lui semblera décrire une courbe $Ss's''$,..., que l'on obtiendra en menant Ts' égale et parallèle à T'S, Ts'' égale et parallèle à T''S, et ainsi de suite. Il est facile de voir que les deux courbes sont symétriques par rapport au milieu I de ST. Par suite, la trajectoire apparente est une ellipse égale à la première. En outre, *la vitesse apparente du point fixe est, à chaque instant, égale et parallèle à la vitesse*

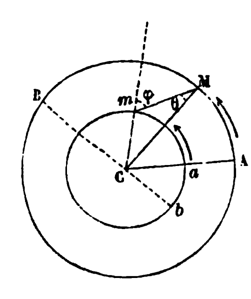
(*) Ce problème est celui du mouvement apparent du soleil. (*B., Cosmographie.*)

réelle de l'observateur; mais elle est dirigée en sens contraire de celle-ci.



56. Problème III. — *Deux points matériels*, M, *m*, *parcourent uniformément les circonférences* AMB, *amb*, *dont le centre commun est supposé fixe. Quel est le mouvement de l'un des mobiles relativement au rayon passant par l'autre* (*)?

Le mouvement de *m*, par rapport à un spectateur placé en M et prenant le centre C pour *point de repère*, dépend principalement de l'angle *m*MC : suivant que cet angle est dirigé *à droite* ou *à gauche* du rayon MC, *m* paraît se mouvoir dans le sens indiqué par la flèche, ou dans le sens opposé. De même, le *mouvement angulaire* apparent de M, pour un observateur qui se croirait immobile en *m*, est déterminé par l'angle M*m*C, ou par son supplément. Il s'agit donc d'examiner comment ces angles varient avec le temps.



A cet effet, soient : R, *r* les rayons des deux circonférences; Ω, ω les *vitesses angulaires* des mobiles; θ, l'angle formé par les *directions* MC, M*m*; φ, l'angle que fait la direction *m*M avec *le prolongement* du rayon C*m*. Supposons, pour fixer les idées, que les deux points se meuvent dans le même sens, auquel cas les vitesses Ω, ω pourront être regardées comme positives; supposons, en

(*) Les stations et rétrogradations des planètes donnent lieu à une application de ce problème. (*B.*, *Cosmographie.*)

outre, $\omega > \Omega$ (*). Enfin, comptons le temps t à partir d'une des époques pour lesquelles les rayons mobiles Cm, CM sont dirigés suivant une même droite CaA. Nous aurons

$$m\text{CM} = \omega t - \Omega t;$$

ou, en représentant par c la différence $\omega - \Omega$, laquelle est supposée positive,

$$m\text{CM} = ct.$$

Le triangle MCm donne ensuite

$$\sin\theta = \frac{r}{\text{M}m}\sin ct, \quad \sin\varphi = \frac{\text{R}}{\text{M}m}\sin ct,$$

$$\text{M}m = +\sqrt{\text{R}^2 + r^2 - 2\text{R}r\cos ct}.$$

Pour simplifier, posons

$$\frac{r}{\text{R}} = n, \quad (1) \qquad l = +\sqrt{1 + n^2 - 2n\cos ct}; \quad (2)$$

d'où

$$\sin\theta = \frac{n}{l}\sin ct, \quad (3) \qquad \sin\varphi = \frac{1}{l}\sin ct. \quad (4)$$

Les formules (1), (2), (3), (4) servent à résoudre complétement le problème. Elles donnent lieu à une discussion intéressante, dont nous signalerons seulement les points principaux.

57. *Remarques.* — I. L'angle θ, d'abord nul, devient positif, puis nul, puis négatif, puis nul; après quoi les mêmes circonstances se reproduisent périodiquement.

II. L'angle φ, *toujours égal* à $\theta + ct$ (**), n'est jamais négatif: il n'a pas de limite supérieure.

III. La quantité l, égale à $\frac{\text{M}m}{\text{MC}}$, varie entre $1 - n$ et $1 + n$. Elle atteint son minimum au moment des *conjonctions* (A, a), et son maximum lors des *oppositions* (B, b) (***).

IV. La vitesse angulaire *relative* de m est égale à la dérivée de θ,

(*) C'est ce qui a lieu pour les planètes.

(**) Cela se vérifie aisément.

(***) Ces expressions, empruntées à l'Astronomie, se rapportent à un spectateur qui serait placé sur le soleil.

prise par rapport à t. Or, les formules (2), (3) donnent

$$l' = \frac{nc \sin ct}{l}, \quad \theta' \cos\theta = n\frac{lc\cos ct - l' \sin ct}{l^2},$$

$$\cos\theta = +\frac{1 - n\cos ct}{l} \ (*),$$

donc $$\theta' = \frac{nc}{l^2}(\cos ct - n). \quad (5)$$

D'après cette valeur, le mouvement apparent de m sera *direct* ou *rétrograde*, suivant que la différence $\cos ct - n$ sera positive ou négative : il y aura *station* au moment où $\cos ct = n$.

V. Un calcul semblable au précédent conduit à la formule

$$\varphi' = \frac{c}{l^2}(1 - n\cos ct) : \quad (6)\ (**)$$

à cause de $n < 1$, on a $\varphi' > 0$; donc l'angle φ croît sans cesse, comme nous l'avons dit tout à l'heure.

CHAPITRE VI.

DE L'ACCÉLÉRATION.

Mouvement rectiligne.

58. *Accélération moyenne.* — Afin de suivre la même marche que dans le Chapitre III, nous commencerons par résoudre la question suivante, analogue à celle qui nous a donné la définition de la *vitesse moyenne* (20) :

Dans un mouvement composé de mouvements uniformément variés, les accélérations ont été

$$w_1, \quad w_2, \quad w_3, \ldots, \quad w_n$$

pendant les temps $$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \ldots, \quad t_n;$$

(*) La droite Mm étant intérieure au cercle AMB, on a nécessairement $\cos\theta > 0$.

(**) On arrive plus rapidement à ce résultat si l'on fait attention que $\varphi' = \theta' + c$ (*Remarque II*).

quelle sera l'accélération W *d'un mouvement uniformément varié qui durerait pendant le temps*

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n,$$

et dont les vitesses initiale et finale seraient les mêmes que dans le premier mouvement?

Dans le premier mouvement, les accroissements de vitesse ont été

$$w_1 t_1, \quad w_2 t_2, \ldots, \quad w_n t_n,$$

pendant les temps $t_1, \quad t_2, \ldots, \quad t_n$. (27)

L'accroissement total est donc

$$w_1 t_1 + w_2 t_2 + \ldots + w_n t_n;$$

et comme il doit être égal à

$$W(t_1 + t_2 + \ldots + t_n),$$

on a

$$W = \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2 + \ldots + w_n t_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}.$$

Cette formule, analogue à celle du n° 20, apprend que : *l'accélération moyenne* W, dans un mouvement composé de mouvements rectilignes uniformément variés, *est égale à la moyenne des accélérations.*

59. *Définition et mesure de l'accélération.* — Des raisonnements tout à fait semblables à ceux dont on a fait usage dans les n°s 21 et 22 conduisent aux propositions suivantes :

1°. *Dans un mouvement rectiligne quelconque, l'accélération de la vitesse v, au bout du temps t, est la limite vers laquelle tend l'accélération moyenne $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, lorsque les accroissements de vitesse et de temps convergent vers zéro;*

2°. *L'accélération, dans un mouvement rectiligne quelconque, a pour mesure la dérivée de la vitesse ou la seconde dérivée de l'espace, par rapport au temps;*

3°. *La vitesse augmente ou diminue, suivant que l'accélération est positive ou négative.*

60. *Représentation graphique de l'accélération.* — L'accélération se déduisant de la vitesse comme celle-ci se déduit de l'espace,

il s'ensuit que *le coefficient angulaire de la courbe des vitesses* (*), *représente l'accélération, en grandeur et en signe.*

61. *Autre interprétation géométrique de l'accélération.* — La formule

$$\rho = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}},$$

qui donne le rayon du cercle osculateur d'une courbe quelconque (*T. D.*, 219), se réduit, dans le cas d'une courbe plane, à

$$\rho = \frac{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}{x''};$$

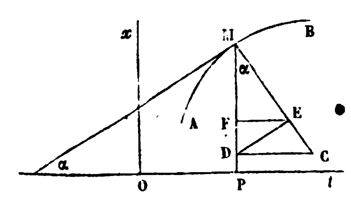
ainsi qu'on le reconnaît aisément (**). Si cette courbe est celle des espaces, on a

$$x' = v, \quad x'' = w;$$

par conséquent,

$$w = \frac{1}{\rho \cos^3 \alpha},$$

α étant l'angle que fait la tangente MT avec l'axe des abscisses. Cette formule conduit à la construction suivante :



MC *étant le rayon du cercle osculateur, menez* CD *perpendiculaire à l'ordonnée* MP, *puis* DE *perpendiculaire à* MC, *puis enfin* EF *perpendiculaire à* MP : MF *représente l'inverse de l'accélération* (***).

62. Problème. — *Connaissant l'accélération* (en fonction du temps), *trouver la vitesse et l'espace.*

(*) C'est-à-dire la courbe dont l'équation est $v = \varphi(t)$.

(**) Il suffit de supposer, dans le cas général, $y = 0$, $x = f(t)$, $s = t$.

(***) Il est bon d'observer que, l'*accélération étant une longueur,* la formule ci-dessus n'est pas homogène. Pour rétablir l'homogénéité, on multipliera le numérateur par le carré l^2 de la longueur qui avait été prise pour unité, et l'on aura $w = \frac{l^2}{\text{MF}}$, en sorte que l'*accélération est une troisième proportionnelle à* MF *et à* l.

Chacune des deux parties de ce problème exige que l'on remonte d'une dérivée à la fonction primitive (25).

Soit, par exemple,

$$w = 2\sin t - \sin 2t.$$

On aura

$$v = -2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t + c,$$

$$x = -2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t + ct + c',$$

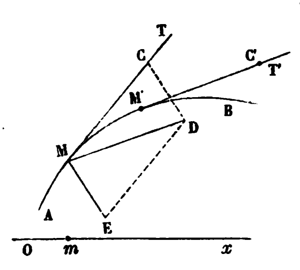
c et c' étant les constantes arbitraires. Si le mobile est parti sans vitesse initiale, et qu'en outre l'origine des espaces corresponde à l'origine des temps, $c = \frac{3}{2}$, $c' = 0$; donc

$$v = \frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\,(^*), \quad x = -2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t + 2t.$$

63. *Remarque.* — D'après la théorie des quadratures (*D. D.*, 342) *l'aire de la courbe des accélérations représente la vitesse, et l'aire de la courbe des vitesses représente l'espace.*

Mouvement curviligne.

64. *Définition de l'accélération totale.* — Soient M, M′ les positions occupées par le point matériel, sur sa trajectoire AB, aux *époques* t, $t + \Delta t$; soient $MC = v$, $M'C' = v + \Delta v$ les vitesses correspondantes, dirigées suivant les tangentes MT, M′T′. Si l'on mène MD égale et parallèle à M′C′, et qu'on achève le parallélogramme MCDE, on pourra regarder la vitesse représentée par MD, comme la résultante de la vitesse v et d'une autre vitesse représentée par ME. Si la trajectoire AB devenait rectiligne, on aurait



$$MD = MC + ME, \quad \text{ou} \quad ME = \Delta v:$$

(*) On peut écrire, plus simplement, $v = 4\sin^4 \frac{1}{2} t$.

pour cette raison, la composante ME est considérée comme *l'accroissement de vitesse qui a lieu pendant le temps* Δt. Par suite, on appelle *accélération moyenne,* durant ce même intervalle de temps, le rapport $\frac{\text{ME}}{\Delta t}$, et *accélération totale,* à l'époque t, *la limite de l'accélération moyenne, ou la limite vers laquelle tend le rapport entre l'accroissement de la vitesse et l'accroissement du temps,* lorsque ces deux accroissements convergent vers zéro : la *direction de l'accélération totale* est la limite vers laquelle tend la direction ME de l'accélération moyenne. Cette direction-limite est évidemment située dans le *plan osculateur, en* M, à la trajectoire (*T. D.,* 213).

65. Théorème I. — *L'accélération de la projection est égale à la projection de l'accélération.*

Soit, comme dans le n° 47, m la projection du mobile M sur un axe quelconque Ox. Représentons par α l'angle de MT avec cet axe. Nous aurons, par le principe des projections,

$$\text{proj MD} = \text{proj ME} + \text{proj ED}.$$

Or, $$\text{proj ME} = \text{ME}\cos(\text{ME}, \text{OX}),\quad \text{proj ED} = v\cos\alpha,$$
$$\text{proj MD} = \text{proj M'C'} = v\cos\alpha + \Delta(v\cos\alpha);$$

donc, en réduisant et en divisant par Δt :

$$\frac{\Delta(v\cos\alpha)}{\Delta t} = \frac{\text{ME}}{\Delta t}\cos(\text{ME}, \text{O}x).$$

La limite du premier membre est la dérivée de $v\cos\alpha$, dérivée que nous pouvons représenter par $(v\cos\alpha)'$. La limite de $\frac{\text{ME}}{\Delta t}$ est *l'accélération totale* w (64). Enfin, cos (ME, Ox) a pour limite $\cos l$, l étant l'angle de w avec Ox. L'égalité précédente donne donc

$$(v\cos\alpha)' = w\cos l. \quad (1)$$

Cette relation fondamentale équivaut au théorème énoncé ; car, $v\cos\alpha$ représentant la vitesse de la projection m (47), $(v\cos\alpha)'$ en est l'accélération ; et, d'un autre côté, $w\cos l$ est la projection de l'accélération totale.

66. Théorème II. — *L'accélération d'un mouvement résultant est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé dont les autres côtés sont égaux et paral''*

aux droites qui représentent les accélérations des mouvements composants, en grandeur et en direction.

Soient, au bout du temps t, v_1, v_2,..., v_n les vitesses des mouvements composants, $w_1, w_2, \ldots, w_n$ les accélérations correspondantes. Soient V la vitesse du mouvement résultant, et W l'accélération correspondante. Pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que *la projection de l'accélération résultante* W, *sur un axe quelconque, est égale à la somme des projections des accélérations composantes* (*D. D.*, 82).

Or, l'équation (1), appliquée aux différents mouvements composants, donne

$$\Sigma(v\cos\alpha)' = \Sigma w \cos l.$$

Soit A l'angle formé avec l'axe par la vitesse résultante V : on a (50)

$$\Sigma(v\cos\alpha) = \mathrm{V}\cos\mathrm{A};$$

et, par la théorie des dérivées (*Alg.*, 185),

$$\Sigma(v\cos\alpha)' = (\mathrm{V}\cos\mathrm{A})'.$$

Enfin, en désignant par L l'angle de W avec Ox, on a aussi (Théorème I),

$$(\mathrm{V}\cos\mathrm{A})' = \mathrm{W}\cos\mathrm{L}.$$

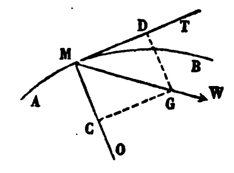
Donc

$$\mathrm{W}\cos\mathrm{L} = \Sigma w \cos l. \quad (2)$$

Corollaire. — *Les accélérations se composent et se décomposent comme les vitesses.*

Accélération tangentielle et accélération centripète.

67. Pour appliquer les principes précédents, proposons-nous de décomposer l'accélération totale w, représentée par MG, en deux autres accélérations, l'une dirigée suivant la tangente MT à la trajectoire, l'autre dirigée suivant *la normale située dans le plan osculateur*, c'est-à-dire suivant *le rayon* MO *du cercle osculateur* (*). Ces deux composantes de



(*) On ne doit pas oublier que la droite MG est dans le plan osculateur.

l'accélération totale sont ce qu'on appelle l'*accélération tangentielle* et l'*accélération centripète*.

Désignons par α, β, γ et par l, m, n les angles que font les directions MT et MG avec trois axes rectangulaires. Nous aurons (65)

$$w\cos l = (v\cos\alpha)', \quad w\cos m = (v\cos\beta)', \quad w\cos n = (v\cos\gamma)';$$

ou

$$\left.\begin{aligned} w\cos l &= v'\cos\alpha + v(\cos\alpha)', \\ w\cos m &= v'\cos\beta + v(\cos\beta)', \\ w\cos n &= v'\cos\gamma + v(\cos\gamma)'. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Mais λ, μ, ν étant les angles formés avec les trois axes par le rayon $MO = \rho$, nous avons encore (*T. D.*, **220**):

$$\frac{(\cos\alpha)'}{\cos\lambda} = \frac{(\cos\beta)'}{\cos\mu} = \frac{(\cos\gamma)'}{\cos\nu} = \frac{s'}{\rho} = \frac{v}{\rho}. \ (^*)$$

On peut donc écrire, au lieu des équations ci-dessus :

$$\left.\begin{aligned} w\cos l &= v'\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\cos\lambda, \\ w\cos m &= v'\cos\beta + \frac{v^2}{\rho}\cos\mu, \\ w\cos n &= v'\cos\gamma + \frac{v^2}{\rho}\cos\nu. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

D'après ces dernières relations, *l'accélération tangentielle* T *et l'accélération centripète* C ont pour valeurs :

$$T = v' = s'', \quad C = \frac{v^2}{\rho}. \quad (5) \ (^{**})$$

En même temps, $\quad w^2 = T^2 + C^2. \quad (6)$

Ainsi : 1° *l'accélération tangentielle a pour mesure la dérivée*

(*) La vitesse v est égale à la dérivée s' de l'espace parcouru (**22**).

(**) Si l'on fait coïncider l'axe des x, successivement, avec MT et avec MO, on trouve, en effet,

$$w\cos GMT = MD = v',$$

$$w\cos MGO = MC = \frac{v^2}{\rho}.$$

de la vitesse ou la seconde dérivée de l'espace, par rapport au temps; 2° l'accélération centripète a pour mesure le carré de la vitesse, divisé par le rayon du cercle osculateur; 3° l'accélération totale est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du rectangle construit sur les droites qui représentent l'accélération tangentielle et l'accélération centripète, en grandeur et en direction.

68. Remarques. — I. *Si le mouvement curviligne est uniforme, il n'y a plus d'accélération tangentielle, et l'accélération totale, qui se réduit à l'accélération centripète, est proportionnelle à l'inverse du rayon de courbure.*

II. *Si le mouvement uniforme est circulaire, l'accélération centripète est constante.*

CHAPITRE VII.

APPLICATIONS.

69. Problème I. — *Un point matériel décrit une hélice tracée sur un cylindre vertical. La projection du point, sur l'axe de l'hélice, se meut conformément à la loi de la chute des corps pesants. Quel est le mouvement du point?*

1°. En faisant passer l'axe des x par la position initiale du mobile, et en comptant les ordonnées dans le sens de la pesanteur, nous pourrons prendre, pour équations de l'hélice,

$$x = \mathrm{R}\cos\frac{z}{\mathrm{R}},\quad y = \mathrm{R}\sin\frac{z}{\mathrm{R}}.\quad (1)\ (*)$$

En même temps, si le point est parti sans vitesse initiale,

$$z = \frac{1}{2}gt^2.\quad (2)$$

2°. Ces équations donnent, pour les composantes de la vitesse et

(*) Nous supposons toujours, pour plus de simplicité, que la tangente à l'hélice fait, avec l'axe, un angle de 45°.

de l'accélération totale,

$$x' = -gt\sin\frac{z}{R}, \quad y' = -gt\cos\frac{z}{R}, \quad z' = gt. \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -g\left(\sin\frac{z}{R} + \frac{g}{R}t^2\cos\frac{z}{R}\right), \\ y'' &= g\left(\cos\frac{z}{R} - \frac{g}{R}t^2\sin\frac{z}{R}\right), \\ z'' &= g. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Par suite,

$$v = gt\sqrt{2}, \quad w = g\sqrt{2 + \frac{g^2}{R^2}t^4}. \quad (5)$$

La vitesse v étant proportionnelle au temps, *le mouvement est uniformément accéléré.*

3°. L'accélération tangentielle a pour valeur (67)

$$T = g\sqrt{2}. \quad (6)$$

Donc l'accélération centripète sera

$$C = \sqrt{w^2 - T^2} = \frac{g^2}{R}t^2. \quad (7)$$

Si l'on égale cette dernière expression à $\frac{v^2}{\rho}$, on trouve

$$\rho = 2R. \quad (8)$$

Ainsi, dans l'hélice considérée, le rayon de courbure est égal au diamètre du cylindre. C'est ce que l'on savait (page 102).

4°. La direction de l'accélération totale est déterminée par les formules

$$\cos l = \frac{x''}{w}, \quad \cos m = \frac{y''}{w}, \quad \cos n = \frac{z''}{w}.$$

5°. A l'origine du mouvement, les valeurs de ces cosinus sont

$$0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}};$$

donc *l'accélération totale est d'abord dirigée suivant la tangente a la trajectoire : l'accélération centripète est nulle* (*).

(*) Les formules (6), (7) donnent le même résultat.

6°. A mesure que t augmente, $\cos n$ diminue; donc *l'accélération totale tend à devenir perpendiculaire à l'axe de l'hélice.*

70. PROBLÈME II. — *Un cercle* O *roule, avec une vitesse constante, sur une droite* Ax. *Quelles sont les circonstances du mouvement d'un point* M *intérieur à ce cercle?*

1°. Un calcul semblable à celui que l'on fait pour trouver l'équation de la cycloïde (*D. D.*, 69) donne

$$x = R\omega - d\sin\omega, \quad y = R - d\cos\omega, \quad (1)$$

$$x = R \arccos\frac{R-y}{d} \mp \sqrt{d^2 - (R-y)^2}. \quad (2)$$

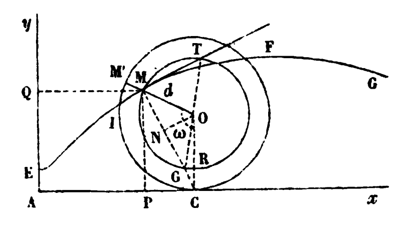
Cette dernière équation représente *la cycloïde accourcie* décrite par le point M.

2°. Si a est la *vitesse de roulement*, et que le temps t soit compté à partir de l'époque où l'extrémité M' du rayon OM coïncidait avec l'origine A,

$$R\omega = at. \quad (3)$$

Donc $$x = at - d\sin\frac{at}{R}, \quad y = R - d\cos\frac{at}{R} \quad (4)$$

sont les équations qui déterminent les mouvements des points P et Q, projections de M. Elles montrent que le mouvement proposé résulte du mouvement rectiligne et uniforme du centre O, combiné avec un mouvement circulaire et uniforme (38).



3°. On tire, de ces mêmes équations,

$$x' = a - \frac{ad}{R}\cos\frac{at}{R}, \quad y' = \frac{ad}{R}\sin\frac{at}{R}, \quad (5)$$

$$x'' = \frac{a^2 d}{R^2}\sin\frac{at}{R}, \qquad y'' = \frac{a^2 d}{R^2}\cos\frac{at}{R}; \quad (6)$$

puis $v^2 = a^2\left(1 + \frac{d^2}{R^2} - 2\frac{d}{R}\cos\frac{at}{R}\right), \quad w = \frac{a^2 d}{R^2}.$ (7)

Ainsi, *l'accélération totale est constante.*

4°. Les formules (5) peuvent être remplacées par

$$x' = \frac{a}{R} y = \frac{a}{R}\mathrm{PM}, \quad y' = (\mathrm{AC} - \mathrm{AP}) = \frac{a}{R}\mathrm{PC}.$$

Conséquemment $\frac{y'}{x'} = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PM}}$;

ou, en désignant par α l'angle que fait, avec $\mathrm{A}x$, la tangente MT à la trajectoire,

$$\tang\alpha = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PM}} = \tang \mathrm{PMC}.$$

D'après cette dernière relation : 1° *la droite* MC *qui joint le point décrivant* M *au point de contact* C *est normale à la cycloïde ;* 2° *la tangente* MT *passe par l'extrémité* T *du diamètre mené au point d'intersection de la normale avec la circonférence* OMG.

5°. La transformation précédente, appliquée à la vitesse v, donne

$$v = \frac{a}{R}\mathrm{MC}. \quad (8)$$

Ainsi, *la vitesse est proportionnelle à la normale.*

6°. La valeur de v^2 donne

$$vv' = \frac{a^3 d}{R^2}\sin\frac{at}{R} = \frac{a^3}{R^2}\mathrm{PC};$$

puis $$\mathrm{T} = v' = \frac{a^2}{R}\sin\alpha = \frac{a^2}{R^2}\cdot \mathrm{ON}. \quad (9)$$

L'accélération tangentielle est donc *proportionnelle à la distance comprise entre le centre du cercle et la normale : elle atteint son maximum quand le mobile coïncide avec le point d'inflexion* I *de l'épicycloïde* (*).

(*) La règle ordinaire (*D. D.*, 149) prouve que, pour ce point,

$$\cos\omega = \frac{d}{R}.$$

Par conséquent, *la normale au point d'inflexion est tangente au cercle* MGO.

7°. Quant à l'accélération centripète, évidemment dirigée suivant la normale MC ou suivant son prolongement, elle a pour valeur

$$C = \frac{a^2}{R^2}\sqrt{d^2 - R^2 \sin^2\alpha};$$

ou, en faisant attention que le radical représente la projection MN du rayon MO sur la normale MC,

$$C = \frac{a^2}{R^2}MN. \quad (10)$$

Au point d'inflexion I, $MN = 0$; donc $C = 0$.

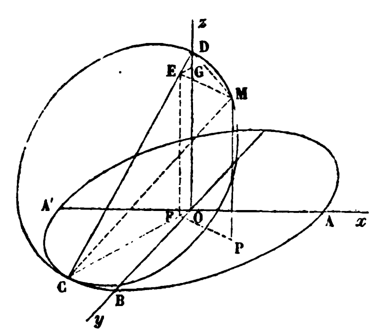
8°. Nous avons trouvé $\nu = \frac{a}{c}MC$. Par conséquent

$$\rho = \frac{\overline{MC}^2}{MN}. \quad (11)$$

Ainsi, *le rayon du cercle osculateur de la cycloïde est une troisième proportionnelle à la projection* MN *du rayon* MO *et à la normale* MC (*).

9°. Les composantes T et C étant proportionnelles à MN et ON, il s'ensuit que *l'accélération totale est dirigée vers le centre du cercle mobile*. Cette conséquence résulterait aussi des formules (6).

71. PROBLÈME III. — *Une circonférence* CMD *roule sur une circonférence égale* ABA', *supposée fixe, en rencontrant constamment l'axe* OZ *de celle-ci. Quel est le mouvement d'un point de la première circonférence?*



Faisons passer l'axe des x par la position initiale A du point M. Menons OC, CD, MC et MD. Abaissons ME, EG, EF, respectivement perpendiculaires à CD, OZ,

(*) Dans le cas de la cycloïde simple, $d = R$, $MN = \frac{1}{2}MC$; donc

$$\rho = 2MC.$$

OC. Menons encore l'ordonnée MP, puis la droite FP, évidemment parallèle et égale à EM. En prenant pour unité la *vitesse de roulement*, nous aurons, comme on le voit aisément,

$$\mathrm{ME} = \mathrm{R}\sin t, \qquad \mathrm{DE} = \mathrm{R}(1+\cos t),$$

$$\mathrm{CE} = (1-\cos t), \quad \mathrm{OF} = \mathrm{GE} = \frac{1}{2}\mathrm{R}(1+\cos t);$$

puis

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{OF}\cos t + \mathrm{FP}\sin t = \frac{1}{2}\mathrm{R}(1+\cos t)(2-\cos t),\\ y &= \mathrm{OF}\sin t - \mathrm{FP}\cos t = \frac{1}{2}\mathrm{R}(1-\cos t)\sin t,\\ z &= \mathrm{CE}\sin\frac{\pi}{3} \qquad\qquad\quad = \frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{3(1-\cos t)}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

72. Ces valeurs, qui pourraient servir à construire par points la trajectoire (*), donnent

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}(-1+2\cos t)\sin t,\\ y' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}(1-\cos t)(1+2\cos t),\\ z' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{3}.\sin t; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}(-2-\cos t+4\cos^2 t),\\ y'' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}(-1+4\cos t)\sin t,\\ z'' &= \frac{1}{3}\mathrm{R}\sqrt{3}.\cos t; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$v^2 = \frac{1}{4}\mathrm{R}^2(1-\cos t)(5+3\cos t), \quad (4)$$

$$w^2 = \frac{1}{4}\mathrm{R}^2(5-4\cos t+3\cos^2 t); \quad (5)$$

(*) Cette trajectoire est une *épicycloïde sphérique*. Sa projection, sur le plan des xy, est un *limaçon de Pascal*, que l'on peut représenter par

$$u = \frac{1}{2}\mathrm{R}(1-\cos\omega).$$

$$T = \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{(1+3\cos t)\cos\frac{1}{2}t}{\sqrt{5+3\cos t}}, \quad (6)$$

$$C = R\sqrt{6}\frac{\sin\frac{1}{2}t\sqrt{2+\cos t}}{\sqrt{5+3\cos t}}; \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\lambda}{1-2\cos t-2\cos^2 t} &= \frac{\cos\mu}{-2\sin t(1+\cos t)} = \frac{\cos\nu}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2+\cos t}}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\rho = \frac{v^2}{C} = \frac{R}{2\sqrt{6}} \sin\frac{1}{2}t\,\frac{(5+3\cos t)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2+\cos t}}. \quad (9)$$

73. Plusieurs circonstances intéressantes ressortent des dernières équations :

1°. La vitesse v, nulle pour $t=0$, augmente jusqu'à ce que l'on ait $\cos t = -\frac{1}{3}$, après quoi elle diminue. Le minimum répond à $\cos\frac{1}{2}t = 0$, ou $t=\pi$. A ce moment, le point matériel est en D, à la rencontre de la circonférence mobile et de l'axe directeur. De $t=\pi$ à $t=2\pi$, la vitesse repasse par les valeurs qu'elle avait acquises antérieurement.

2°. L'accélération w, d'abord égale à R, diminue jusqu'à ce que $\cos t = \frac{2}{3}$: le minimum est $R\sqrt{\frac{11}{12}}$. Elle augmente ensuite, de manière à atteindre son maximum $R\sqrt{3}$, lorsque $t=\pi$, etc.

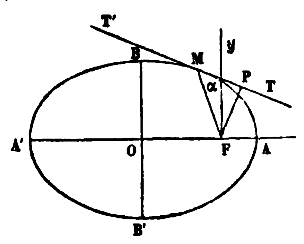
3°. Pour $t=0$, les relations (8) se réduisent à

$$\frac{\cos\lambda}{-3} = \frac{\cos\mu}{0} = \frac{\cos\nu}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}:$$

l'accélération centripète C, égale à zéro, est dirigée suivant AD. Au point D, qui répond à $t=\pi$, cette accélération atteint son maximum $R\sqrt{3}$; elle est alors dirigée suivant la perpendiculaire à DA, etc. (*).

(*) Nous engageons le lecteur à compléter cette discussion, pour laquelle nous devons nous borner à de simples indications.

74. PROBLÈME IV. — *Un point matériel* M *parcourt une ellipse* ABA′B′, *de manière que le rayon vecteur mené au foyer* F *décrit des aires proportionnelles aux temps. Quelles sont les circonstances du mouvement* (*).



Nous adopterons les dénominations et les notations suivantes :

rayon vecteur $= \mathrm{FM} = r$, *demi grand axe* $= \mathrm{OA} = a$,

demi petit axe $= \mathrm{OB} = b$, *excentricité* $= \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e$,

anomalie vraie $=$ *angle* AMF $= \omega$, *durée de la révolution* $= \mathrm{T}$,

vitesse moyenne angulaire $= \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}} = n$, *aire* AMF $= \mathrm{A}$.

L'énoncé donne (*D. D.*, 350) :

1°. $$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\omega}; \quad (1)$$

2°. $$\frac{\mathrm{A}}{\pi ab} = \frac{t}{\mathrm{T}},$$

ou $$\mathrm{A} = \frac{1}{2} n a^2 t \sqrt{1 - e^2}. \quad (2)$$

75. Pour simplifier la valeur de A, on représente par $\frac{1}{2}c$ *l'aire décrite dans l'unité de temps,* c'est-à-dire que l'on pose

$$c = na^2 \sqrt{1 - e^2}; \quad (3)$$

(*) Les données de ce problème constituent les deux premières *lois de Kepler*. Le problème lui-même est celui que Newton s'est proposé, et d'où il a conclu l'admirable principe de la *gravitation universelle*. (*B., Cosmographie.*)

d'où
$$A = \frac{1}{2} ct. \quad (4)$$

76. L'aire A, considérée comme une fonction du temps, a pour dérivée $\frac{1}{2} r^2 \omega'$ (*).

Donc, à cause de la formule (4) :
$$\omega' = \frac{c}{r^2}. \quad (5)$$

77. Rapportons l'ellipse à des axes rectangulaires, passant par le foyer; nous aurons
$$x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega.$$

Ces valeurs donnent, en vertu de la formule (5),
$$x' = r' \cos \omega - \frac{c}{r} \sin \omega, \quad y' = r' \sin \omega + \frac{c}{r} \cos \omega; \quad (6)$$
$$x'' = \left(r'' - \frac{c^2}{r^3}\right) \cos \omega, \quad y'' = \left(r'' - \frac{c^2}{r^3}\right) \sin \omega. \quad (7)$$

Par suite, $v^2 = r'^2 + \frac{c^2}{r^2}$, (8) $\quad w = r'' - \frac{c^2}{r^3}$. (9)

78. Il reste à remplacer r' et r'' par leurs valeurs, exprimées en fonction de r (**); mais, dès à présent, la comparaison des formules (9) et (7) montre que *l'accélération w est dirigée suivant le rayon vecteur.*

(*) En raisonnant comme dans le Chapitre XXI de la *Géométrie analytique à deux dimensions,* on trouve
$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \omega}{\Delta t} < \frac{\Delta A}{\Delta t} < \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \frac{\Delta \omega}{\Delta t},$$
$$\lim \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta A}{\Delta t}; \text{ etc.}$$

(**) D'après la marche indiquée au commencement de ce chapitre et dans les problèmes précédents, on pourrait se proposer d'évaluer v et w en fonction du temps, ou du moins en fonction de l'anomalie vraie; mais, ainsi que le lecteur peut s'en convaincre, le premier problème est à peu près *insoluble,* et le second conduit à des valeurs compliquées, qui déguisent complétement la grande découverte de Newton.

79. Si l'on écrit ainsi l'équation (1) :

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\omega}{a(1-e^2)},$$

et qu'on prenne ensuite les dérivées des deux membres, relatives à t, on trouve, à cause des formules (5) et (3),

$$r'=\frac{nae\sin\omega}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Mais

$$e\sin\omega=\sqrt{e^2-\left[\frac{a(1-e^2)}{r}-1\right]^2}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{r}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2};$$

donc

$$r'=\frac{na}{r}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}. \quad (10)$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (8), donne, après quelques réductions,

$$v^2=n^2a^3\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

Soit

$$n^2a^3=4\pi^2\frac{a^3}{T}=\mu\ (*);$$

alors

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right). \quad (11)$$

80. En comparant les deux valeurs de v^2, on a

$$r'^2+\frac{c^2}{r^2}=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right);$$

puis, en prenant les dérivées,

$$r''-\frac{c^2}{r^3}=-\frac{r^2}{\mu}.$$

Le premier membre est précisément la valeur de w; donc

$$w=-\frac{r^2}{\mu}. \quad (12)$$

(*) *La constante* μ *est la même pour toutes les planètes,* à cause de la troisième loi de Kepler : *les carrés des temps des révolutions sont comme les cubes des demi grands axes des orbites.*

Ainsi, *l'accélération varie en raison inverse du rayon vecteur.* De plus, sa valeur étant négative, il s'ensuit qu'*elle est dirigée du mobile* M *vers le foyer* F.

81. *Remarque.* — On peut conclure, de la formule (8), que *la vitesse varie en raison inverse de la distance comprise entre le foyer et la tangente* MT *à la trajectoire.* En effet, α étant l'angle FMT, on a (*)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{r\omega'}{r'},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{c}{rr'}. \quad (13)$$

Éliminant r' entre cette relation et l'équation (8), on obtient

$$v = \frac{c}{r\sin\alpha},$$

ou

$$v = \frac{c}{p}. \quad (14)\ (**)$$

82. Les équations (13), (10) et (3) donnent, par un calcul facile,

$$\sin\alpha = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^2-(a-r)^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}{\sqrt{a^2-(a-r)^2}}.$$

Par conséquent, les valeurs absolues de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète sont

$$T = \frac{\mu}{r^2}\frac{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}{\sqrt{a^2-(a-r)^2}}, \quad C = \frac{\mu}{r^2}\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^2-(a-r)^2}}. \quad (15)$$

De cette dernière, jointe à la formule (11), on conclut l'expression suivante pour *le rayon du cercle osculateur de l'ellipse :*

$$\rho = \frac{[a^2-(a-r)^2]^{\frac{3}{2}}}{ab}. \quad (16)\ (***)$$

(*) La formule ordinaire est (*D. D.*, 138) $\operatorname{tang}\alpha = \frac{u}{u'}$; mais ici $u = r$, et u', *dérivée de* u *par rapport à* ω, doit être remplacée par $\frac{r'}{\omega'}$.

(**) De chacune des formules (11) ou (14), il résulte que la vitesse décroît constamment, du *périhélie* A à l'*aphelie* A'.

(***) Quelques-uns des résultats auxquels nous venons de parvenir avaient été indiqués dans les Exercices de l'*Algèbre* (Chap. XII).

EXERCICES.

I. Une *bielle*, de longueur l, est articulée, à l'une de ses extrémités, avec une *manivelle* de rayon R, dont le mouvement est uniforme. La seconde extrémité de la bielle est articulée avec un axe fixe dont la direction passe par le centre de la manivelle. Quelles sont les circonstances du mouvement d'un point quelconque de la bielle?

II. Un point matériel décrit une *hélice tracée sur un cône de révolution* (*), dont l'axe est vertical. La projection du point, sur cet axe, se meut conformément à la loi de la chute des corps pesants (**). Quel est le mouvement du point?

III. Une circonférence roule sur une circonférence égale, supposée fixe, de telle sorte que leurs plans soient constamment perpendiculaires entre eux. Quel est le mouvement d'un point de la première circonférence (***).

IV. Un point matériel parcourt une ellipse, de manière que le rayon vecteur mené au centre de la courbe, a une vitesse angulaire constante. Quelles sont les circonstances du mouvement (****)?

V. Un point matériel décrit la *spirale hyperbolique* représentée par $r = \frac{a}{1 + e\omega}$. Quelle est, en direction et en grandeur, l'accélération?

Réponse : L'accélération est dirigée vers le pôle; elle varie en raison inverse du cube du rayon vecteur.

VI. Un point parcourt une circonférence pendant que celle-ci tourne autour d'un de ses diamètres, supposé fixe. La vitesse angulaire du point est égale à de la vitesse de rotation de la circonférence. Quelles sont les circonstances principales de ce mouvement (*****)?

(*) La projection de l'*hélice conique*, sur un plan perpendiculaire à l'axe, est une *spirale d'Archimède*, représentée par $u = a\omega$. (Voyez page 102, Exercices.)

(**) *Voyez* le Problème I.

(***) *Voyez* le Problème III.

(****) Cette question m'a été suggérée par l'enseigne du *Cadran ovale*, que l'on voit dans une rue de Paris.

(*****) *Voyez* page 102.

VII. Étant donnés un cercle et une droite BB' tangente, on fait mouvoir la droite de telle manière que le point de contact A parcoure le cercle d'un mouvement uniforme en 8 secondes, en même temps que la droite tourne autour du point A d'un mouvement uniforme en 4 secondes. Le point B' est à une distance de 1 mètre du point A. On demande quelle sera la vitesse du point B' au bout de 3 secondes. (Question proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique, en 1855.)

CHAPITRE VIII.

DE L'INERTIE ET DES FORCES.

83. Principe fondamental. — *Un corps ne peut modifier de lui-même son état de repos ou de mouvement.*

Une expérience de tous les instants met hors de doute la première partie de cette proposition. Par exemple, si j'ai posé un livre sur ma table, il y restera jusqu'à ce qu'*une cause étrangère* quelconque lui fasse occuper un autre lieu.

La seconde partie du principe n'est pas aussi évidente. On pourrait même être tenté de croire que les corps ont une propension naturelle à modifier leur état de mouvement. Ainsi, quand on fait rouler les billes sur un billard, leurs vitesses respectives diminuent de plus en plus, et bientôt elles s'arrêtent. Ainsi encore, quand on lance une pierre, on reconnaît qu'au lieu de se mouvoir indéfiniment dans la direction qu'on lui avait imprimée, elle décrit dans l'air une trajectoire à peu près parabolique, et finit par rencontrer la surface de la terre.

Avec un peu d'attention, on se convainc que ces *altérations* de mouvement sont constamment dues à des causes étrangères au mobile. Dans le cas de la bille, ces causes sont le *frottement* sur le drap qui recouvre le billard, et aussi la *résistance de l'air;* dans le cas de la pierre lancée, la direction et la grandeur de la vitesse sont, à chaque instant, modifiées par la *résistance de l'air* et *l'attraction de la terre*.

En effet, si le drap du billard est de plus en plus fin, si même

on le remplace, d'abord par une plaque de marbre, ensuite par une glace, on reconnaît que le temps au bout duquel la bille s'arrête croît de plus en plus, la vitesse d'impulsion restant la même. S'il était possible de jouer dans le vide, ce temps serait encore plus long.

D'un autre côté, une balle de plomb, lancée horizontalement par la main d'un homme, tombe plus loin que si elle était lancée par la main d'un enfant; et, si elle est mise en mouvement à l'aide d'un pistolet ou d'un fusil, elle va tomber bien plus loin encore. Ainsi, *plus la vitesse initiale est considérable, plus le mouvement tend à se conserver rectiligne et uniforme*. Ce résultat se comprend sans peine, si l'on admet que les causes d'altération sont celles que nous avons dites; il serait tout à fait inexplicable, si l'on prétendait qu'elles sont inhérentes à la balle.

84. D'après ces considérations, nous admettrons les deux propositions suivantes, qui ne sont que le développement du principe fondamental, et qui servent de base à la Mécanique :

1°. *Un corps en repos demeure éternellement en repos, à moins qu'il ne soit mis en mouvement par quelque cause étrangère;*

2°. *Un corps en mouvement conserve éternellement ce mouvement, avec la même direction et la même vitesse, à moins qu'il ne soit troublé par quelque cause étrangère.*

85. Cette propriété en vertu de laquelle tout corps persiste dans son état, que ce soit l'état de repos ou de mouvement, est ce qu'on appelle l'*inertie de la matière*, ou simplement l'*inertie* (*).

86. L'inertie peut servir à expliquer divers phénomènes :

1°. Lorsqu'on frappe le manche d'un outil contre un corps fixe, l'outil s'enfonce dans le manche : cela tient à ce que son mouvement continue après que celui du manche a cessé.

2°. Réciproquement, si l'on frappe sur le manche, l'outil, *en*

(*) « Ce terme d'inertie a d'abord été introduit dans la philosophie par ceux qui soutenaient que tout corps avait un penchant pour le repos. Ils envisageaient les corps comme des hommes paresseux, qui préfèrent le repos au travail, et attribuaient aux corps une horreur pour le mouvement, semblable à celle que les hommes paresseux ont pour le travail, le terme d'inertie signifiant à peu près la même chose que celui de paresse. » (EULER, *Lettres à une princesse d'Allemagne*.)

vertu de son inertie, reste en repos ou se meut lentement, et il s'enfonce dans le manche.

3°. Si une balle de plomb est lancée, avec une arme à feu, contre un carreau de vitre suspendu à une ficelle, elle y fait une ouverture circulaire; on attribue ce phénomène à l'inertie de la partie du carreau qui n'est pas rencontrée par la balle.

4°. Au moment où on lâche l'un des deux fils d'une fronde, la pierre, en vertu de son inertie, s'échappe suivant la tangente au cercle qu'elle décrivait.

5°. Lorsqu'un cheval lancé au galop vient à s'arrêter brusquement, il peut arriver que le cavalier, encore animé de la vitesse qu'il partageait avec sa monture, soit lancé par-dessus la tête de l'animal.

6°. Quand on saute d'un wagon tandis que le train est en marche, on s'expose à être jeté sur le sol dans le sens du mouvement du train, parce qu'à l'instant où les pieds sont arrêtés par leur contact avec le sol, le corps possède encore une partie de sa vitesse primitive. Il y a plus : si cette vitesse est considérable, le choc des pieds contre le sol peut, en se transmettant au cerveau, déterminer la mort (*).

87. On appelle *force, la cause étrangère,* quelle qu'elle soit, *qui modifie ou qui tend à modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps* (**).

Ainsi, la *pesanteur* est une force, parce qu'elle tend sans cesse à faire mouvoir les corps vers le centre de la terre; le petit *effort musculaire* que j'exerce pour faire courir ma plume sur le papier est une force; l'*affinité,* en vertu de laquelle deux gaz mis en présence se combinent, est une force; la *tension de la vapeur,* qui fait mouvoir les pistons d'une locomotive, est une force, etc.

88. Quand un corps se meut, ou qu'il tend à se mouvoir, il en

---

(*) Témoin l'accident du 13 juillet 1842.

(**) « Puisqu'un corps, en vertu de sa nature, conserve le même état, tant de mouvement que de repos, et qu'il n'en saurait être détourné que par des causes externes, il s'ensuit que, pour qu'un corps change d'état, il faut qu'il y soit *forcé* par quelque cause étrangère.... De là vient qu'on donne à cette cause le nom de *force.* » (EULER, *Lettres à une princesse d'Allemagne.*)

est de même pour tous les points matériels qui le composent; on doit donc admettre que chacun d'eux est sollicité par une force. Cela posé, on considère dans une force quelconque :

1°. Son *point d'application :* c'est le point sur lequel elle agit;

2°. Sa *direction :* c'est la droite suivant laquelle le point d'application, *supposé entièrement libre,* commencerait à se mouvoir;

3°. Son *intensité :* c'est le rapport de cette force à la force prise pour unité. Nous reviendrons plus loin sur cette définition.

89. Une force, quelle que soit son intensité, emploie toujours un certain temps pour imprimer une vitesse à un corps en repos. Quand on donne un coup de marteau sur la tête d'un clou, les surfaces des corps restent en contact pendant un temps très-court, mais cependant *fini*. C'est pendant ce temps que le marteau chasse le clou (*).

Effets des forces.

90. Les forces produisent des effets très-variés : tantôt elles accélèrent le mouvement des corps auxquels elles sont appliquées; tantôt elles le ralentissent; tantôt enfin elles se neutralisent réciproquement, *de manière à ne pas modifier l'état de repos ou de mouvement* des corps considérés. Dans ce dernier cas, on dit que les forces se font *équilibre,* ou que l'une quelconque d'entre elles fait équilibre à toutes les autres, par l'intermédiaire des corps.

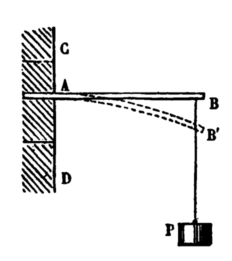
91. *Remarque.* — L'idée d'*équilibre* n'entraîne pas nécessairement celle de *repos :* quand on dit que des forces, appliquées à un point matériel, se font équilibre, cela signifie que, sous l'influence de ces forces, le point matériel restera en repos s'il y était d'abord, ou qu'il se meut uniformément en ligne droite, s'il a reçu une *impulsion* primitive. Ces deux états d'équilibre sont désignés, respectivement, sous les dénominations d'*équilibre statique* et d'*équilibre dynamique*.

(*) Autrefois, on partageait les forces en *forces continues* et en *forces instantanées*. Cette classification a été abandonnée. Aujourd'hui, les physiciens et les géomètres sont d'accord sur ce principe : *il n'y a pas de forces absolument instantanées*.

Forces égales. — Comparaison des forces aux poids.

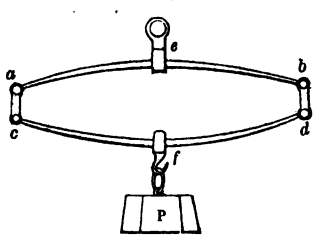
92. On dit que *deux forces sont* égales *lorsque, étant placées dans les mêmes circonstances, elles produisent les mêmes effets.*

Pour éclaircir cette définition, considérons un appareil formé d'une verge d'acier AB, encastrée, par l'une de ses extrémités, dans un mur CD. Si, à l'autre extrémité B, nous suspendons un poids P, de 12 kilogrammes, par exemple, la verge s'infléchira, et prendra une nouvelle position d'équilibre AB'. Maintenant, enlevons le poids P, et, en supposant que la tige AB soit redevenue rectiligne, exerçons en B, avec la main, une *pression* de plus en plus grande, jusqu'à ce que la verge prenne de nouveau la figure AB'. A ce moment, la pression produisant le même effet que le poids P, nous dirons qu'elle lui est égale.



Cet exemple suffit pour faire comprendre ce que l'on doit entendre par une *pression,* une *traction,* un *effort,* de 12 kilogrammes, de 100 kilogrammes, de 1 000 kilogrammes, etc.

93. L'expérience que nous venons d'indiquer se fait plus convenablement au moyen du *dynamomètre*. On donne généralement ce nom à tous les instruments destinés à *comparer les forces aux poids*. L'un des plus simples et des plus parfaits se compose de deux verges d'acier *ab*, *cd*, réunies à leurs extrémités par deux pièces de fer *ac*, *bd*. Deux lames *e*, *f*, fixées au milieu des deux verges et munies de crochets, permettent de suspendre le dynamomètre et d'y appliquer la force que l'on veut évaluer.



Pour graduer l'instrument, on suspend en *f*, successivement, des poids égaux à 1, 2, 3,... kilogrammes, et l'on marque, sur un limbe disposé à cet effet, le point où vient s'arrêter une aiguille qui tourne quand les deux verges s'écartent ou se rapprochent.

Au moyen de cet instrument, ou de ceux qui sont construits sur le même principe, on peut évaluer, en *kilogrammes*, les forces de traction, de pression, etc., non-seulement pendant le repos ou à *l'état statique*, mais encore pendant le mouvement, comme dans le tirage des voitures.

94. Il résulte, des explications précédentes, que l'*unité de force est le kilogramme*. Cette unité n'est pas tout à fait constante. En effet, la pesanteur allant en diminuant du pôle à l'équateur (12), il s'ensuit que le cylindre de fonte ou de laiton, auquel on a donné le nom de *kilogramme*, est moins fortement attiré vers le centre de la terre à l'équateur qu'aux pôles : ce poids d'un kilogramme, suspendu à un dynamomètre ou à une simple verge horizontale (92), produirait donc une inflexion de l'appareil plus grande en Laponie qu'à Paris. Autrement dit, le poids accusé par l'instrument, supposé d'un kilogramme à Paris, serait de plus d'un kilogramme en Laponie et de moins d'un kilogramme à Panama. Mais comme la différence est très-faible, elle est tout à fait négligeable dans les applications (*).

Égalité entre l'action et la réaction.

95. Le principe de l'*égalité entre l'action et la réaction* a été découvert par Newton. Considéré dans toute sa généralité, il signifie que *si un point matériel m exerce, sur un point marériel m', une certaine action, celui-ci exerce, sur le premier, une action égale et contraire*. Par exemple, si le premier point matériel *attire* le second, de manière à lui faire décrire la droite $m'm$, le second point attirera le premier et lui fera parcourir la droite mm'. De

(*) Si l'on voulait rapporter les indications du dynamomètre, en un lieu quelconque, à ce qu'elles seraient à l'Observatoire de Paris, il suffirait de les multiplier par le rapport $\frac{g}{g'}$, g' et g étant les valeurs de la gravité dans ces deux lieux. Par exemple, si le dynamomètre, observé en Laponie, a donné 3 kilogrammes pour le poids d'un corps, l'instrument, transporté à Paris, donnerait, au lieu de ce résultat,

$$3 \cdot \frac{1}{1,00137} = 2995^{gr},9.$$

La différence entre les deux indications serait donc d'environ 4 grammes.

plus, si ces deux points matériels sont identiques quant à la composition et au volume, les vitesses avec lesquelles ils se précipiteront l'un vers l'autre seront égales.

96. Dans un sens plus restreint, le principe de Newton revient à celui-ci, que l'on pourrait regarder comme un *axiome* de Mécanique :

Si deux forces, appliquées à un corps solide, se font équilibre, elles sont égales et directement opposées. Ainsi, quand j'appuie ma main sur une table, il se développe, dans celle-ci, une *résistance* égale et contraire à la pression exercée : cette résistance se traduit par une sensation d'autant plus pénible, que l'effort est plus grand. Ainsi encore, quand un cheval traîne une voiture, il éprouve une résistance au mouvement, égale et contraire à l'effort qu'il développe. Pour se convaincre de ce dernier point, il suffit d'établir, entre le cheval et la voiture, une corde portant un dynamomètre à chacune de ses extrémités : on trouve que les indications des deux instruments sont égales, au moins quand le mouvement est uniforme; par conséquent, la corde est sollicitée par deux forces égales et contraires.

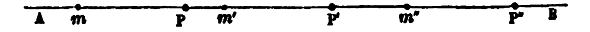
Production du mouvement par les forces.

97. Principe expérimental. — *Une force agit sur un point matériel en mouvement, comme elle agirait s'il était en repos.*

Il est difficile d'expliquer, à priori, le sens exact et la portée de cette proposition, qui constitue un véritable *postulatum* de Mécanique. L'application que nous en allons faire servira à la faire comprendre, au moins dans un cas particulier.

98. Théorème. — *Une force constante* F, *appliquée à un point matériel m en repos, lui imprime un mouvement rectiligne uniformément accéléré.*

Pour fixer les idées, admettons que le point matériel m soit une parcelle de fer, et que la force F soit un aimant, supposé *concentré* en son pôle P. Si l'aimant restait en repos, l'intensité de la force *attractive* F croîtrait très-rapidement, à mesure que la distance mP



diminuerait. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire pour que la

force soit *constante*, aussi bien en *intensité* qu'en *direction*, faisons *reculer* le pôle P le long de la droite AmPB, à mesure que la parcelle de fer avance, de manière à rendre invariable la distance entre le point attirant et le point attiré. Soient, au bout d'un temps quelconque θ, m' et P' les positions de ces deux points, et β leur vitesse commune, c'est-à-dire la *vitesse acquise* par le point matériel, sous l'influence de la force F. Si, à partir de ce temps θ, on supprimait brusquement celle-ci, en enlevant l'aimant, ou en le neutralisant par un aimant égal et de polarité contraire, le mouvement du point matériel deviendrait, à l'instant même, rectiligne et uniforme (88, 2°). Mais, puisque nous n'avons rien changé aux positions respectives de l'aimant et de la molécule de fer, celle-ci sera animée, à la fin du temps 2θ, de la vitesse β qu'elle a conservée en vertu de son inertie, et de la vitesse β que l'aimant lu a fait acquérir, conformément au principe précédent, pendant le deuxième intervalle de temps θ : sa vitesse totale sera donc 2β. De même, à la fin du temps 3θ, la vitesse du point matériel se composera de 2β, augmentée de la vitesse β due à l'action de la force F, pendant le troisième intervalle de temps θ. En continuant de la même manière, on voit qu'à la fin du temps $n\theta$, la vitesse sera devenue $n\beta$. Le mouvement que nous considérons est donc tel, que la vitesse acquise par le mobile croît proportionnellement au temps, c'est-à-dire qu'il est uniformément accéléré.

99. *Remarque*. — Si l'on remplace $n\theta$ par t, on aura, pour l'expression de la vitesse,

$$v = n\beta = \frac{t}{\theta}\beta,$$

ou, en appelant b le rapport de β à θ.

$$v = bt.$$

Cette formule est précisément celle du mouvement uniformément varié (27), en supposant que le mobile n'ait pas eu de vitesse initiale.

100. Reprenons l'exemple ci-dessus, et supposons que la parcelle de fer, au moment où elle est soumise à l'action de l'aimant, soit déjà animée d'une vitesse initiale a. *Supposons*, de plus, *que la force* F *agisse dans la direction de cette vitesse initiale*. Alors, si nous répétons les raisonnements précédents, nous trouverons

que la vitesse du mobile, au bout du temps t, sera donnée par la formule

$$v = a + bt.$$

Conséquemment, *une force constante* F, *appliquée à un point matériel animé d'un mouvement rectiligne uniforme, et agissant suivant la droite que décrit le point, lui imprime un mouvement uniformément varie.*

101. *Remarque.* — Le mouvement est *uniformément accéléré* ou *uniformément retardé,* suivant que la force, supposée *attractive,* agit dans le sens de la vitesse primitive ou dans le sens directement opposé.

102. Théorème II. — *Si un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, il est soumis à l'action d'une force constante.*

Pour démontrer cette proposition, réciproque de la précédente, il suffit de faire les remarques suivantes :

1°. Le mouvement considéré, n'étant pas rectiligne uniforme, est dû à une force qui agit *actuellement* sur le mobile (84, 2°);

2°. Quand une force n'agit pas dans le sens de la vitesse initiale, ou dans le sens de la vitesse à un instant *déterminé,* le mouvement n'est pas *rectiligne ;*

3°. Lors même qu'une force serait, à chaque instant, dirigée dans le sens de la vitesse initiale du mobile, si elle n'est pas constante en intensité, les accroissements de vitesse, correspondant à des temps égaux, seraient inégaux ; donc le mouvement produit par cette force ne serait pas uniformément varié.

Indépendance des effets produits par plusieurs forces.

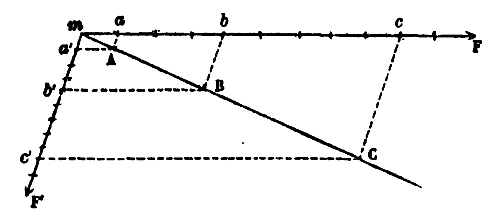
103. Principe expérimental. — *Si plusieurs forces sont appliquées à un point matériel, chacune d'elles agit comme si les autres n'existaient pas.*

Ce principe renferme, comme cas particulier, celui du n° 97. Nous allons l'appliquer à la démonstration du théorème suivant, que l'on peut regarder comme donnant une vérification du principe sur lequel est fondée la *composition des mouvements rectilignes* (37).

104. Théorème III. — *Deux forces* F, F', *constantes en gran-*

deur et en direction, appliquées à un point matériel m en repos, lui impriment un mouvement rectiligne uniformément accéléré, résultant des deux mouvements rectilignes uniformément accélérés dus aux deux forces prises isolément.

Supposons que les forces F, F′ soient des *attractions* émanant de deux centres placés *à l'infini*, l'un dans la direction *m*F, l'autre dans la direction *m*F′ (*). Soient *a*, *b*, *c*,..., les positions que prendrait le point matériel au bout de une, deux, trois,..., unités



de temps, si la force F′ n'existait pas; soient, semblablement, *a′*, *b′*, *c′*,..., les positions qu'occuperait le mobile aux mêmes époques, si la force F était supprimée. D'après les hypothèses faites sur les deux forces, leurs *directions* sont parallèles à *m*F et *m*F′, quelle que soit la position du point matériel. Or, le principe énoncé ci-dessus signifie simplement que, sous l'action simultanée des deux forces, le mouvement du point, *estimé* parallèlement à la direction de chacune d'elles, est indépendant de l'autre (**). Il faut donc, pour obtenir les positions effectives du mobile au bout des temps considérés, achever les parallélogrammes *ma*A*a′*, *mb*B*b′*, *mc*C*c′*,.... On conclut de cette construction, absolument comme dans le n° 37 : 1° que *la trajectoire m*ABC,..., *est rectiligne;* 2° que *les espaces m*A, *m*B, *m*C,..., *croissent comme les carrés des temps;* 3° que *l'accélération* RÉSULTANTE *est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme*

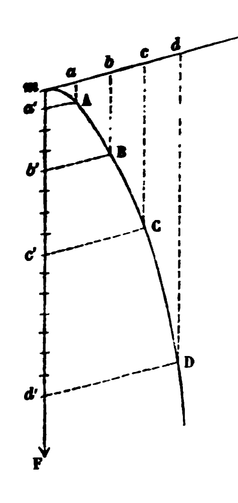
(*) Cette hypothèse serait à peu près réalisée dans le cas d'un aérolithe sollicité par la terre et par la lune. Seulement, l'*infini* est mis ic à la place de *très-loin*.

(**) On peut dire encore que *le mouvement de la projection du point matériel, sur la direction de l'une des forces, est indépendant de l'autre* (47).

construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les accélérations COMPOSANTES (*).

105. *Remarque.* — Cette troisième conséquence de l'action simultanée des forces F, F′, constitue le *parallélogramme des accélérations*, évidemment compris dans le théorème sur l'accélération d'un mouvement résultant (66).

106. Après le cas, difficilement observable, de deux forces constantes agissant sur un point matériel en repos, considérons le mouvement déterminé par une force constante F, agissant sur un point m animé d'une vitesse initiale non dirigée suivant la force; et supposons encore le centre d'attraction placé à l'infini.



md étant la direction de la vitesse initiale, soient a, b, c, d,..., les positions qu'occuperait le mobile après une, deux, trois,..., unités de temps, si la force F était supprimée, et a', b', c', d',..., celles qu'il aurait occupées s'il n'avait pas eu de vitesse initiale. En vertu du principe déjà rappelé (97), le mouvement du mobile, *estimé* parallèlement à la direction de la vitesse initiale, est indépendant de la force F, et *vice versâ*. La trajectoire mABC,..., se construit donc aisément par points, au moyen des parallélogrammes maAa', mbBb', (**)....

107. *Loi de Galilée.* — Le principe *expérimental* de l'*indépendance des effets des forces*, et sa corrélation avec le principe *géo-*

(*) Ces trois propositions, auxquelles nous venons de parvenir en supposant le point m sollicité par les forces F, F′, peuvent être obtenues aussi, indépendamment de la considération de ces forces, en regardant le mouvement absolu du point m comme résultant de son mouvement sur la droite mc, combiné avec une translation de cette ligne. Cette remarque confirme ce que nous avons dit à la fin du numéro précédent.

(**) Cette trajectoire est évidemment une *parabole*.

métrique de la *composition des mouvements*, ont été découverts par Galilée. La *loi* à laquelle le conduisit l'étude attentive de divers phénomènes de mouvement peut être ainsi formulée :

Les mouvements relatifs de plusieurs corps ne sont pas altérés, quand on imprime à tout leur système un mouvement commun de translation (*).

108. *Preuves de la loi de Galilée.* — 1°. Supposons qu'un matelot laisse tomber une balle du haut d'un mât, tandis que le vaisseau est en mouvement.

Avant que le matelot eût lâché la balle, celle-ci participait au mouvement du vaisseau, mouvement que nous supposons rectiligne et uniforme. Par conséquent, si elle n'était sollicitée par la pesanteur, la balle, placée d'abord en a, parcourrait uniformément la droite horizontale $ab'c'd'$, *en vertu de l'inertie*. D'un autre côté, si le bâtiment était en repos, le mobile tomberait le long du mât am, en parcourant des espaces proportionnels aux carrés des temps (32). La composition de ces deux mouvements donne, comme dans la question précédente, la trajectoire véritable aBCD,..., laquelle est une parabole. Mais comme le vaisseau continue à se mouvoir avec sa vitesse primitive, il s'ensuit que les positions successives $b'm'$, $c'm''$, $d'm'''$,..., du mât, passent par les positions B, C, D,..., de la balle : *celle-ci tombe donc au pied du mât*.

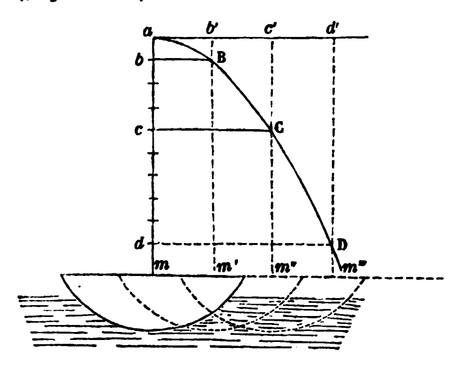
(*) Voici comment un grand géomètre et un célèbre philosophe énoncent la *loi de Galilée* :

« Différents mouvements imprimés à la fois ou successivement à un » même corps, se composent de manière que le corps se trouve à chaque » instant dans le même point de l'espace où il devrait se trouver en » effet par la combinaison de ces mouvements, s'ils existaient chacun » et séparément dans le corps. » (LAGRANGE, *Mécanique analytique*, t. I, page 207.)

« Si plusieurs corps agissent les uns sur les autres, par telles forces » qu'on voudra, intérieures ou extérieures, leur état relatif de mouve- » ment ou de repos ne sera nullement altéré en imprimant à tous un » même mouvement d'ailleurs arbitraire, qui leur fasse décrire à la fois » des droites égales et parallèles. » (AUGUSTE COMTE, *Astronomie populaire*, page 388.)

N'ayant pas à ma disposition les OEuvres de Galilée, j'ai dû choisir, entre les deux *versions*, celle qui m'a paru attribuer le plus d'importance à la découverte de l'illustre Pisan.

C'est ce que les Coperniciens niaient, et que Galilée démontra (*B., Cosmographie*, 96).



2°. Dans un bateau qui suit, sans secousse, le cours d'une rivière, on peut écrire, jouer au billard, etc., absolument comme sur la *terre ferme*.

3°. L'air contenu dans un wagon fermé a souvent, par rapport à l'air extérieur, une vitesse relative de 60 kilomètres par heure. Néanmoins, le mouvement de cette colonne d'air n'influe ni sur la direction du fil à plomb, ni sur les oscillations d'un pendule qui serait placé dans l'intérieur du wagon.

4°. Si un voyageur qui parcourt, sur un chemin de fer, environ 10 mètres par seconde, lance verticalement, à une hauteur de 6 mètres, un corps quelconque, sa main pourra recevoir le projectile, quoique, pendant les 2 secondes qu'auront duré l'ascension et la descente, elle ait été transportée à 20 mètres du point de départ.

Comparaison des forces constantes.

109. Théorème. — *Deux forces constantes* F, F′, *appliquées successivement à un même point matériel m, dans la direction de sa vitesse initiale, sont entre elles comme les accélérations w, w′ qu'elles produisent.*

Supposons qu'une même force f puisse être contenue n fois dans F et n' fois dans F′ (*). Cette force f, appliquée au point ma-

(*) Quand on dit qu'une force f *est contenue n fois dans une autre*

tériel m, lui imprimerait un mouvement uniformément varié (100): soit υ l'accélération du mouvement, c'est-à-dire l'augmentation de vitesse dans l'unité de temps. Des forces égales à $2f$, à $3f, \ldots$, appliquées au même point, donneraient lieu à des mouvements de même nature, dont les accélérations seraient 2υ, $3\upsilon, \ldots$, (104). Dès lors, puisque

$$F = nf, \quad F' = n'f,$$

on doit avoir

$$w = n\upsilon, \quad w' = n'\upsilon;$$

d'où

$$\frac{F}{F'} = \frac{w}{w'}. \quad (1)$$

110. Remarque. — *Si le point matériel* m *n'a pas de vitesse initiale, les forces* F, F' *sont entre elles comme les vitesses* v, v' *qu'elles produisent dans des temps égaux.*

En effet, les formules

$$v = wt, \quad v' = w't,$$

donnent

$$\frac{v}{v'} = \frac{w}{w'};$$

d'où, à cause de la proportion ci-dessus,

$$\frac{F}{F'} = \frac{v}{v'}.$$

Relations entre les forces, les accélérations et les masses.

111. *Définition de la masse.* — 1°. La relation fondamentale (1) donne

$$\frac{F}{w} = \frac{F'}{w'};$$

---

force F, on veut exprimer que celle-ci *équivaut* à n forces égales à la première. Or, on conçoit qu'en descendant à une force f *suffisamment petite*, il est toujours possible d'arriver à un *sous-multiple* commun de deux forces quelconques F, F', sinon exactement, du moins avec une approximation plus que suffisante. Par exemple, si l'on veut comparer la force de traction d'un homme à celle d'un cheval, on pourra essayer d'abord, comme terme de comparaison, la force d'un enfant. Admettons que l'expérience apprenne qu'un homme est plus fort que trois enfants réunis et plus faible que quatre : l'unité essayée étant trop grande, on aura recours, par exemple, à la force d'un jeune chien; et ainsi de suite.

puis, si l'on considère successivement des forces F, F′, F″,..., en nombre quelconque,

$$\frac{F}{w}=\frac{F'}{w'}=\frac{F''}{w''}=\ldots. \quad (2)$$

Ainsi, *quand un point matériel est sollicité successivement par diverses forces constantes, si l'on divise le nombre qui représente la force par le nombre qui représente l'accélération correspondante, on obtient un quotient constant.*

Ce quotient est ce qu'on appelle la *masse* du point (*).

2°. Un corps étant un système de points matériels (1), il est naturel d'appeler *masse du corps* la somme des masses des points matériels qui le composent (**).

112. Considérons le cas particulier où un corps, du poids de p kilogrammes, serait abandonné librement à l'action de la pesanteur, dans le vide : il prendra un mouvement uniformément varié, dont l'accélération, évaluée en mètres, sera le nombre $g=9{,}80896$. Nous aurons donc, en appelant m la masse du corps, et en obser-

(*) Nous devons faire, à propos de cette *définition*, adoptée depuis quelques années, une remarque analogue à celle que Poisson a faite relativement à la définition de la vitesse (**12**). Le *rapport* du *nombre* F au *nombre* w est la *mesure* de la masse, et non la masse elle-même. La masse d'un corps est une propriété *sui generis*, qui n'est pas susceptible de définition: seulement, on juge de la grandeur de la masse d'après l'effort que l'on est obligé d'exercer pour imprimer au corps une accélération déterminée.

(**) On verra plus loin que des forces $f, f', f'',\ldots$, parallèles et de même sens, ont une *résultante* F égale à leur somme. Cela posé, si toutes les molécules d'un corps solide ont un mouvement commun de translation, dont l'accélération soit w, on aura, en désignant par m, m', m'',..., les masses de ces molécules, et par $f, f', f'',\ldots$, les forces correspondantes,

$$w=\frac{f}{m}=\frac{f'}{m'}=\frac{f''}{m''}=\ldots=\frac{f+f'+f''+\ldots}{m+m'+m''+\ldots}=\frac{F}{m+m'+m''+\ldots}.$$

Ainsi,

$$\frac{F}{w}=m+m'+m''+\ldots,$$

ce qui justifie la définition donnée dans le texte.

vant que la force qui le sollicite est précisément son poids :

$$\frac{p}{g} = m, \quad (3)$$

ou

$$p = mg. \quad (4)$$

Donc *la masse d'un corps est le quotient de son poids p par la gravité g.*

113. *Unité de masse.* — Dans les relations (3) ou (4), supposons $m = 1$, nous aurons

$$p = g = 9,80896.$$

Ainsi, *la masse prise pour unité est celle d'un corps du poids de* 9808,96 *grammes.*

114. *Mesure d'une force constante.* — Reprenons la relation (2), et remplaçons par m le rapport qui y entre ; nous trouvons

$$F = m\varpi = \frac{p}{g}\varpi. \quad (5)$$

Conséquemment, *si l'on continue de prendre, pour unité de force, le poids d'un kilogramme, une force constante quelconque aura pour mesure le produit de la masse du corps qu'elle sollicite, par l'accélération qu'elle détermine ;* ou, en termes plus simples :

Une force constante a pour mesure le produit de la masse du mobile par l'accélération.

115. *Quantité de mouvement.* — Soient F, F' deux forces agissant sur deux corps de masses m, m' et produisant des accélérations ϖ, ϖ' ; on aura

$$F = m\varpi, \quad F' = m'\varpi' ;$$

d'où

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{\varpi}{\varpi'}.$$

D'un autre côté, si les corps sont partis du repos, leurs vitesses v, v', au bout du temps t, seront proportionnelles aux accélérations ϖ, ϖ' (31) ; conséquemment,

$$\frac{F}{F'} = \frac{mv}{m'v'}.$$

En appelant *quantité de mouvement* d'un corps le produit de sa masse m par sa vitesse v, on peut donc dire que : *deux forces constantes quelconques, appliquées à deux masses m, m' dépourvues de vitesse initiale, sont entre elles comme les quantités de mouvement qu'elles produisent après des temps égaux.*

CHAPITRE IX.

THÉORIE DE LA PESANTEUR (*).

Définitions.

116. La *pesanteur* est la cause en vertu de laquelle les corps tendent à tomber à la surface de la terre (**). On lui donne auss le nom de *gravité*. Elle est un cas particulier de la *gravitation universelle*.

117. Le *poids* d'un corps sollicité par la *pesanteur* est la *pression* exercée par ce corps sur l'obstacle qui l'empêche de tomber; elle est égale et directement opposée à la *résistance* de l'obstacle (96). Pour soutenir, avec la main, un poids de 5 kilogrammes, on est obligé de développer un effort musculaire : cet effort équivaut à 5 kilogrammes.

118. *Remarque.* — Les expressions *pesanteur* et *poids* ne doi-

(*) Sous ce titre, nous réunissons un certain nombre de questions, fort importantes, que nous n'avons pu traiter d'une manière complète dans le *Manuel du Baccalauréat*. Bien qu'elles ne soient pas *exigées*, les candidats à l'École Polytechnique doivent être en état d'y répondre.

(**) « Tous les corps, tant solides que fluides, tombent en bas dès qu'ils ne sont plus soutenus. Quand je tiens une pierre dans la main et que je la lâche, elle tombe à terre et tomberait encore plus loin s'il y avait un trou dans la terre. Dans le temps même que j'écris ceci, mon papier tomberait à terre s'il n'était soutenu par ma table. La même chose arrive à tous les corps que nous connaissons; il n'en est aucun qui ne tombe à terre dès qu'il n'est plus soutenu ou arrêté. La cause de ce phénomène ou de ce penchant qui se trouve dans tous les corps est nommée leur *gravité* ou leur *pesanteur*. » (EULER, *Lettres à une princesse d'Allemagne*.)

vent pas être confondues : la pesanteur est la cause générale, la force qui fait tomber tous les corps; le poids est la portion de cette force appliquée à un corps déterminé (*).

119. *Centre de gravité.* — Le *point d'application* (88) du poids d'un corps est appelé, pour une raison que nous verrons plus tard, *centre de gravité* du corps. *Ce centre n'est pas nécessairement dans l'intérieur du corps* (**).

120. *Verticale.* — Quand un corps pesant est suspendu, à l'état de repos, à l'extrémité d'un fil très-délié, il y a équilibre entre le poids du corps et la résistance que le fil oppose à la rupture (96) : la direction du poids, ou la *verticale* du lieu, est donc celle du fil. C'est ce qu'on exprime en disant : *la direction de la verticale est indiquée par le fil à plomb.*

121. On démontre, dans la Mécanique rationnelle, que *la verticale d'un lieu est normale à la surface des eaux tranquilles.* D'ailleurs la figure de la terre est celle d'un ellipsoïde aplati, très-peu différent d'une sphère. Conséquemment, *la verticale d'un lieu quelconque passe, à fort peu près, par le centre de la terre.*

Phénomènes produits par la pesanteur.

122. *Chute des corps pesants.* — Dans le vide, les corps *légers* tombent aussi rapidement que les corps *lourds*. Dans l'air, il n'en est plus de même : une pièce de monnaie tombe beaucoup plus vite qu'une rondelle de papier ayant le diamètre de la pièce. La

(*) Pour éviter toute ambiguïté, on devrait peut-être employer exclusivement le mot de *pesanteur* pour désigner, non la *cause* en vertu de laquelle les corps tombent, mais bien la *propriété* qu'ils ont de tendre à tomber. Euler, dont l'opinion doit avoir tant d'autorité, dit expressément, dans l'ouvrage cité : *Quand on dit que tous les corps sont graves, on entend qu'ils ont un penchant à tomber, et qu'ils tomberont tous en effet dès qu'on ôtera ce qui les a soutenus jusqu'ici.* Il est bien vrai qu'immédiatement avant cette phrase, le grand géomètre appelle *gravité ou pesanteur la cause de ce penchant qui se trouve dans tous les corps*, mais c'est peut-être là, ou une très-légère inadvertance, ou un sacrifice à l'opinion commune.

(**) Par exemple, le centre de gravité d'une mince capsule ou hémisphère de platine est situé, à très-peu près, au milieu du rayon perpendiculaire à la base.

raison de cette différence de vitesse est facile à saisir : la résistance de l'air, s'exerçant de la même manière sur les deux corps, est relativement plus grande sur celui qui pèse le moins; elle doit donc ralentir le mouvement de celui-ci bien plus que le mouvement du premier (*).

123. *La pesanteur est une force constante.* — Puisque tous les corps, abandonnés à eux-mêmes, dans le vide, tombent également vite; puisque la direction du poids d'un corps quelconque passe par le centre de la terre, il est naturel de supposer, à cause des grandes dimensions de celle-ci, que la pesanteur est une *force constante*, émanant de ce centre, lequel jouerait le rôle de pôle attractif (98). S'il en est ainsi, le mouvement d'un corps qui tombe d'une petite hauteur (**) doit être uniformément accéléré. Mais, comme la vitesse acquise croît très-rapidement, il n'est pas possible de vérifier, d'une manière directe, si les lois de la chute des corps pesants sont celles que nous avons indiquées ci-dessus (32). On supplée à cette observation effective, soit par le *plan*

(*) Soient P, p les poids de la pièce et de la rondelle, soit r la résistance que l'air oppose au mouvement vertical d'une surface horizontale égale à la surface de chacun des deux corps. La force qui sollicite le poids P étant $P - r$, l'accélération correspondante sera (114)

$$w = g \cdot \frac{P - r}{P} = g\left(1 - \frac{r}{P}\right).$$

De même, l'accélération du mouvement de la rondelle a pour valeur

$$w' = g \cdot \frac{p - r}{p} = g\left(1 - \frac{r}{p}\right).$$

Donc, à cause de $P > p$, on aura

$$w > w'.$$

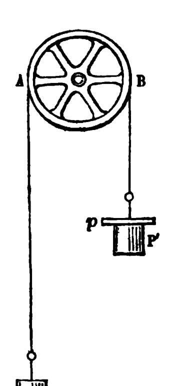
Il est bien entendu que c'est là une première *ébauche* de la *théorie du mouvement des corps pesants dans l'air*: en réalité, la résistance r, au lieu d'être constante, comme nous le supposons ici, croît rapidement avec la vitesse du mobile.

(**) Si l'on pouvait faire tomber un corps, soit d'une très-grande hauteur, soit dans un puits très-profond, son mouvement ne serait plus uniformément accéléré, parce que l'attraction, au lieu d'être à peu près constante, varierait avec la distance au centre de la terre.

incliné de Galilée, soit par la *machine d'Atwood,* soit enfin par *l'appareil à indications continues,* de MM. Poncelet et Morin.

Machine d'Atwood.

124. Elle consiste, essentiellement, en une poulie très-mobile AB, sur laquelle s'enroule un fil portant, à ses deux extrémités, des poids égaux P, P'. Un poids additionnel p, supporté par le poids P', détermine le mouvement du fil et de la poulie. Enfin, un pendule à secondes, une règle verticale divisée, un curseur annulaire et un curseur plein, permettent d'observer toutes les circonstances du mouvement, soit du système des trois poids, soit du système des poids P, P'.



125. On peut vérifier d'abord cette proposition, assez évidente du reste : *les deux poids égaux* P, P' *se font équilibre au moyen de la poulie.* Supposons, pour fixer les idées,

$$P = P' = 100^{gr}, \quad p = 5^{gr}.$$

Si, dans une première expérience, on place le curseur annulaire C à $119^{mm},6$ au-dessous du zéro de la règle, et le curseur plein D à une distance OD double de OC, puis qu'au moyen du pendule on mette en mouvement le système des trois poids, on reconnaît qu'en une seconde le poids P', augmenté de p, parcourt l'espace OC, et que dans la seconde suivante le même poids P', après avoir abandonné p, décrit l'espace CD.

Cela posé, dans une deuxième, une troisième, une quatrième expérience, on double, on triple, on quadruple CD, en laissant OC constant ; et les temps qu'emploie le poids P' pour parcourir l'espace compris entre les deux curseurs sont, respectivement, 2, 3, 4 secondes. Le mouvement du système P, P' est donc uniforme à partir de l'instant où le poids p est arrêté par le curseur annulaire, c'est-à-dire que les poids P, P' se font équilibre (91) (*).

(*) Dans ces expériences et dans celles dont nous allons parler, on néglige complétement le poids du fil, ainsi que la résistance de l'air.

126. Puisqu'il en est ainsi, la force qui détermine le mouvement du système des trois corps P, P', p se réduit au poids additionnel p. Si donc, comme il s'agit de le vérifier, un corps sollicité librement par son poids a un mouvement uniformément varié, dont l'accélération *inconnue* soit représentée par g, nous aurons (114), en appelant ϖ l'accélération déterminée par la force p,

$$\varpi = g \cdot \frac{p}{2P+p}.$$

On pourra donc, à cause de la fraction $\frac{p}{2P+p}$ (*), diminuer autant qu'on le voudra l'accélération ϖ, et rendre observables, au moyen de la machine d'Atwood, les espaces et les vitesses. Réciproquement, si le mouvement observé est uniformément accéléré, il en sera de même pour le mouvement des corps pesants entièrement libres, et la valeur trouvée pour ϖ donnera, avec un certain degré d'approximation, l'accélération g.

127. En faisant la distance OC égale, successivement, à

$$119^{mm},6, \quad 119^{mm},6.4, \quad 119^{mm},6.9, \quad 119^{mm},6.16,$$

on trouve que les temps employés à parcourir cette distance sont

$$1^s, \qquad 2^s, \qquad 3^s, \qquad 4^s.$$

Conséquemment, *les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps* (32).

128. Si, après avoir adopté une des valeurs précédentes pour OC, on prend CD *double* de OC, on reconnaît que le poids P', après avoir abandonné en C le poids additionnel p, vient rencontrer le curseur D au bout d'un temps égal à celui que le système P'+p avait employé pour parcourir OC. Il suit de là que les vitesses acquises après

$$1^s, \qquad 2^s, \qquad 3^s, \qquad 4^s,$$

sont

$$119^{mm},6.2, \quad \frac{119^{mm},6.2.4}{2}, \quad \frac{119^{mm},6.2.9}{3}, \quad \frac{119^{mm},6.2.16}{4},$$

ou $\quad 237^{mm},2, \quad 237^{mm},2.2, \quad 237^{mm},2.3, \quad 237^{mm},2.4,$

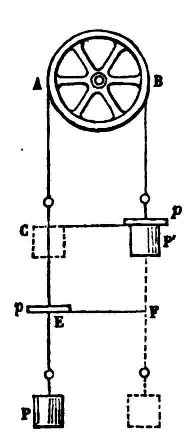
Ces derniers nombres mettent en évidence la seconde loi qu'il

(*) Dans l'exemple choisi plus haut, la valeur de cette fraction est $\frac{1}{11}$.

s'agissait de vérifier : *les vitesses acquises sont proportionnelles aux temps.* De plus, *l'accélération* w *a pour valeur* $237^{mm},2$. Par suite, $g = 237^{mm},2.41 = 9^{m},8076$. Ce résultat diffère assez peu du véritable.

129. La machine d'Atwood peut servir encore à démontrer une autre conséquence des lois de la pesanteur, conséquence sur laquelle nous reviendrons plus loin, et qui consiste en ce que : *la hauteur à laquelle parvient un mobile lancé verticalement, de bas en haut, avec une vitesse initiale a, est précisément égale à la hauteur d'où il devrait tomber pour acquérir cette vitesse a* (*). Voici comment se fait l'expérience :

Les poids égaux P, P′ étant immobiles, on dispose, à égales distances des plans horizontaux passant par leurs faces supérieures, deux curseurs annulaires E, F ; puis on applique deux poids additionnels égaux p, p', l'un sur le curseur E, l'autre sur le poids P′. Le mouvement du système des trois poids P, P′, p' est uniformément accéléré, jusqu'à ce que les faces supérieures des poids P, P′ arrivent, l'une en E, l'autre en F. A cet instant, P est augmenté de p, et P′ abandonne p' ; en sorte que le système primitif est remplacé par le système des poids P, p, P′. La vitesse *initiale* de celui-ci est égale à la vitesse *finale* de l'autre ; mais, comme le poids additionnel p agit *de haut en bas*, tandis que P se meut *de bas en haut*, le nouveau mouvement est *retardé*. Or, on reconnaît qu'il cesse quand la face supérieure du poids P est parvenue en C, c'est-à-dire *quand le poids p s'est élevé à une hauteur égale à celle dont était descendu le poids p′*.

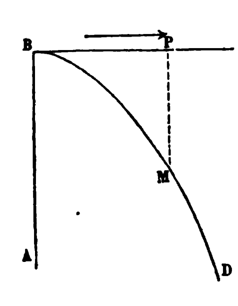


130. *Remarque.* — Comme, à la fin de cette expérience, le poids P remplace, en quelque sorte, le poids P′, et *vice versâ,* il s'ensuit que si l'on abandonne l'appareil à lui-même, il produira une série d'oscillations *isochrones*.

(*) Dans les Exercices du Chapitre IV, nous avons admis cette proposition.

Appareil à indications continues.

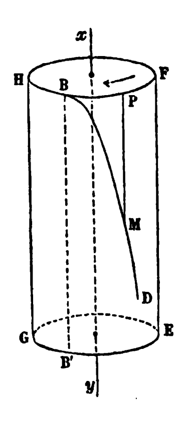
131. Pour rendre plus simple l'explication de cette machine, due, comme nous l'avons dit, à MM. Poncelet et Morin, remarquons d'abord que si une boule B, enduite d'encre, était lancée horizontalement le long d'un mur vertical ABC, elle tracerait sur ce mur, supposé peint en blanc, par exemple, une trajectoire parabolique BMD (106). L'abscisse BP et l'ordonnée PM de la position M occupée par la boule au bout du temps t, auraient pour valeurs



$$BP = at, \quad PM = \frac{1}{2}gt^2,$$

a étant la vitesse initiale du mobile.

Au lieu de lancer la boule dans la direction BP, avec une vitesse a, laissons-la tomber librement, mais remplaçons le mur par un plan vertical mobile, animé d'une vitesse égale et contraire à a : le mouvement relatif de la boule et du plan sera le même que dans le premier cas (107, 3°), et la trajectoire *apparente* tracée par la boule sur le plan sera encore la parabole BMD.



Enfin, si nous substituons au plan mobile un cylindre vertical EFGH, tournant autour de son axe xy, de telle sorte que la vitesse de chacun des points de sa surface soit a, la trajectoire BMD décrite par la bille B tombant librement sous l'action de la pesanteur, aura pour *transformée* la parabole considérée tout à l'heure.

Dans l'appareil de MM. Morin et Poncelet, la bille est remplacée par un petit poids conique, portant un *pinceau* enduit d'encre. Le cylindre tournant est recouvert d'un papier enroulé sur sa surface, et portant des lignes horizontales et des lignes verticales, équidistantes. Un mouvement d'horlogerie communique au cylindre une rotation uniforme. Enfin, un ressort

détermine simultanément la chute du poids et la rotation du cylindre. La transformée de la courbe tracée par le pinceau étant une parabole, il s'ensuit que les *espaces parcourus suivant la verticale*, par le poids conique, *sont proportionnels aux carrés des temps*. Cette loi est la seule qu'on puisse vérifier avec l'appareil dont nous venons de donner une idée.

132. *Remarque.* — L'appareil à indications continues peut servir à trouver la loi des espaces dans un mouvement rectiligne quelconque : si, par exemple, la trajectoire BMD était une *hélice*, il en résulterait que le pinceau a décrit uniformément la verticale BB'.

Problèmes sur le mouvement des corps pesants (*).

133. Problème I. — *Un projectile est lancé verticalement, de bas en haut, avec une vitesse initiale a. On demande : 1° à quelle hauteur il parviendra ; 2° après combien de temps il reviendra au point de départ.*

La force qui sollicite le projectile est son poids ; elle agit en sens contraire de la vitesse initiale ; le mouvement ascendant du projectile est donc uniformément retardé (101), et ses équations sont

$$v = a - gt, \quad (1)$$

$$x = at - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2)$$

Quand le mobile s'arrête, $v = 0$; par conséquent, la hauteur h à laquelle il parvient est déterminée par les deux équations

$$0 = a - gt, \quad h = at - \frac{1}{2}gt^2.$$

Elles donnent, par l'élimination de t,

$$h = \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}. \quad (3)$$

On conclut, de cette valeur de h, $a = \sqrt{2gh}$, en sorte que *la vitesse initiale a est égale à la vitesse due à la hauteur h.* Autrement dit, *la hauteur à laquelle s'élève le projectile, en vertu de*

(*) Les deux premiers ont été proposés dans les Exercices du Chapitre IV, comme exemples de mouvements rectilignes.

sa vitesse initiale a, est égale à la hauteur d'où il devrait tomber pour acquérir cette vitesse. C'est ce que nous avions déjà reconnu par l'emploi de la machine d'Atwood (129).

Le temps T que le mobile emploie à revenir au point de départ est le double du temps pendant lequel il s'élève; par conséquent

$$T = \frac{2a}{g}.$$

134. *Remarque.* — La propriété que nous venons de démontrer peut être énoncée en termes plus généraux : *un mobile sollicité seulement par la pesanteur reprend la même vitesse quand il repasse au même point* (*).

135. Problème II. — *A n secondes d'intervalle, et dans la même direction verticale, on a lancé deux projectiles dont la vitesse initiale commune est a. On demande le temps qu'emploiera le second projectile pour atteindre le premier.*

D'après la remarque précédente, les deux projectiles, quand ils se rencontrent, ont des vitesses égales et contraires. Or, la vitesse du premier est $g\left(n+t-\frac{a}{g}\right)$; celle du second est $a-gt$; donc

$$g\left(n+t-\frac{a}{g}\right) = a - gt;$$

d'où

$$t = \frac{a}{g} - \frac{1}{2}n.$$

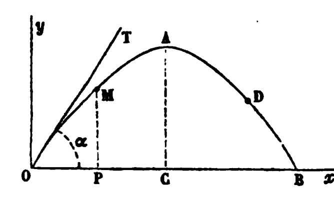
136. *Remarque.* — Si n est plus grand que $\frac{2a}{g}$, on trouve pour t une valeur négative; d'où l'on peut inférer que le problème est impossible. En effet, $\frac{2a}{g}$ représente le temps T que le premier projectile emploie pour revenir à son point de départ (133); donc, pour que les mobiles puissent se rencontrer, on doit supposer $n < \frac{2a}{g}$.

137. Problème III. — *Quelles sont les circonstances principales*

(*) Cette proposition est elle-même un cas particulier du théorème connu sous le nom de *principe des forces vives*. (*Voyez* le Chapitre XI.)

du mouvement d'un projectile dont la vitesse initiale a fait un angle α avec l'horizon ?

1°. O étant la position initiale du projectile, soient Oy la verticale passant par ce point, et Ox l'horizontale menée, de ce même point, dans le plan vertical TOy passant par la direction OT de la vitesse initiale. Comme la seule force qui agit sur le projectile est la pesanteur, la trajectoire sera contenue dans le plan vertical xOy.



Cela posé, le mouvement effectif du mobile peut être décomposé en deux autres mouvements plus simples (104); l'un, parallèle à Ox, est dû seulement à la composante horizontale de la vitesse a; l'autre, parallèle à Oy, ne diffère pas du mouvement d'un projectile lancé de bas en haut avec une vitesse $a \sin \alpha$ (133). Les équations de ces deux mouvements sont donc

$$x = at \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y = at \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

2°. La hauteur AC à laquelle s'élève le projectile est déterminée (133) par la formule

$$h = \frac{1}{2} \frac{(a \sin \alpha)^2}{g} = \frac{a^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (3)$$

Pour interpréter plus aisément ce résultat, supposons que a soit la vitesse due à une certaine hauteur H, de manière que $H = \frac{a^2}{2g}$; alors

$$h = H \sin^2 \alpha. \quad (4)$$

Comme $\sin^2 \alpha$ est inférieur à l'unité, on voit que *la hauteur du jet est toujours moindre que la hauteur* DUE *à la vitesse initiale.* Il n'y a d'exception que pour $\alpha = 90°$, auquel cas

$$h = H = \frac{a^2}{2g}.$$

3°. *La portée du jet*, c'est-à-dire la distance OB à laquelle le

projectile va rencontrer de nouveau l'axe Ox, est la valeur de x qui correspond à $y=0$. Or, on tire de l'équation (2), pour cette valeur de y, en rejetant $t=0$,

$$t=\frac{2a\sin\alpha}{g};$$

par conséquent
$$OB=\frac{2a^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha,$$

ou
$$OB=2H\sin 2\alpha. \quad (5)$$

On conclut, de cette valeur, que *la portée est la plus grande possible, quand le projectile est lancé sous l'inclinaison de* 45°; elle est alors égale à deux fois la hauteur qui correspond à la vitesse initiale, ou à quatre fois la hauteur à laquelle s'élève le projectile (*).

4°. On peut se proposer de chercher sous quelle inclinaison il faut lancer le projectile, afin qu'il atteigne un *but* D, dont les *coordonnées* x et y sont connues. Pour résoudre cette question, on doit éliminer t entre les équations (1), (2), et résoudre par rapport à α l'équation résultante. On obtient d'abord

$$y=x\operatorname{tang}\alpha-\frac{gx^2}{2a^2\cos^2\alpha};$$

puis, en remplaçant a^2 par $2gH$, et $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ par $1+\operatorname{tang}^2\alpha$:

$$x^2\operatorname{tang}^2\alpha-4Hx\operatorname{tang}\alpha+4Hy+x^2=0. \quad (6)$$

Cette équation donne

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{1}{x}\left[2H\pm\sqrt{4H^2-4Hy-x^2}\right]. \quad (7)$$

Quand les coordonnées x et y du point D satisfont à l'inégalité

$$4H^2>4Hy+x^2, \quad (8)$$

les deux valeurs de $\operatorname{tang}\alpha$ sont réelles et inégales; par conséquent: *pour une même vitesse initiale du projectile, il existe en général*

(*) A cause de

$$h=H\sin^2 45^\circ=\frac{1}{2}H.$$

deux directions de cette vitesse qui permettent d'atteindre un but donné.

Ces deux directions se réduisent à une seule, déterminée par

$$\tang \alpha = \frac{2\mathrm{H}}{x},$$

quand

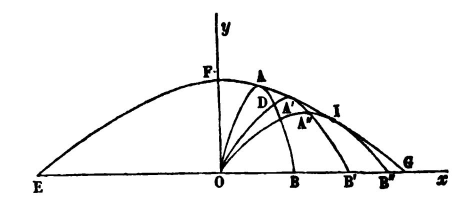
$$4\mathrm{H}^2 = 4\mathrm{H}y + x^2. \quad (9)$$

Enfin, si les coordonnées x, y et la hauteur H satisfont à la relation

$$4\mathrm{H}^2 < 4\mathrm{H}y + x^2, \quad (10)$$

il est impossible que le projectile passe par le point donné D.

5°. L'équation (6), qui est celle de la trajectoire du projectile, représente une parabole OAB ayant AC pour axe et A pour sommet. Si, dans cette équation, on fait varier l'angle α, on obtiendra



une infinité de paraboles OAB, OA'B', OA''B'', dont l'*enveloppe* sera une autre parabole EFG, représentée par l'équation (9). Si le but D est *intérieur* à cette dernière courbe, le projectile pourra évidemment l'atteindre, soit en décrivant la parabole OAB, soit en décrivant la parabole ODA'. Quand le but est sur l'enveloppe, en I par exemple, il n'existe qu'une seule direction suivant laquelle on puisse lancer le projectile. Enfin, quand le but est extérieur à EFG, le projectile ne peut plus l'atteindre. Ces dernières circonstances sont exprimées algébriquement par les relations (8), (9), (10).

6°. Entre les équations (1), (2), éliminons l'angle α; l'équation

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = a^2t^2 \quad (11)$$

que nous obtenons, représente *une circonférence que le projectile rencontre au bout du temps t, quel que soit l'angle de pro-*

jection. Cette circonférence a pour centre le lieu qu'occuperait le projectile, s'il était tombé sans vitesse initiale. De plus, elle rencontre l'axe Ox au point où se trouverait le mobile, s'il avait été lancé horizontalement; ce qui devait être (*).

7°. Les composantes horizontale et verticale de la vitesse v ont pour valeurs :

$$x' = a\cos\alpha, \quad y' = a\sin\alpha - gt;$$

donc

$$v^2 = a^2\cos^2\alpha + (a\sin\alpha - gt)^2. \quad (12)$$

D'après la forme du second membre : *la vitesse commence par décroître; elle devient minimum quand le projectile passe au sommet de la parabole qu'il décrit; elle croît ensuite; enfin, le mobile frappe le sol avec une vitesse égale à sa vitesse initiale.*

8°. Le projectile étant sollicité seulement par son poids, l'*accélération totale* w (65) est égale à g, en valeur absolue.

9°. Quant à l'*accélération tangentielle* et à l'*accélération centripète*, leurs expressions n'ont rien de remarquable.

138. Problème V. — *Sachant que l'attraction exercée par une sphère, sur un point extérieur, est la même que si la masse de la sphère était concentrée en son centre, on demande de calculer :*

1°. *Le rapport des poids d'une même masse, à la surface de Jupiter et à la surface de la terre;*

2°. *La valeur de la gravité, à la surface de Jupiter;*

3°. *La longueur du pendule qui battrait les secondes sur cette planète.*

1°. D'après la loi de la gravitation universelle, les attractions exercées sur une molécule m, par deux points matériels A, B, sont proportionnelles aux masses M, M' de ces deux points, et inversement proportionnelles aux carrés des distances mA, mB. Il résulte de là, et de la propriété indiquée dans l'énoncé, que si une même masse m était transportée, successivement, sur la terre et sur Jupiter, les poids p, p' accusés par un dynamomètre auquel cette masse serait suspendue (93), satisferaient à la relation

$$\frac{p'}{p} = \frac{M'}{M} \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^2,$$

(*) On peut encore remarquer que *toutes les circonférences représentées par l'équation* (11) *sont tangentes à la parabole* (9).

r, r' étant les rayons de la terre et de Jupiter.

Or, $$\frac{M'}{M} = \frac{354\,936}{1\,050}, \quad \frac{r}{r'} = \frac{1}{11,225};$$

donc $$\frac{p'}{p} = \frac{354\,936}{1\,050} \cdot \frac{1}{(11,225)^2}.$$

Effectuant par logarithmes, on trouve

$$\frac{p'}{p} = 2,6828.$$

Ainsi, un poids d'un kilogramme, transporté de la terre sur Jupiter, tendrait le dynamomètre jusqu'au point correspondant à $2\,682^{g},8$.

2°. Les poids p, p' sont entre eux comme les accélérations correspondantes g, g' (*). Par conséquent, la *gravité* à la surface de Jupiter a pour expression :

$$g' = g.2,6828;$$

ou, à cause de $g = 9^{m},80896$,

$$g' = 26^{m},3155.$$

3°. Les longueurs l, l' de deux pendules qui battraient les secondes à Paris et sur Jupiter, sont proportionnelles à g et g' (**).

Donc $$l' = l.2,6828;$$

et comme $l = 0^{m},993\,855$,

$$l' = 2^{m},666\,31 \text{ (***)}.$$

(*) Parce que $m = \frac{p}{g} = \frac{p'}{g'}$.

(**) En vertu de la formule de Galilée :

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

formule qui sera démontrée plus loin.

(***) Le lecteur s'étonnera peut-être que le rapport $\frac{p'}{p}$ ne soit pas plus grand, mais il lui suffira de faire attention que, si la masse de Jupiter était égale à celle de la terre, l'attraction, à la surface de la première

CHAPITRE X.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN MÊME POINT MATÉRIEL.

Parallélogramme des forces.

139. On a vu (104) que *deux forces* F, F′, *constantes en grandeur et en direction, appliquées à un point matériel m en repos, lui impriment un mouvement rectiligne uniformément accéléré, résultant des deux mouvements uniformément accélérés dus aux deux forces prises isolément.*

D'un autre côté, *si un point matériel m est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, il est soumis à l'action d'une force constante* R (102).

Il résulte évidemment, de l'ensemble de ces deux propositions, que *deux forces constantes* F, F′, *appliquées à un point matériel m, peuvent être remplacées par une force unique* R.

On donne, à cette force R, le nom de *résultante* des deux forces F, F′ : celles-ci sont les *composantes* de R.

En général, on appelle *résultante* de plusieurs forces F, F′, F″, F‴,..., *une force unique produisant le même effet que* F, F′, F″, F‴,....

140. Remarque. — *Des forces données n'ont pas toujours une résultante unique.* Par exemple, *deux forces* F, F′, *non dirigées dans un même plan, n'ont pas de résultante* (*).

---

planète, serait 128 fois *moindre* qu'à la surface de la seconde. Au lieu de supposer la masse *m* transportée, successivement, sur la terre et sur Jupiter, on pourrait considérer un corps également distant des deux centres d'attraction ; et alors on trouverait

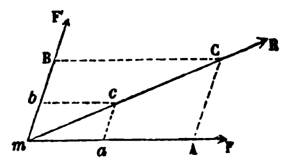
$$\frac{p'}{p} = \frac{354\,936}{1\,050} = 338.$$

(*) Nous engageons le lecteur à chercher la démonstration de cette proposition.

141. Revenons au cas de deux forces constantes F, F′ appliquées à un point matériel m. La relation entre les composantes et la résultante est exprimée par le théorème suivant, connu sous le nom de *Parallélogramme des forces :*

La résultante R *de deux forces* F, F′ *appliquées à un point materiel* m, *est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale* mC *du parallélogramme construit sur les droites* mA, mB, *qui représentent, en grandeur et en direction, les deux composantes.*

Soit ma l'accélération du mouvement uniformément varié qui serait produit par la force F si elle agissait seule. Semblablement, soit mb l'accélération du mouvement dû à la force F′ agissant seule : la diagonale mc du parallélogramme $macb$ représentera l'accélération ω du mouvement résultant, dû à la force inconnue R. De plus, la direction de ω est précisément celle de R (88).



Remarquons à présent que, d'après un théorème démontré (111),

$$\frac{F}{ma}=\frac{F'}{mb}=\frac{R}{mc}, \quad (1)$$

et, en vertu de l'hypothèse,

$$\frac{F}{mA}=\frac{F'}{mB}.$$

On conclut, de ces deux suites de rapports égaux,

$$\frac{ma}{mA}=\frac{mb}{mB};$$

ainsi, les deux parallélogrammes $macb$, mACB sont semblables, et les points m, c, C sont en ligne droite. Par suite, *la diagonale* mC *représente, en direction, la résultante* R.

Elle la représente aussi en grandeur. En effet, la similitude des deux parallélogrammes donne

$$\frac{ma}{mA}=\frac{mb}{mB}=\frac{mc}{mC};$$

d'où, à cause de la suite (1),

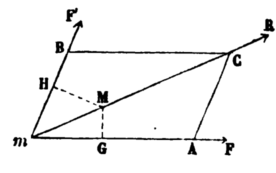
$$\frac{F}{mA} = \frac{F'}{mB} = \frac{R}{mC}.$$

Mais, mA, mB représentent les intensités des forces F, F'; donc il en est de même pour mC, relativement à la résultante R.

142. *Remarques.* — I. La démonstration précédente suppose le point m en repos; mais la proposition est générale; car *l'effet des forces* F, F', R *est indépendant de l'état de repos ou de mouvement du point* (97).

II. Une force variable pouvant toujours être supposée constante pendant un certain temps, pourvu que ce temps soit suffisamment petit, le théorème subsiste pour des forces quelconques.

143. *Autres relations entre la résultante et les deux composantes. — Soient* F, F' *deux forces appliquées à un point matériel m; soit* R *leur résultante :*



1°. *Chacune des trois forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres;*

2°. *Les distances* MG, MH *d'un point* M *de la résultante aux deux composantes, sont en raison inverse des intensités de ces composantes.*

En effet :

1°. Le triangle mBC donne

$$\frac{BC}{\sin BmC} = \frac{mB}{\sin mCB} = \frac{mC}{\sin mBC},$$

ou, en remplaçant les côtés par les forces auxquelles ils sont proportionnels,

$$\frac{F}{\sin(F', R)} = \frac{F'}{\sin(F, R)} = \frac{R}{\sin(F, F')}.$$

2°. Les triangles rectangles MGm, MHm donnent

$$\frac{MG}{MH} = \frac{(\sin F, R)}{(\sin F', R)},$$

ou, en vertu de la proportion précédente,

$$\frac{MG}{MH} = \frac{F'}{F}.$$

144. *Remarque.* — La recherche de la résultante R des deux forces F, F′ équivaut à la résolution du parallélogramme mACB, ou simplement à la résolution du triangle mBC, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris. Ce triangle donne

$$\overline{mC}^2 = \overline{mB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,mB.BC\cos mBC;$$

ou, en remplaçant les lignes par les forces qu'elles représentent, et en faisant attention que mBC est le supplément de BmA :

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF'\cos(F, F'). \quad (1)$$

La résultante étant ainsi déterminée en *grandeur* (*), on la déterminera, en *direction*, par les proportions

$$\frac{F}{\sin(F', R)} = \frac{F'}{\sin(F, R)} = \frac{R}{\sin(F, F')}. \quad (2)$$

Si les composantes F, F′ sont rectangulaires, les relations (1) et (2) se simplifient; elles donnent

$$R = \sqrt{F^2 + F'^2}, \quad (3)$$

$$F = R\cos(F, R), \quad F' = R\cos(F', R). \quad (4)$$

145. Le théorème du *Parallélogramme des forces* donne lieu aux corollaires suivants, analogues à ceux que nous avons déduits du *Parallélogramme des vitesses* et du *Parallélogramme des accélérations:*

I. — *La résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé dont les autres côtés*

(*) La formule (1) donne pour R deux valeurs égales et de signes contraires; mais on doit adopter seulement la valeur positive, attendu que l'*intensité* d'une force, c'est-à-dire son rapport à l'unité de force, ne peut pas être négatif. Quand on affecte une force du double signe ±, on a égard, tout à la fois, à la grandeur de cette force et aux deux sens opposés dans lesquels elle peut agir. Ici il n'y a pas d'ambiguïté : la résultante R agit de m vers C.

sont égaux et parallèles à ceux qui représentent les composantes, en grandeur et en direction.

II. *La résultante de trois forces appliquées à un même point, et non situées dans un même plan, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent les composantes, en grandeur et en direction.*

III. *Étant donnée une force* R, *on peut toujours, d'une infinité de manières, la décomposer en d'autres forces dont les directions passent par le point d'application de la première* (*).

IV. *La résultante de plusieurs forces appliquées à un même point, et dirigée suivant une même droite, est égale à la somme algébrique des composantes.*

V. Si, dans les équations du n° 50, on remplace les vitesses v_1, $v_2, \ldots, v_n$, par des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ appliquées à un même point, on obtient les formules suivantes, qui déterminent, en grandeur et en direction, la résultante R de ces forces :

$$R\cos a = \Sigma F\cos\alpha, \quad R\cos b = \Sigma F\cos\beta, \quad R\cos c = \Sigma F\cos\gamma,$$
$$R^2 = (\Sigma F\cos\alpha)^2 + (\Sigma F\cos\beta)^2 + (\Sigma F\cos\gamma)^2.$$

Conditions de l'équilibre d'un point matériel.

146. Avant de chercher les *conditions de l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un point matériel,* nous rappellerons quelques propositions :

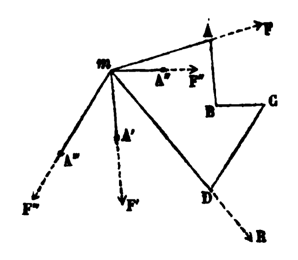
1°. *On dit que des forces se font équilibre, quand elles se neutralisent réciproquement, de manière à ne pas modifier l'état de repos ou de mouvement du corps qu'elles sollicitent* (90);

2°. *Pour que deux forces, appliquées à un point matériel entièrement libre* (**), *se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées* (96);

(*) Cet énoncé est soumis à deux restrictions : 1° *Si les directions données sont dans un même plan, dans lequel ne soit pas située la force* R, *la décomposition est impossible ;* 2° *si les directions données se réduisent à deux, situées dans un même plan avec la force* R, *la décomposition est possible, mais d'une seule manière.*

(**) Un corps est dit *entièrement libre* dans l'espace, quand rien ne s'oppose au mouvement que tendent à lui imprimer les forces qui lui

3°. *Plusieurs forces* F, F′, F″,..., *appliquées à un point matériel m, se réduisent, en général, à une force unique* R *représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé dont les autres côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent les composantes, en grandeur et en direction* (145).

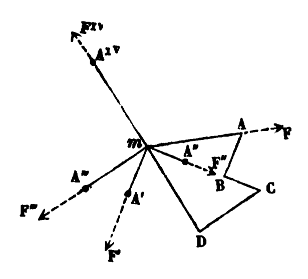


147. De ces principes, on conclut le théorème suivant :

Pour que plusieurs forces F, F′, F″,..., *appliquées à un point matériel m, se fassent équilibre, il faut et il suffit que le polygone dont les côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent ces forces, soit fermé.*

En effet :

1° Si, comme dans la figure du numéro précédent, le polygone *m*ABCD est *ouvert*, les forces F, F′, F″, F‴ auront une résultante R, représentée par la droite *m*D qui *ferme* le polygone;



2° Si, au contraire, le polygone *m*ABCD*m* est *fermé*, son dernier côté D*m*, prolongé d'une quantité égale, représente la force Fiv, laquelle est égale et directement opposée à la résultante R des autres forces F, F′, F″, F‴ : car cette résultante serait représentée par *m*D. Les deux forces Fiv, R se font donc équilibre (146, 2°), ou, ce qui est équivalent, il y a équilibre entre toutes les forces F, F′, F″, F‴, Fiv.

148. Il résulte de cette dernière démonstration, que l'on peut énoncer en ces termes la proposition précédente :

Pour que plusieurs forces, appliquées à un point matériel, se fassent équilibre, il faut et il suffit que l'une quelconque d'entre

---

sont appliquées, c'est-à-dire quand il ne renferme ni *point fixe*, ni *axe fixe*, etc. : une machine est le contraire d'un pareil corps.

elles soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres (*).

149. Enfin, on peut dire encore que :

Des forces, appliquées à un point matériel, se font équilibre si leur résultante est nulle (**).

En effet, quand le dernier sommet du *polygone des forces* s'approche indéfiniment du point d'application, la résultante diminue jusqu'à zéro.

150. *Équations de l'équilibre.* — On a trouvé, dans le n° 145:

$$R^2 = (\Sigma F \cos\alpha)^2 + (\Sigma F \cos\beta)^2 + (\Sigma F \cos\gamma)^2.$$

Mais, pour l'équilibre des forces données, il faut et il suffit que $R = 0$ (149). Par conséquent, les *équations de l'équilibre* sont

$$\Sigma F \cos\alpha = 0, \quad (1)$$
$$\Sigma F \cos\beta = 0, \quad (2)$$
$$\Sigma F \cos\gamma = 0. \quad (3)$$

D'après ce qui précède, ces équations sont *nécessaires et suffisantes*. Ainsi :

Pour que des forces, appliquées à un point matériel, se fassent équilibre, il faut et il suffit que les sommes de leurs projections sur trois axes rectangulaires quelconques passant par ce point, soient séparément nulles.

151. *Remarque.* — Dans la théorie précédente, rien ne fait supposer que le point matériel soit en repos : il pourrait avoir un mouvement quelconque, dû à des forces différentes de celles qui ont été considérées. Autrement dit, *les conditions de l'équilibre d'un point matériel sont indépendantes de l'état de ce point.*

(*) Cette proposition, qui est également vraie pour des forces dirigées d'une manière quelconque, est souvent regardée comme un axiome.

(**) C'est-à-dire si la droite qui devrait représenter cette résultante se réduit au point d'application.

CHAPITRE XI.

DU TRAVAIL ET DE LA FORCE VIVE.

Préliminaires.

152. *Objet principal des forces.* — Les forces dont l'industrie fait usage ont toujours pour objet, non-seulement de vaincre certaines résistances, mais encore, et surtout, de faire mouvoir les corps au moyen desquels ces résistances se manifestent. Ainsi, dans les constructions, la force musculaire de l'homme et des animaux est employée à soulever et transporter des fardeaux, à pousser des brouettes, à scier de la pierre ou du bois; dans les moulins à eau, la pesanteur, par l'intermédiaire d'une roue à palettes, fait tourner la meule et écrase le blé; dans les locomotives, la force élastique de la vapeur d'eau détruit le frottement qui s'exerce entre les roues et les rails, et, par suite, fait marcher le convoi, etc. Dans ces exemples, et dans tous ceux que l'on peut imaginer, l'*effet utile* produit se compose constamment d'une *résistance vaincue* et d'un *point d'application déplacé.*

153. *Forces perdues.* — D'après cela, une force à laquelle aucune résistance ne s'oppose, ou une force qui ne produit pas de mouvement, ne peut être d'aucune utilité : on lui donne le nom de *force perdue.* Il est facile de justifier cette expression : un ouvrier qui pousserait un mur solidement établi, ou qui ferait tourner, *à vide,* une manivelle, n'aurait droit à aucun salaire, parce que sa force musculaire serait, dans le langage habituel ou dans le langage scientifique, absolument perdue.

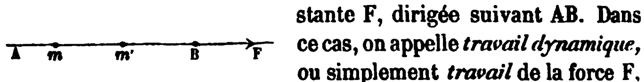
154. Une force n'étant utile que si elle fait mouvoir le point d'application d'une résistance, le *loyer* d'un moteur, animé ou inanimé, doit dépendre de ces deux éléments : *intensité de la résistance, espace décrit par son point d'application.* On va voir que, dans la plupart des cas, il est proportionnel à leur produit.

Considérons l'exemple très-simple d'un manœuvre hissant un bloc de pierre à l'aide d'une poulie. Pour que le bloc se meuve

uniformément, il suffit que l'effort musculaire développé par l'ouvrier soit égal au point P du fardeau. D'un autre côté, le temps pendant lequel cet effort doit être soutenu, croît comme la hauteur h à laquelle la pierre doit être amenée. On voit donc que le *travail exécuté* doit être supposé proportionnel au produit Ph. puisqu'il en serait ainsi du salaire.

Définition du travail.

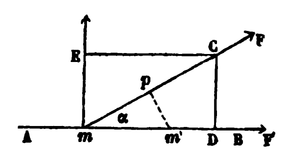
155. *Force constante; mouvement rectiligne.* — Soit un point matériel m décrivant une droite AB, sous l'action d'une force constante F, dirigée suivant AB. Dans ce cas, on appelle *travail dynamique*, ou simplement *travail* de la force F, *le produit* T *du nombre* F *qui représente l'intensité de celle-ci, par le nombre e qui représente le chemin mm' parcouru par son point d'application m.*



Par exemple, le travail d'un poids P tombant verticalement d'une hauteur h est (154)

$$T = \mathfrak{E}P = Ph.$$

156. Si la force F, constante en grandeur et en direction, est oblique à la droite AB suivant laquelle se meut son point d'application m, le travail de cette force est *le produit du nombre e qui représente le chemin mm' parcouru par son point d'application, par le nombre* F' *qui représente la force* F *estimée suivant cette droite mm'.*



Il est aisé de voir que cette définition s'accorde avec la première. Supposons, en effet, que m soit un anneau dans lequel passe une tige fixe AB. Décomposons F en une force F' dirigée suivant AB, et en une force F" perpendiculaire à AB. On peut admettre que cette dernière composante est *détruite par la résistance de la tige*, ou qu'elle rentre dans la catégorie des *forces perdues* (153).

L'effet de la force F se réduisant à celui de sa composante F', il y a donc lieu d'appeler travail de F le produit eF', lequel est le travail de F'.

157. *Remarques.* — I. La composante F' a pour valeur $F \cos \alpha$

(144). D'un autre côté, si l'on abaisse $m'p$ perpendiculaire à mC, on aura, pour valeur du *chemin estimé suivant la direction de la force*, $e' = e\cos\alpha$. Conséquemment, le travail de F est susceptible des trois formes suivantes :

$$\mathfrak{T}F = F'e, \quad \mathfrak{T}F = Fe\cos\alpha, \quad \mathfrak{T}F = Fe'.$$

II. La deuxième formule conduit à cette définition, qui comprend les deux premières : *le travail d'une force constante, agissant sur un point qui se meut en ligne droite, est le produit de la force par le chemin parcouru, et par le cosinus de l'angle que fait la direction de la force avec celle du chemin.*

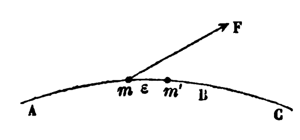
III. Les facteurs F, e étant supposés positifs, le produit $Fe\cos\alpha$ est positif ou négatif suivant que l'angle α est aigu ou obtus. Dans le premier cas, la force F accélère le mouvement ; dans le second, elle le ralentit.

IV. Si l'angle α est droit, $\cos\alpha = 0$, et $\mathfrak{T}F = 0$; ce qui doit être (156).

158. Le travail est dit *moteur* ou *résistant*, suivant que la force tend à augmenter ou à diminuer la vitesse. Ainsi, quand un corps a été lancé verticalement de bas en haut, le travail de la pesanteur est *résistant* pendant que le corps s'élève ; il devient *moteur* dès que le corps descend. Les raisons de ces dénominations sont évidentes.

159. Remarque. — *Le travail est moteur ou résistant, suivant qu'il est positif ou négatif.*

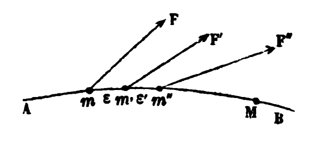
160. *Travail élémentaire d'une force quelconque.* — Soit à présent une force quelconque F, agissant sur un point dont la trajectoire est ABC. Soient m, m' deux positions de ce point, assez rapprochées pour que le petit arc mm' puisse être regardé comme confondu avec sa corde, et que la force F ait pu être supposée constante, en grandeur et en direction, pendant le temps employé à décrire mm'.



On appellera *travail élémentaire* de la force F, conformément à la définition précédente (157, II), *le produit de la force* F *par l'élément de chemin, et par le cosinus de l'angle que fait la direction de la force avec celle de l'élément ;* ou encore :

Le travail élémentaire d'une force est le produit de l'élément de chemin par la projection de la force sur cet élément (*).

161. *Travail total.* — La somme des travaux élémentaires d'une force variable F, ou plutôt *la limite vers laquelle tend cette somme* quand l'élément ε diminue jusqu'à zéro, est ce qu'on appelle *travail total* de cette force. Ainsi, en supposant que le point matériel se soit transporté de m en M dans le temps θ, de manière à occuper successivement les positions m, m', m'',..., on aura, en appelant F, F', F'',..., les intensités correspondantes de la force, et α, α', α'',..., les angles Fmm', $F'm'm''$,...,



$$\mathcal{E}\,F = \lim(F\varepsilon\cos\alpha + F'\varepsilon'\cos\alpha' + F''\varepsilon''\cos\alpha'' + \ldots),$$

ou

$$\mathcal{E}\,F = \lim \Sigma F\varepsilon \cos\alpha.$$

Évaluation du travail total.

162. *Une force constamment perpendiculaire à l'élément de chemin parcouru par son point d'application ne produit aucun travail.*

En effet, $\cos\alpha = 0$, $\cos\alpha' = 0$, etc. (**).

(*) Cette considération du travail élémentaire d'une force, due à un savant géomètre, nous semble manquer de netteté. En effet, à quel moment le petit arc mm' peut-il être supposé confondu avec sa corde? On répondra, sans doute: *quand l'arc est infiniment petit.* Nous ne pouvons discuter ici la valeur de cette *solution.*

(**) Il semblerait, d'après cela, qu'*un manœuvre chargé d'un fardeau et marchant sur un terrain horizontal n'aurait droit à aucun salaire;* ce qui serait évidemment absurde. D'un autre côté, la plupart des praticiens évaluent à 97 kilogrammètres par seconde le *travail produit par un homme marchant sur un terrain horizontal sans fardeau.* Voici comment un illustre géomètre explique ce paradoxe et cette contradiction:

« Quand un homme transporte son propre poids, que j'appellerai Π, à une hauteur verticale h au-dessus de son point de départ, la quantité de travail produit est Πh...; mais *cette quantité donnerait une idée très-imparfaite des efforts musculaires qui ont été faits et de la force que cet homme a développée.* Il serait difficile d'en obtenir une mesure exacte;

163. Si la force F est constante, et qu'elle soit dirigée, à chaque instant, suivant la tangente à la trajectoire AB,

$$\mathfrak{T}F = F \lim \Sigma s = Fs :$$

le travail total est égal, dans ce cas, *au produit de la force par le chemin,* absolument comme si le mouvement était rectiligne.

164. Lorsque la force est constante, en grandeur et en direc-

---

on peut seulement faire voir qu'*elle doit surpasser,* souvent de beaucoup, *la quantité précédente, qui serait nulle si la hauteur h était zéro,* quoique, certainement, *il y ait une quantité de travail* mécanique *correspondante à la marche d'un homme sur un plan horizontal.*

» Dans cette marche, je suppose que l'homme ait d'abord le pied gauche en avant du pied droit; son centre de gravité est alors abaissé, au-dessous de sa position naturelle, d'une quantité que je désignerai par ε. En s'appuyant sur son pied gauche et s'aidant du frottement de ce pied contre le sol, l'homme ramène son pied droit au niveau du pied gauche, puis le pied droit devance le pied gauche et va se poser sur le sol; ce qui fait un pas entier, composé de deux parties. Or, dans la première partie, l'homme soulève son centre de gravité de la hauteur ε, et produit par là une quantité de travail égale à $\Pi\varepsilon$; il imprime, au même instant, à ce point une vitesse horizontale, que je désignerai par a, à la fin du premier demi-pas; ce qui répond à une autre quantité de travail $\Pi\alpha$, en appelant α la hauteur due à la vitesse a.

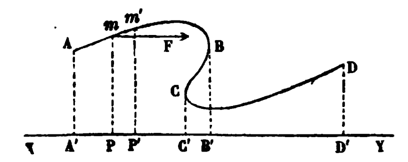
» ... Je supposerai aussi que le second demi-pas a lieu en vertu de la vitesse acquise à la fin du premier et du poids du corps qui retombe sur le sol, de manière que, pendant le second demi-pas, l'homme n'exerce plus aucun effort, et que les vitesses verticale et horizontale, dont son centre de gravité se trouve encore animé à la fin du pas entier, soient détruites par le choc et le frottement de son pied droit contre le sol. Dans cette hypothèse, la quantité de travail de l'homme pendant le pas entier sera... $\Pi(\varepsilon + \alpha)$.

» Il suit de là que, dans un nombre n de pas égaux, la quantité de travail d'un homme ou d'un animal, portant un fardeau et marchant sur une route horizontale, aura pour valeur $nK(\varepsilon + \alpha)$, en désignant par K son poids Π, augmenté de celui du fardeau. Si le poids total a été élevé verticalement à une hauteur h au-dessus du point de départ, il faudra ajouter Kh à la quantité $nK(\varepsilon + \alpha)$. » (Poisson, *Traité de Mécanique.*)

Sans altérer le sens, nous avons modifié le texte en quelques points, afin d'abréger.

tion, *le travail total est égal au produit de la force par la projection du chemin, faite sur la direction de la force.*

En effet, $\mathfrak{T} F = F \lim \Sigma \varepsilon \cos\alpha = F \Sigma PP' = FA'D'$.

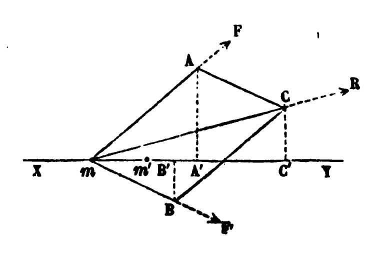


165. En particulier, *le travail de la pesanteur est égal au poids du mobile, par la hauteur verticale dont il est descendu ou monté.*

166. Dans le cas général, l'évaluation du travail total dépend d'une *quadrature* (*D. D.*, 342). En effet, si l'on porte, sur un axe, les petites cordes ε, ε', ε'',..., les unes à la suite des autres; que, par les points ainsi déterminés, on élève des ordonnées égales, respectivement, à $F\cos\alpha$, $F'\cos\alpha'$, $F''\cos\alpha''$,...; et que l'on fasse passer une courbe par les extrémités de ces droites: l'aire de cette courbe représentera le travail cherché. Les *formules approximatives de quadratures* (*) peuvent aussi être employées avec avantage.

Travail de la résultante de plusieurs forces.

167. Théorème. — *Le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces appliquées à un point matériel, est égal à la somme des travaux des composantes.*



Pour composer des forces F, F′, F″,..., en nombre quelconque, appliquées à un point matériel, on peut chercher la résultante r de F et de F′, puis la résultante r' de r et de F″; et ainsi de suite. D'après cela, il suffit de démontrer la proposition dans le

(*) *Voyez* l'*Appendice* à la fin.

cas de deux forces F, F′, représentées par les côtés mA, mB du parallélogramme $mACB$.

Soit XY la droite que décrit, au moins pendant un temps très-court, le point d'application m : cette droite n'est pas nécessairement dans le plan du parallélogramme. Si nous abaissons sur XY les perpendiculaires AA′, BB′, CC′, nous aurons, pour les travaux élémentaires de F, de F′, et de la résultante R :

$$mm'.mC', \quad mm'.mA', \quad mm'.mB'.$$

Il s'agit donc de vérifier l'égalité

$$mm'.mC' = mm'.mA' + mm'.mB',$$

ou seulement celle-ci :

$$mC' = mA' + mB'.$$

Or *la projection* mC' *de la résultante est égale à la somme des projections* mA', mB' *des composantes;* donc le théorème est démontré.

168. Le travail total d'une force pouvant être regardé comme la somme de ses travaux élémentaires, le théorème précédent s'étend évidemment au travail total de plusieurs forces, appliquées à un point matériel. Ainsi : *le travail total de la résultante est égal à la somme des travaux des composantes.*

Unités de travail. — Effort moyen.

169. *Kilogrammètre.* — La relation entre la force F, l'espace e et le travail T est, dans le cas le plus simple,

$$T = Fe.$$

Si l'on prend $F = 1$, $e = 1$, on aura $T = 1$. Or, l'unité de force est le kilogramme, l'unité d'espace est le mètre; par conséquent, *le travail pris pour unité est celui qui est nécessaire pour élever 1 kilogramme à 1 mètre de hauteur.* Cette unité est appelée *kilogrammètre*. On la représente par 1^{km}. Quand une force de 60 kilogrammes fait parcourir $3^{m},5$ à son point d'application, le travail de cette force est égal à (60.3,5) kilogrammètres $= 210^{km}$.

170. *Cheval-vapeur.* — Le travail d'une force, tel qu'il vient d'être défini, est indépendant du temps pendant lequel agit la force. Dans les applications, il n'est plus permis de faire abstrac-

tion de cet élément ; au contraire, plus le temps pendant lequel le travail aura été produit sera court, plus le moteur employé devra être *payé*. On prend ordinairement, pour unité de *puissance dynamique*, un travail de 75^{km} effectué en 1 seconde. Cette unité, pour une raison qu'il n'est pas nécessaire d'indiquer ici, est ce qu'on appelle *cheval-vapeur*.

Si une machine a élevé 2400 kilogrammes à une hauteur de 30 mètres en 48 secondes, elle a produit, pendant ce temps, un travail de (2400.30) kilogrammètres. Son travail serait donc, en une seconde, $\frac{2400.30}{48}$ kilogrammètres $= 1\,500^{km}$. Conséquemment, cette machine équivaut à $\frac{1\,500}{75} = 20$ *chevaux-vapeur*. C'est ce qu'on exprime ordinairement en disant que la machine a une *force* de 20 chevaux (*).

En général, si un moteur est capable d'élever, en n secondes, un poids de P kilogrammes à une hauteur de h mètres, la *force*, ou plutôt la *puissance dynamique* de ce moteur, évaluée en chevaux-vapeur, sera

$$D = \frac{Ph}{75n} = \frac{T}{75n}.$$

171. *Remarque*. — Un *cheval-vapeur* équivaut à peu près à 5,5 chevaux effectifs; c'est-à-dire qu'*il faudrait environ* 55 *chevaux pour élever, en* 1 *seconde, un poids de* 750 *kilogrammes à* 1 *mètre de hauteur*.

172. *Effort moyen*. — Il arrive souvent que la force variable F reste comprise entre des limites peu éloignées. Dans ce cas, on y substitue, pour plus de commodité, une force fictive constante φ, capable de produire le même travail. Cette force φ, dont la direction est supposée tangente à la trajectoire du point matériel, est appelée *effort moyen*. Il est aisé de justifier cette dénomination. En effet, si l'on suppose aussi que la force F agisse tangentiellement à la trajectoire, on aura

$$\mathfrak{T}F = \lim \Sigma F\varepsilon, \quad \mathfrak{T}\varphi = \varphi \lim \Sigma \varepsilon;$$

(*) Le mot *force* n'a plus ici sa signification habituelle ; pour éviter toute ambiguïté, on devrait dire : *une machine de la puissance dynamique de* 20 *chevaux-vapeur*.

et, puisque les travaux sont égaux,

$$\varphi = \frac{\lim \Sigma F \varepsilon}{\lim \Sigma \varepsilon};$$

donc la force φ est une *moyenne* entre les forces F (20).

173. *Remarque.* — L'effort moyen φ est représenté, graphiquement, par la hauteur du rectangle équivalent à l'aire qui mesure le travail total (166), et qui a pour base la base de cette aire.

Relation entre le travail et la force vive.

174. Les géomètres du siècle dernier ont donné le nom de *force vive* d'un mobile au produit mv^2 de sa masse par le carré de sa vitesse. Il existe, entre le travail développé par la force F qui agit sur le mobile, et la force vive dont ce mobile est animé à l'instant considéré, une relation remarquable, que l'on peut énoncer ainsi :

Lorsqu'une force agit sur un point matériel, la demi-variation de force vive du mobile, entre deux positions quelconques, est égale au travail de la force entre ces deux positions.

175. Pour démontrer ce théorème, supposons d'abord que le point matériel soit sollicité seulement par son poids p, et qu'il tombe librement suivant la verticale.

En désignant par v_0, v les vitesses dont il est animé après avoir parcouru les espaces h_0, h, nous aurons (33)

$$v^2 - v_0^2 = 2g(h - h_0),$$

ou

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = mg(h - h_0).$$

Mais mg est le poids du mobile (112); $h - h_0$ est l'espace compris entre les deux positions considérées; et le travail de la pesanteur, entre les époques correspondantes, a pour valeur $p(h - h_0)$ (155); etc.

176. Plus généralement, considérons un point matériel sollicité par une force constante F, dirigée suivant la trajectoire rectiligne. Soient v_0, v les vitesses du mobile, au bout des temps t_0, t; e l'espace décrit pendant le temps $t - t_0$; w l'accélération du mouve-

ment. Nous aurons, en appelant a la vitesse initiale,

$$v = a + wt, \quad v_0 = a + wt_0,$$

$$e = a(t - t_0) + \frac{1}{2}w(t^2 - t_0^2) = (t - t_0)\frac{v + v_0}{2};$$

donc

$$v - v_0 = w(t - t_0),$$

$$\frac{1}{2}(v + v_0) = \frac{e}{t - t_0};$$

puis

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = mwe = \mathrm{F}e,$$

ou

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \mathfrak{G}.\mathrm{F}.$$

177. Soit enfin un point matériel décrivant une trajectoire quelconque AB, sous l'influence d'une force variable F. Remplaçons la courbe AB par une trajectoire polygonale, dont $\mathrm{MN} = c$ représente un élément quelconque. Nommons F_0, F_1, $\mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ les valeurs de F qui répondent aux sommets consécutifs de ce polygone. Soient v_0, $v_1, \ldots, v_n$ les valeurs correspondantes de la vitesse v, etc. Si les forces

$$\mathrm{F}_0, \quad \mathrm{F}_1, \ldots, \quad \mathrm{F}_n$$

restaient constantes, en grandeur et en direction, pendant que la masse m décrit les cordes

$$c_0, \quad c_1, \ldots, \quad c_n,$$

nous aurions, par le numéro précédent,

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) = \mathrm{F}_0 c_0 \cos(\alpha_0 + h_0),$$

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \mathrm{F}_1 c_1 \cos(\alpha_1 + h_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}m(v_n^2 - v_{n-1}^2) = \mathrm{F}_n c_n \cos(\alpha_n + h_n);$$

d'où $$\frac{1}{2}m(v_n^2 - v_0^2) = \Sigma Fc\cos(\alpha + h).$$

A mesure que le nombre n augmente, le second membre tend vers (161)

$$\lim \Sigma Fc\cos(\alpha + h) = \mathfrak{T}.F;$$

donc, en remplaçant v_n par v:

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \mathfrak{T}.F = T.$$

178. Corollaire. — *Le travail* T *de la force* F *étant considéré comme une fonction du temps, la dérivée de cette fonction est égale au produit de la masse par la vitesse et par la dérivée de la vitesse.* En effet, l'équation précédente donne

$$\frac{1}{2}m.2vv' = T'.$$

Principe des forces vives.

179. Nous allons reprendre, sous un point de vue un peu différent, les théories précédentes, de manière à en conclure le *principe de la conservation des forces vives,* principe fondamental en Mécanique.

Soit, au bout du temps t, F la force qui sollicite le point matériel, dont la masse est m. Soient X, Y, Z les composantes de cette force, parallèles à trois axes rectangulaires.

D'après le principe de l'*indépendance des effets produits par plusieurs forces* (103), le mouvement de la projection du point m, sur chacun des axes, est uniquement dû à la composante parallèle à cet axe. Donc, en désignant par x, y, z les coordonnées du point, nous aurons (114)

$$mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z. \quad (1)$$

Ajoutons ces trois équations (*) après les avoir multipliées res-

(*) Les relations (1) sont les *équations du mouvement d'un point matériel.* Dans chaque cas particulier, il s'agit d'en conclure les valeurs de x, y, z, x', y', z' *en fonction du temps* t *et de six constantes arbitraires:* c'est là un problème de Calcul intégral.

pectivement par x', y', z'; nous aurons encore

$$m(x'x''+y'y''+z'z'') = Xx'+Yy'+Zz';$$

ou, en nous rappelant que $x'x''+y'y''+z'z'' = s's'' = vv'$,

$$mvv' = Xx'+Yy'+Zz'. \quad (2)$$

Cela posé, *si le second membre* de cette dernière équation *est la dérivée d'une fonction* φ *de* x, y, z, on aura, en remontant des dérivées aux fonctions primitives,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \varphi(x, y, z) + \text{const.},$$

c'est-à-dire, en désignant par v_0, x_0, y_0, z_0 des valeurs correspondantes de v, x, y, z,

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0). \quad (3)$$

Ainsi, en admettant l'hypothèse établie tout à l'heure : 1° *quand le mobile passe d'une position à une autre, l'accroissement de sa force vive dépend uniquement de ces deux positions extrêmes, et non de la route qu'il a suivie*; 2° *toutes les fois que le mobile repasse par la même position, il reprend la même vitesse* (*).

Cette dernière propriété constitue le *principe de la conservation des forces vives*.

180. *Remarques*. — I. En comparant les valeurs de mvv', trouvées dans les deux numéros précédents, on obtient

$$T' = Xx'+Yy'+Zz'. \quad (4)$$

Pour vérifier directement cette relation, il suffit de mettre le second membre sous la forme

$$Fs'\left(\frac{X}{F}\cdot\frac{x'}{s'}+\frac{Y}{F}\cdot\frac{y'}{s'}+\frac{Z}{F}\cdot\frac{z'}{s'}\right).$$

La quantité entre parenthèses est égale au cosinus de l'angle α formé par la direction de F et par la tangente à la trajectoire. De

(*) Pourvu, bien entendu, que $\varphi(x, y, z)$ ne puisse pas prendre deux valeurs différentes pour un même système de valeurs des coordonnées x, y, z. (J. Bertrand, *Journal de l'École Polytechnique*, 28e cahier.)

plus,

$$F = mw, \quad w \cos\alpha = v' (*), \quad s' = v.$$

Donc

$$T' = mvv';$$

comme ci-dessus.

II. De même, en égalant les deux valeurs trouvées pour l'accroissement de la force vive, on obtient

$$\mathfrak{T}.F = 2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0). \quad (5)$$

Surfaces de niveau.

181. Puisque, d'après l'équation (3), la vitesse *actuelle* du point matériel m dépend seulement de sa vitesse initiale, de sa position initiale et de sa position actuelle, il en résulte que *différents mobiles, ayant la même masse m, partis du point* (x_0, y_0, z_0) *avec la vitesse* v_0, *seront animés de vitesses égales quand ils occuperont des positions pour lesquelles la fonction* $\varphi(x, y, z)$ *aura une même valeur* λ. Autrement dit, *ces mobiles auront des vitesses égales, lorsqu'ils rencontreront la surface* S *représentée par*

$$\varphi(x, y, z) = \lambda, \quad (6)$$

λ étant un paramètre arbitraire (**).

La même propriété subsiste, si les points matériels considérés, au lieu d'avoir une même position initiale, sont partis, avec la vitesse v_0, de différents lieux situés sur la surface particulière S_0 qui répond à une valeur λ_0 du paramètre λ. On a donc ce théorème général :

Si différents mobiles, ayant des masses égales, sont soumis à une même force, et qu'ils partent, avec la même vitesse, de différents points situés sur la surface S_0, *ils seront animés de vitesses égales quand ils atteindront la surface* S.

182. Les surfaces S, représentées par l'équation (1), jouissent d'une autre propriété remarquable, que l'on peut énoncer ainsi :

La force F, *appliquée au point matériel m, est normale à la surface* S *passant en ce point.*

(*) On ne doit pas oublier que la composante tangentielle de l'*accélération totale* w, c'est-à-dire l'*accélération tangentielle*, est égale à v'.

(**) En général, le temps t au bout duquel auront lieu la rencontre, ne sera pas le même pour tous les points.

Pour la démontrer, rappelons-nous que, par hypothèse,

$$Xx' + Yy' + Zz'$$

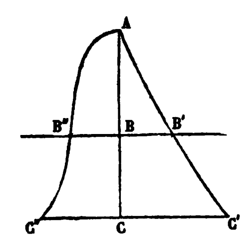
est la dérivée de $\varphi(x, y, z)$, obtenue en regardant x, y, z comme des fonctions quelconques de t : ainsi

$$X = \varphi'_x, \quad Y = \varphi'_y, \quad Z = \varphi'_z.$$

D'un autre côté, la normale à la surface S fait, avec les trois axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à φ'_x, φ'_y, φ'_z (*T. D.*, 205) ou à X, Y, Z : cette normale coïncide donc, en direction, avec la force F.

183. *Remarques.* — I. Si le point matériel m, sollicité par la force F, était *posé, sans vitesse initiale*, sur la surface S, il resterait en repos, pourvu que la surface eût une résistance suffisante : pour cette raison, on a donné, aux surfaces dont il s'agit, le nom de *surfaces de niveau* (*).

II. *Dans le cas de la pesanteur, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.*



En effet, à cause de

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg,$$

la fonction φ se réduit à mgz. Donc *différents mobiles pesants, partis d'un même point* A, *et assujettis à se mouvoir sur diverses lignes* ABC, AB′C′, AB″C″,..., *auront des vitesses égales, quand ils atteindront un même plan horizontal* BB′B″ (**).

Réaction des surfaces ou des lignes.

184. Jusqu'à présent, nous avons supposé que le point matériel considéré était *entièrement libre dans l'espace*; mais il peut arri-

---

(*) Par analogie avec ce qui a lieu pour la pesanteur : *la direction de cette force est normale à la surface des eaux tranquilles.*

(**) On verra, tout à l'heure, que *la résistance de la courbe ou de la surface* sur laquelle se meut le point matériel, *n'altère pas la vitesse due à la force extérieure qui le sollicite.*

ver qu'un point soit *assujetti à se mouvoir sur une ligne ou sur une surface donnée.* Si l'on fait abstraction du *frottement,* dont nous parlerons plus tard, on peut aisément ramener le second cas au premier. Effectivement, *une surface polie ne peut détruire que les forces qui lui sont normales* (*); donc elle agit, sur le point matériel, comme le ferait une force *normale* N, qui tendrait à éloigner le point de la surface. En joignant cette force *inconnue* aux forces données, on retombera, comme nous venons de le dire, sur la recherche du mouvement d'un point entièrement libre.

De même, si le point est astreint à parcourir une ligne donnée, on joindra, aux forces qui le sollicitent, une force normale N, *de direction et de grandeur inconnues,* représentant la réaction de la courbe.

185. Théorème. — *Le travail des forces appliquées à un point qui se meut sur une surface donnée ou sur une ligne donnée, n'est pas altéré par la réaction de cette surface ou de cette ligne.*

En effet, cette réaction étant normale à la trajectoire, ne produit aucun travail.

186. D'après l'équation (5), appliquée à la résultante R de la force donnée F et de la réaction N, on a

$$2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0) = \mathfrak{T}R = \mathfrak{T}F + \mathfrak{T}N;$$

ou, par le théorème précédent,

$$2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0) = \mathfrak{T}.F;$$

ou enfin $m(v^2 - v_2^0) = 2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0).$

Ainsi le principe des forces vives subsiste, sans modification, dans le cas d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface. En particulier : *Si un point matériel, en mouvement sur une surface ou sur une courbe donnée, n'est sollicité par aucune force extérieure, sa vitesse est constante* (**).

(*) Nous reviendrons plus loin sur ce principe, que l'expérience démontre suffisamment.

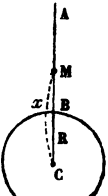
(**) On fait toujours abstraction du frottement.

CHAPITRE XII.

APPLICATIONS.

187. Problème I. — *Déterminer le mouvement vertical d'un point matériel* M, *de masse m, attiré par le centre* C *de la terre, en raison inverse du carré de la distance* CM.

Si le point matériel était placé en B, à la surface de la terre, il serait sollicité par son poids mg. Quand il est en M, la force F à laquelle il est soumis a donc pour expression $mg\left(\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CM}}\right)^2$, ou $mg\frac{\mathrm{R}^2}{x^2}\cdot$ D'un autre côté,



$$\mathrm{F} = -mx'',$$

puisque le mouvement a lieu de A vers B, A étant la position initiale du mobile. Par conséquent,

$$x'' = -g\frac{\mathrm{R}^2}{x^2}\cdot \quad (1)$$

188. Pour tirer, de cette équation, *la relation entre la vitesse* v *et la distance*, on multiplie les deux membres par $x' = v$, après quoi l'on prend les fonctions primitives (*). On obtient ainsi

$$v^2 = 2g\frac{\mathrm{R}^2}{x} + \text{const.}$$

Soit h la hauteur du point de départ A au-dessus de la surface de la terre : le mobile ayant été abandonné à lui-même, on a

$$0 = 2g\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}+h} + \text{const};$$

et, par suite, $$v^2 = 2g\mathrm{R}^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{R}+h}\right)\cdot \quad (2)$$

189. D'après cette formule, la vitesse que possède le mobile, au

(*) Ce calcul est celui qui donne le principe des forces vives (179).

moment où il vient frapper le sol, est

$$V = \sqrt{2gh\frac{R}{R+h}}. \quad (3)$$

En général, la hauteur h est fort petite, relativement au rayon R; donc, à très-peu près,

$$V = \sqrt{2gh},$$

ainsi qu'on devait s'y attendre (*).

190. L'espace $AM = z = R + h - x$; de plus, $v = z'$; donc, à cause de l'équation (2):

$$z' = R\sqrt{\frac{2g}{R+h}}\sqrt{\frac{z}{R+h-z}},$$

ou

$$z'\sqrt{\frac{R+h-z}{z}} = R\sqrt{\frac{2g}{R+h}}.$$

Le second membre est évidemment la dérivée de $Rt\sqrt{\frac{2g}{R+h}}$. Le premier membre est la dérivée d'une certaine fonction de z. Pour la déterminer, posons

$$z = (R+h)\sin^2\varphi \ (^{**}) \quad (4);$$

nous aurons

$$z'\sqrt{\frac{R+h-z}{z}} = 2(R+h)\cos^2\varphi.\varphi' = (R+h)(1+\cos 2\varphi)\varphi';$$

puis

$$(R+h)\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) = Rt\sqrt{\frac{2g}{R+h}} \ (^{***}),$$

ou

$$t = \frac{R+h}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right). \quad (5)$$

(*) La valeur exacte de V est comprise entre

$$\sqrt{2gh} \quad \text{et} \quad \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{h}{2R}\right).$$

(**) Ce procédé est celui qu'on emploierait pour rendre le radical calculable par logarithmes.

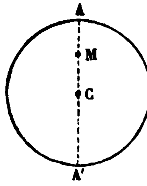
(***) On n'ajoute pas de constante, parce que $t = 0$ répond à $z = 0$.

191. Si, aux équations (4) et (5), on joint la valeur de v, que l'on peut écrire ainsi :

$$v = R\sqrt{\frac{2g}{R+h}}\tang\varphi, \quad (6)$$

on aura la solution complète du problème.

192. Problème II. — *Quel serait le mouvement d'un point matériel* M, *dans un puits* ACA' *qui passerait par le centre* C *de la terre, l'attraction étant supposée proportionnelle à la distance* CM (*)?



En opérant comme dans le premier problème, on trouve, successivement,

$$-x'' = g\frac{x}{R}, \quad (1)$$

$$v^2 = \frac{g}{R}(R^2 - x^2), \quad (2)$$

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}}\arc\cos\frac{x}{R}. \quad (3)$$

193. *Remarques.* — I. La vitesse v s'annule pour $x = \pm R$. Par conséquent, le mobile, parti du point A, irait jusqu'au point A', diamétralement opposé, après quoi il reviendrait au point de départ, et ainsi de suite indéfiniment, en exécutant des oscillations *isochrones*.

II. Le temps d'une oscillation serait $T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 42^m 11^s$.

III. Le mobile, au moment où il passerait par le centre de la terre, serait animé d'une vitesse de $7902^m,3$ par seconde.

194. Problème III. — *Déterminer le mouvement ascendant d'un point matériel pesant* M, *lancé dans une direction verticale, en ayant égard à la résistance de l'air, supposée proportionnelle au carré de la vitesse du mobile.*

A chaque instant, le mobile est soumis à l'action *retardatrice* de son poids mg (**) et de la résistance de l'air, résistance que l'on

(*) Cette loi est celle que l'on trouve quand on cherche l'attraction exercée par une sphère solide sur un point intérieur.

(**) On admet que la hauteur AM est très-petite, relativement au rayon de la terre.

peut représenter par $mg\frac{v^2}{b^2}$, b étant une certaine longueur. Par conséquent, l'équation du mouvement est

$$-x'' = g\left(1+\frac{v^2}{b^2}\right),$$

ou

$$-b^2\frac{v'}{b^2+v^2} = g. \quad (1)$$

Elle donne

$$\frac{gt}{b} = \text{arc tang}\frac{a}{b} - \text{arc tang}\frac{v}{b}, \quad (2)$$

a étant la vitesse initiale.

195. De l'équation (2), on conclut aisément

$$v = b\,\frac{a\cos\frac{gt}{b} - b\sin\frac{gt}{b}}{b\cos\frac{gt}{b} + a\sin\frac{gt}{b}};$$

ou, en posant

$$\frac{a}{b} = \text{tang}\,\alpha, \quad (3)$$

$$v = b\,\text{tang}\left(\alpha - \frac{gt}{b}\right). \quad (4)$$

196. Si l'on met cette dernière équation sous la forme

$$x' = b\,\frac{\sin\left(\alpha - \frac{gt}{b}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{gt}{b}\right)},$$

on obtient, en prenant les fonctions primitives des deux membres,

$$x = \frac{b^2}{g}\,l\,\frac{\cos\left(\alpha - \frac{gt}{b}\right)}{\cos\alpha}. \quad (5)$$

197. La hauteur h à laquelle parvient le mobile, et le temps t_1 qu'il emploie pour atteindre le point culminant B, sont donnés par les formules

$$t_1 = \frac{b\alpha}{g}, \quad (6) \qquad h = -\frac{b^2}{g}\,l.\cos\alpha. \quad (7)$$

198. Problème IV. — *Les données étant les mêmes que dans le problème précédent, déterminer le mouvement descendant du point matériel* M.

Après que le mobile est arrivé au point B, il redescend en vertu de l'excès de son poids sur la résistance de l'air. Par conséquent, l'équation (1) du n° 194 doit être remplacée par

$$b^2 \frac{v'}{b^2 - v^2} = g. \quad (8)$$

Si l'on décompose $\frac{1}{b^2 - v^2}$ en $\frac{1}{2b}\left(\frac{1}{b-v} - \frac{1}{b+v}\right)$, on trouve aisément

$$2\frac{gt}{b} = l\frac{b+v}{b-v}, \quad (9)$$

d'où, en posant

$$\frac{g}{b} = k, \quad (10)$$

$$v = b\frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1}. \quad (11)$$

199. Pour trouver la fonction primitive du second membre, il suffit de le mettre sous la forme $b\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^{kt} + e^{-kt}}$; on obtient ainsi

$$z = \frac{b}{k} l \frac{(e^{kt} + e^{-kt})}{2}, \quad (12)$$

z étant l'espace parcouru par le mobile.

200. A cause des formules (3) et (7), le temps t_2 de la chute est donné par l'équation

$$e^{kt_2} + e^{-kt_2} = \frac{2}{\cos\alpha}.$$

Posons, pour abréger, $e^{kt_2} = u$; nous la transformerons en

$$u^2 - \frac{2u}{\cos\alpha} + 1 = 0;$$

d'où

$$u = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \ (*),$$

(*) La seconde valeur de u, inverse de celle-ci, conduirait à une valeur négative de t_2, qui ne saurait convenir à la question.

et $$t_2 = \frac{b}{g} l.\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (13)$$

201. En ajoutant t_1 avec t_2, on aura le temps T qui s'est écoulé entre le départ et le retour du mobile; savoir :

$$T = \frac{b}{g}\left[\alpha + l.\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right]. \quad (14)$$

202. La vitesse v_2 que possède le mobile quand il vient frapper le sol, est donnée par la formule

$$v_2 = b\frac{e^{kt_2} - e^{-kt_2}}{e^{kt_2} + e^{-kt_2}}.$$

Or, $e^{kt_2} = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$; donc, après quelques réductions,

$$v_2 = b \sin\alpha. \quad (15)$$

D'ailleurs, la vitesse initiale, dans le mouvement ascendant, était

$$a = b \,\text{tang}\,\alpha;$$

donc $v_2 < a$. Ainsi, *la vitesse au retour est moindre que la vitesse au départ*. Par conséquent, *le mobile emploie moins de temps à s'élever qu'à redescendre*. C'est ce qu'on peut vérifier directement, au moyen des valeurs de t_1 et de t_2.

203. PROBLÈME V. — *Déterminer le mouvement rectiligne d'un point matériel m, repoussé par un centre fixe* O, *en raison inverse du carré de la distance.*

1°. Supposons que le mobile soit parti, sans vitesse initiale, d'un point A situé à la distance d du centre O. Soit b l'accélération en A. Quand le mobile sera parvenu à la distance x du centre, l'accélération aura pour valeur $b\frac{d^2}{x^2}$. Donc

$$x'' = b\frac{d^2}{x^2}. \quad (1)$$

On tire de là, comme dans le Problème I,

$$v = \sqrt{2bd \cdot \frac{x-d}{x}}, \quad (2)$$

ou $$x'\sqrt{\frac{x}{x-d}} = \sqrt{2bd}. \quad (3)$$

2°. Pour obtenir la *relation entre l'espace et le temps*, on peut remarquer que l'équation (2) donne

$$x = \frac{2bd^2}{2bd - v^2}, \quad (4)$$

puis

$$x' = 4bd^2 \frac{vv'}{(2bd - v^2)^2},$$

en sorte que l'équation (3) équivaut à

$$4b^2 d \frac{v'}{(2bd - v^2)^2} = 1 \,(*). \quad (5)$$

La décomposition en fractions rationnelles (*Alg.*, **408**) donne ensuite

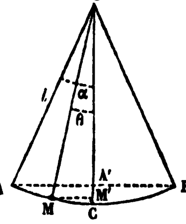
$$\frac{b}{2\sqrt{2bd}}\, l\, \frac{\sqrt{2bd} + v}{\sqrt{2bd} - v} + \frac{bv}{2bd - v^2} = t. \quad (6)$$

Cette équation permet de calculer *le temps en fonctions de la vitesse.*

3°. Remplaçant v par sa valeur (2), on trouve enfin

$$\sqrt{\frac{b}{2d}} \left[l\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - d}}{\sqrt{d}} + \frac{\sqrt{x(x-d)}}{d} \right] = t \,(**). \quad (7)$$

204. Problème VI. — *Un pendule simple* OM, *de longueur* l, *part de la position* OA, *sans vitesse initiale. Quelles sont les circonstances de son mouvement?*



Le pendule ne sortira pas du plan vertical AOC mené par la position initiale OA. Le point matériel M se meut donc sur la circonférence ACB ayant pour centre le point de suspension O. Comme il est uniquement sollicité par son poids, sa vitesse, au bout du temps t, sera donnée par

(*) On est naturellement conduit à cette transformation, en essayant de rendre rationnel le premier membre de l'équation (3).

(**) Pour abréger, nous supprimons la discussion de ces diverses formules.

l'équation des forces vives (179):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

h représentant la *différence de niveau* entre les positions A, M.

205. Représentons par α, θ les angles AOC, MOC; nous aurons

$$h = \mathrm{A'M'} = l(\cos\theta - \cos\alpha);$$

puis

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}. \quad (1)$$

D'après cette formule, la vitesse v augmente lorsque θ diminue : nulle pour $\theta = \alpha$, elle atteint son maximum lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire quand le pendule coïncide avec la verticale OC. A partir de cette époque, la vitesse diminue jusqu'à ce que le pendule atteigne la position OB, symétrique de OA; après quoi les mêmes phénomènes se reproduisent indéfiniment. Le pendule effectue donc une série d'oscillations ayant toutes, pour *amplitude*, l'angle AOB $= 2\alpha$. Ces oscillations sont *isochrones*, parce que *le mouvement de* B *vers* A *est le même*, au sens près, *que le mouvement de* A *vers* B (*).

206. L'arc AM $= s$ a pour expression $l(\alpha - \theta)$; donc

$$v = s' = -l\theta'.$$

La substitution de cette valeur dans l'équation (1) donne

$$-\frac{\theta'}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \sqrt{2\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Le second membre est la dérivée de $t\sqrt{2\frac{g}{l}}$. Le premier membre est la dérivée d'une certaine fonction de θ. En la désignant par $\mathrm{F}(\theta)$ (**), on a donc, pour la relation, entre l'angle θ et le temps t,

$$\mathrm{F}(\theta) - \mathrm{F}(\alpha) = t\sqrt{2\frac{g}{l}}. \quad (3)$$

(*) Si, comme on le suppose ici, il n'y avait ni résistance de l'air, ni frottement au point de suspension, etc., on réaliserait, au moyen du pendule, le *mouvement perpétuel*.

(**) La détermination de $\mathrm{F}(\theta)$ dépend de la *théorie des fonctions elliptiques*.

207. Si l'angle α est très-petit, on peut supposer

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

et, à plus forte raison, $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

L'équation (2) deviendra donc

$$-\frac{\theta'}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4)$$

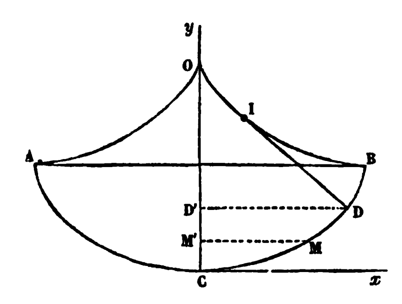
Le premier membre est la dérivée de $\arc\cos\frac{\theta}{\alpha}$; en sorte que la relation (3) se réduit à cette formule très-simple :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \arc\cos\frac{\theta}{\alpha}. \quad (5)$$

208. Pour en conclure *le temps* T *d'une oscillation complète*, il suffit de supposer $\theta = \pi$; et l'on obtient la *formule de Galilée :*

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6)$$

209. Problème VII. — *Déterminer le mouvement d'un point matériel* M, *sur une cycloïde* ACB.



En rapportant la courbe à son *axe* CO et à sa tangente Cx, on trouve aisément (*D. D.*, 69) :

$$x = R \arc\cos\frac{R-y}{R} + \sqrt{2Ry - y^2}, \quad (1)$$

d'où (*)

$$x' = y'\sqrt{\frac{2R - y}{y}}, \quad (2) \qquad s' = v = -y'\sqrt{\frac{2R}{y}}; \quad (3)\ (^{**})$$

Mais (**204**)

$$v = \sqrt{2g.M'D'} = \sqrt{2g(y_0 - y)},$$

y_0 représentant l'ordonnée de la position initiale; donc

$$-\frac{y'}{\sqrt{(y_0 - y)y}} = \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (4)$$

En mettant le premier membre sous la forme

$$\frac{-y'}{\sqrt{\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2}},$$

on obtient aisément

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\frac{2y - y_0}{y_0}. \quad (5)$$

210. Cette formule générale donne, pour $y = 0$,

$$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Ainsi, *le mobile* M *emploie, pour parvenir au point le plus bas de la cycloïde, un temps indépendant de sa position initiale.* On exprime cette propriété remarquable, en disant que la cycloïde est une courbe *tautochrone* (***).

211. *Remarques.* — I. La durée d'une oscillation quelconque

(*) On pourrait prendre pour point de départ la formule (2), qui exprime une propriété de la tangente.

(**) On prend le signe — devant le radical, parce que l'ordonnée y diminue quand le temps augmente.

(***) On démontre, dans les Traités de Mécanique rationnelle, que *la cycloïde est la seule courbe tautochrone plane.* De plus, cette courbe est *brachystochrone*, c'est-à-dire que le mobile emploie moins de temps à parcourir l'arc DC de cycloïde qu'à suivre toute autre courbe terminée aux points D, C.

sur la cycloïde est égale à la duré d'une oscillation très-petite sur le cercle osculateur au sommet C.

II. On peut démontrer que la *développée* d'une cycloïde ACB se compose des deux demi-cycloïdes AO, BO. Il résulte, de cette propriété, qu'un pendule simple OID, dont la longueur OC serait égale à 4R, et qui s'enroulerait sur les courbes AO, BO, aurait des oscillations isochrones, indépendantes de leur amplitude. Cet appareil, que l'on voit dans quelques cabinets de physique, porte le nom de *pendule cycloïdal*.

212. Problème VIII. — *Déterminer le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, par une force proportionnelle à la distance* (*).

En prenant pour origine le centre fixe, et en supposant l'accélération totale représentée par la distance des deux points, on a, pour les équations du mouvement (179):

$$x'' = -x, \quad (1)$$
$$y'' = -y, \quad (2)$$
$$z'' = -z. \quad (3)$$

213. Si l'on multiplie par x' les deux membres de l'équation (1), et qu'on prenne les fonctions primitives, on trouve

$$x'^2 = k^2\cos^2\alpha + a^2 - x^2, \quad (4)$$

k étant la *vitesse initiale*, α l'angle qu'elle forme avec l'axe des x, et a la valeur initiale de x.

Les équations (2) et (3) donnent, semblablement,

$$y'^2 = k^2\cos^2\beta + b^2 - y^2, \quad (5)$$
$$z'^2 = k^2\cos^2\gamma + c^2 - z^2. \quad (6)$$

Par suite, la vitesse v, dont les composantes sont x', y', z', est donnée par l'équation

$$v^2 = k^2 + l^2 - r^2, \quad (7)\ (^{**})$$

(*) La solution de ce problème est tellement simple, que nous ne l'aurions pas donnée si elle n'offrait une vérification de quelques propriétés générales du mouvement d'un point matériel.

(**) Le principe des forces vives aurait donné, immédiatement, cette équation (7).

dans laquelle r représente la distance du mobile au centre d'attraction, et l la valeur initiale de cette distance. En d'autres termes,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad l^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

214. L'équation (4) équivaut à

$$\pm \frac{x'}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2 - x^2}} = 1.$$

Pour fixer les idées, prenons le radical avec le signe $+$; nous obtiendrons, en remontant aux fonctions primitives,

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2}} = t + \text{const.}$$

D'après l'une des hypothèses précédentes, $t = 0$ doit donner $x = a$; donc

$$t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2}} - \arcsin \frac{a}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2}}. \quad (8)$$

215. Pour abréger, posons

$$\arcsin \frac{a}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2}} = \lambda,$$

ou

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{a}{k \cos \alpha}; \quad (9)$$

nous aurons, au lieu de l'équation (8),

$$x = a \frac{\sin (t + \lambda)}{\sin \lambda}; \quad (10)$$

puis, par un changement de lettres,

$$y = b \frac{\sin (t + \mu)}{\sin \mu}, \quad (11)$$

$$z = c \frac{\sin (t + \nu)}{\sin \nu}. \quad (12)$$

Les équations (4), (5), (6), (7), (10), (11), (12), résolvent complétement le problème (*). On peut d'ailleurs, pour plus de sim-

(*) Le lecteur remarquera que parmi les *onze* constantes contenues dans ces équations, *six* seulement *sont arbitraires*.

plicité, remplacer les trois premières par les formules

$$\left.\begin{aligned} x' &= \sqrt{k^2\cos^2\alpha + a^2}\cos(t+\lambda), \\ y' &= \sqrt{k^2\cos^2\beta + b^2}\cos(t+\mu), \\ z' &= \sqrt{k^2\cos^2\gamma + c^2}\cos(t+\nu). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

216. *Surfaces de niveau.* — D'après la formule (7), la vitesse du mobile, à un instant quelconque, dépend uniquement de la vitesse initiale k, de la distance r au pôle attractif, et de la valeur initiale de cette distance. Par conséquent, si l'on imagine deux sphères, de rayons l, r, ayant pour centre commun le pôle, tous les mobiles partis de la première surface, avec une même vitesse, seront animés de vitesses égales, quand ils rencontreront la seconde sphère : celle-ci est donc une *surface de niveau* (181).

217. *Nature de la trajectoire.* — On peut reconnaître, soit par un raisonnement très-simple, soit par le calcul suivant, que *la trajectoire est située dans un plan passant par le pôle.*

Retranchons membre à membre les équations (1), (2), après avoir multiplié la première par y et la seconde par x ; nous aurons,

$$yx'' - xy'' = 0.$$

Le binôme $yx'' - xy''$ est la dérivée de $yx' - xy'$; donc

$$yx' - xy' = h, \quad (14)$$

h étant une *constante* qui dépend de α, β, γ,....

Par une permutation tournante, nous déduirons, de l'équation (14),

$$zy' - yz' = f, \quad (15)$$
$$xz' - zx' = g. \quad (16)$$

Enfin, en éliminant x', y', z' entre ces trois dernières relations, nous trouvons

$$fx + gy + hz = 0, \quad (17)$$

équation d'un plan passant par l'origine (*).

(*) On reconnaît facilement, en mettant l'équation (14) sous la forme

$$(x^2+y^2)\left(\text{arc tang}\,\frac{x}{y}\right)' = h,$$

que *la projection du rayon vecteur décrit des aires proportionnelles aux*

218. Puisque la trajectoire est plane, nous pouvons la rapporter à deux axes rectangulaires situés dans son plan. De plus, nous pouvons faire passer l'axe des abscisses par la position initiale du mobile. Nous obtenons ainsi, au lieu des équations (10) et suivantes :

$$x = \frac{\sin(t+\lambda)}{\sin\lambda}, \quad (18) \qquad y = k\sin\alpha\sin t, \quad (19)$$

$$x' = \frac{\cos(t+\lambda)}{\sin\lambda}, \quad (20) \qquad y' = k\sin\alpha\cos t; \quad (21)$$

puis, en éliminant t entre (18) et (19) :

$$l^2y^2 + k^2(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = l^2k^2\sin^2\alpha. \quad (22)$$

Cette équation représente une ellipse qui a pour centre le pôle attractif. Le diamètre de cette courbe, dirigé suivant l'axe des abscisses, est évidemment égal à $2l$. De plus, on reconnaît aisément que le diamètre conjugué de celui-ci, *parallèle à la direction de la vitesse initiale* k, a pour valeur $2k$. Il est donc très-facile de construire la trajectoire, au moyen des *conditions initiales*.

219. *Remarques.* — I. Un point quelconque de la trajectoire peut être regardé comme la position initiale du mobile, pourvu que le temps soit compté à partir de l'époque correspondante. Par conséquent, *la vitesse du mobile est égale, à chaque instant, au demi-diamètre parallèle à la tangente suivant laquelle cette vitesse est dirigée.*

II. Si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si la vitesse initiale est dirigée suivant le rayon vecteur, la trajectoire est rectiligne.

III. Si l'on suppose $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $k = l$, l'ellipse se réduit à un cercle, et *le mouvement devient uniforme.*

---

temps. Et comme la trajectoire est plane, *les aires décrites par le rayon vecteur* lui-même *sont* également *proportionnelles aux temps.* Cette propriété remarquable, qui subsiste toutes les fois que le mobile est attiré (ou repoussé) par un centre fixe, constitue le *principe des aires.*

CHAPITRE XIII.

COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES ET DES FORCES PARALLÈLES.

De la constitution des solides.

220. L'étude des phénomènes physiques et chimiques conduit à regarder les corps comme des systèmes de points matériels ou d'atomes (1), dont les dimensions sont fort petites par rapport aux intervalles qui les séparent, bien que ces intervalles eux-mêmes aient une ténuité telle, qu'ils échappent à nos yeux aidés des plus puissants microscopes. Entre ces atomes *pesants,* sont répandus des atomes d'*éther,* incomparablement plus nombreux et plus petits que les premiers, et constituant de véritables *atmosphères* dans lesquelles ceux-ci sont plongés.

Les forces qui sollicitent ces deux espèces d'atomes sont : 1° l'*attraction* mutuelle des atomes pesants (*); 2° l'*attraction* de ces atomes pour l'éther (**); 3° la *répulsion* mutuelle des atomes d'éther. Quand il y a équilibre entre ces diverses forces, le corps est lui-même en équilibre : il ne change ni de figure ni de volume. Si la répulsion l'emporte sur l'attraction, le volume augmente : c'est ce qui arrive ordinairement quand on chauffe le corps, c'est-à-dire quand on y introduit de l'éther (***).

(*) On lui donne, en Chimie, le nom de *cohésion.*

(**) Cette hypothèse d'une attraction entre la matière pondérable et l'éther est attribuée à Laplace. Si elle est conforme à la réalité, l'éther, au lieu d'être répandu à peu près uniformément dans l'intérieur d'un corps, doit se *condenser* dans le voisinage des atomes pesants, de manière à former, autour d'eux, de petites atmosphères. Un corps quelconque devient alors comparable à un *système planétaire :* c'est un *microcosme.*

(***) La dilatation n'est pas une conséquence *nécessaire* de l'augmentation de température : *Erman* a fait voir qu'un alliage formé de *deux* parties de bismuth, *une* partie de plomb et *une* partie d'étain, s'allonge d'abord quand on le chauffe, puis *se raccourcit,* puis s'allonge de nouveau.

Indépendamment des hypothèses précédentes, les géomètres et les physiciens admettent encore que les *forces moléculaires* varient avec la distance des atomes; elles augmentent ou diminuent rapidement, suivant que cette distance diminue ou augmente : à distance sensible, l'attraction et la répulsion sont insensibles.

Dans les corps *solides*, ces diverses forces sont en équilibre, et même en *équilibre stable*, c'est-à-dire que si l'on applique au corps des *forces extérieures*, dont les intensités ne soient pas trop grandes, le corps résiste, jusqu'à un certain point, à la déformation que ces forces tendent à y produire, et reprend, à fort peu près, sa figure primitive, quand les actions extérieures ont cessé (*).

221. L'étude des changements d'état ou de figure déterminés dans un corps solide, par des forces données, constitue la *Mécanique moléculaire :* elle exige la connaissance et l'emploi des théories les plus élevées de l'Analyse infinitésimale. Dans la Mécanique élémentaire, on suppose toujours, pour plus de simplicité, que ces changements de figure sont insensibles, ce qui revient à regarder tout corps solide comme *un système de points matériels, invariablement liés entre eux*. Cette hypothèse conduit à des résultats d'autant plus approchés, que le corps considéré est plus résistant.

Forces concourantes.

222. Jusqu'à présent, nous avons supposé que les forces données étaient appliquées en un même point. Ordinairement, les choses ne se passent pas ainsi : quand un corps solide est sollicité par différentes forces, celles-ci sont appliquées en différents points de sa surface (**). Néanmoins, si les directions de ces forces vont concourir en un même point situé dans l'intérieur du corps, les théorèmes ci-dessus (Chap. X et XI) subsistent encore. Cette conclusion résulte des propositions suivantes.

223. Lemme. — *Deux forces, égales et directement opposées,*

(*) Cette dernière propriété porte le nom d'*élasticité*.

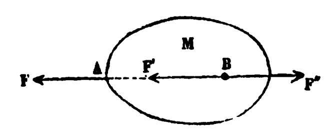
(**) Il ne s'agit ici, bien entendu, ni du poids du corps, ni des attractions ou répulsions qui s'exercent entre ses molécules.

appliquées en deux points d'un même corps solide, se font équilibre, en sorte que l'état du corps n'est pas altéré par l'introduction de ces forces.

Ce principe, réciproque de celui du n° 96, peut être regardé, soit comme un axiome, soit comme un résultat de l'expérience : il ne paraît pas susceptible d'une véritable démonstration. Relativement à la portée qu'on doit lui attribuer, nous ferons observer qu'il ne serait applicable, d'une manière absolue, qu'à des corps ayant une rigidité *infinie*. Mais si, comme nous venons de le dire, on suppose les forces considérées assez petites, relativement à la résistance du corps, pour que les changements de figure qu'il éprouve, sous leur action, soient insensibles, la proposition est d'accord avec les faits, et simplifie beaucoup certaines démonstrations.

224. Théorème I. — *On peut appliquer une force en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit invariablement lié au premier point d'application.*

Soit, pour fixer les idées, la force F appliquée en un point A appartenant à la surface du corps solide M; je dis que cette force peut être supposée appliquée au point B, situé dans l'intérieur du corps, sur le prolongement de FA.



Pour le faire voir, imaginons, en B, deux forces égales à F, l'une F' dirigée suivant BA, l'autre F'' opposée à F' : ces deux forces auxiliaires, étant égales et directement opposées, se font équilibre (*). D'un autre côté, les forces F', F'' se font également équilibre : si nous les supprimons, ce qui ne changera en rien l'état du corps, il ne restera que la force F', appliquée en B. Cette dernière force peut donc tenir lieu de la force F, appliquée en A. C'est ce qu'il fallait démontrer.

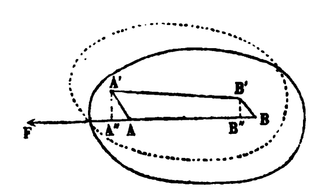
225. Théorème II. — *Lorsqu'on transporte une force en un point quelconque de sa direction, son travail élémentaire ne change pas.*

Attribuons à la droite AB, qui joint les deux points d'applica-

---

(*) Cette proposition, assez évidente d'ailleurs, peut être regardée comme un cas particulier du lemme précédent.

tion, un déplacement très-petit, de manière à l'amener en A'B', et projetons les points A', B' sur AB, en A", B".



Quand la force F est appliquée en A, son travail élémentaire est F.AA". De même, quand on la suppose transportée en B, son travail élémentaire est F.BB". D'après l'énoncé, ces deux travaux doivent être égaux entre eux, du moins *quand les chemins* AA', BB' *seront suffisamment petits;* c'est-à-dire que *le rapport* $\frac{AA''}{BB''}$ *doit avoir pour limite l'unité* (*). Pour le démontrer, au moins dans un cas simple, faisons

$$AB = A'B' = l, \quad AA' = a, \quad BB' = b, \quad A'AA'' = \alpha, \quad B'BB'' = \beta,$$

et supposons que la figure ABB'A' soit plane; nous aurons, dans le trapèze A'B'A"B",

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{A''B''}^2 + (A'A'' - B'B'')^2,$$

ou

$$l^2 = (l + a\cos\alpha - b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha - b\sin\beta)^2.$$

En effectuant et réduisant, on trouve

$$0 = 2l(a\cos\alpha - b\cos\beta) + a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta).$$

Maintenant, si nous divisons tous les termes par $2lb\cos\beta$, nous aurons

$$0 = \frac{a\cos\alpha}{b\cos\beta} - 1 + \frac{1}{2l\cos\beta}\left[\frac{a}{b}\cdot a + b - 2a\cos(\alpha+\beta)\right];$$

et, en faisant décroître a et b jusqu'à zéro,

$$0 = \lim\frac{a\cos\alpha}{b\cos\beta} - 1,$$

ou

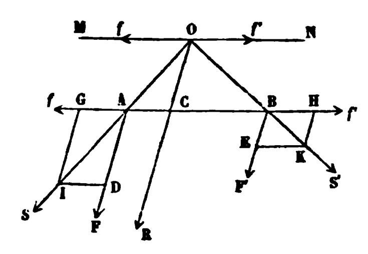
$$\lim\frac{AA''}{BB''} = 1.$$

(*) La transformation que nous sommes obligé de faire subir à l'énoncé confirme la note du n° 160.

Composition des forces parallèles.

226. Théorème I. — *Deux forces* F, F' *parallèles et de même sens, appliquées en deux points* A, B *d'un corps solide, ont une résultante* R *parallèle à leur direction commune, agissant dans le même sens, et égale à leur somme. De plus, la direction de cette résultante partage la droite* AB *qui joint les points d'application des composantes, en deux segments additifs, inversement proportionnels à ces composantes.*

Sans changer l'état du corps, nous pouvons appliquer, aux points A, B, deux forces f, f', égales et directement opposées (223). Soient AG, BH, les droites égales qui représentent ces forces auxiliaires, et AD, BE celles qui représentent les forces données.



Les forces F, f, appliquées en A, ont une résultante S représentée par AI. De même, les forces F', f' se composent en une force S', représentée par BK. Soit O le point de concours des directions IA, KB (*): les forces S, S' peuvent être supposées appliquées en ce point (**) (224). Cela étant, menons MON parallèle à AB, OC parallèle à AD, puis décomposons, suivant ces deux directions, chacune des *résultantes partielles* S, S'. Nous obtiendrons, comme tout à l'heure, les deux forces f, f', égales et directement opposées, et les deux forces F, F', dirigées cette fois suivant OC. Par conséquent, la première partie du théorème est démontrée.

Pour vérifier la seconde, il suffit d'observer que les triangles

---

(*) Ce point existe, parce que la somme des angles IAB, ABK est comprise entre 2^d et 4^d.

(**) En rendant suffisamment petites les forces f, f', on peut rapprocher le point O, autant qu'on le voudra, de la droite AB. Par conséquent, il est permis de supposer que ce point appartient au corps solide; ce qui est nécessaire pour justifier l'application du lemme.

IAD, AOC, KBE, BOC sont semblables deux à deux. Donc

$$\frac{AD}{OC} = \frac{ID}{AC}, \quad \frac{BE}{OC} = \frac{KE}{BC};$$

puis, à cause de ID = KE :

$$\frac{AD}{BE} = \frac{BC}{AC};$$

c'est-à-dire

$$\frac{F}{F'} = \frac{BC}{AC}.$$

227. Théorème II. — *Deux forces* F, F' *parallèles, inégales et de sens contraires, appliquées en deux points* A, B *d'un corps solide, ont une résultante* R *parallèle à chacune d'elles, agissant dans le sens de la plus grande, et égale à leur différence. De plus, la direction de cette résultante partage la droite* AB *qui joint les points d'application des composantes, en deux segments soustractifs* AC, BC, *inversement proportionnels à ces composantes.*

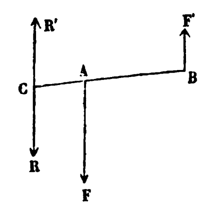
Prenons, sur le prolongement de AB, et du côté de la plus grande des deux forces, le point C déterminé par la proportion

$$\frac{AC}{AB} = \frac{F'}{F}, \quad (1)$$

ou, ce qui est équivalent, par la proportion

$$\frac{AC}{AB} = \frac{F'}{F - F'}. \quad (2)$$

Appliquons ensuite, en C, deux forces R, R', directement opposées, parallèles aux deux forces F, F' et égales à F — F' : l'état du corps ne sera pas changé. Mais, d'après le théorème précédent, les deux forces F', R' ont une résultante égale et directement opposée à F : les trois forces F', R', F se font donc équilibre. Si nous les supprimons, il ne restera plus, au lieu des deux forces proposées, que la force unique R : celle-ci est donc la résultante.

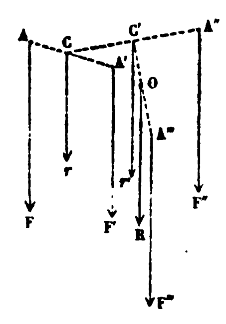


228. *Remarque.* — Si les forces F, F' devenaient égales, elles

n'auraient pas de résultante, puisque la relation (2) donnerait pour AC une valeur infinie. De plus, ces deux forces ne pourraient se faire équilibre (96). On a donné, à un pareil système de *deux forces égales, parallèles, de sens contraires et non directement opposées*, la dénomination de *couple*.

229. Théorème III. — *Tant de forces parallèles que l'on voudra, appliquées en différents points d'un corps solide, et agissant dans le même sens, ont une résultante parallèle à leur direction commune, agissant dans le même sens, et égale à leur somme.*

Soient, pour fixer les idées, quatre forces F, F', F", F‴, appliquées en A, A', A", A‴. Les forces F, F', parallèles et de même sens, ont une résultante r dont on obtiendra un point C en partageant la droite AA' de manière que



$$\frac{AC}{A'C} = \frac{F'}{F}.$$

De même, la résultante r' des forces r, F", ou des forces F, F', F", rencontre la droite CA" en un point C' déterminé par la proportion

$$\frac{CC'}{A''C'} = \frac{F''}{r'}.$$

Enfin, la résultante R des forces r', F‴, c'est-à-dire la résultante des quatre forces proposées, passe en un point O qui divise C'A‴ en parties inversement proportionnelles à r' et F‴.

D'ailleurs,

$$r = F + F', \quad r' = r + F'', \quad R = r' + F''';$$

donc

$$R = F + F' + F'' + F'''.$$

230. *Remarques.* — I. Les points C, C', C",... sont déterminés par les points d'application des forces F, F', F",... et par les rapports de ces forces. Conséquemment, *si l'on fait tourner les forces* F, F', F",... *autour de leurs points d'application, supposés fixes, de manière que ces forces conservent leur parallélisme et leurs rapports, les résultantes de tous ces systèmes de forces passeront constamment par un point fixe* O.

II. Ce point fixe est appelé le *centre des forces parallèles.*

III. Si toutes les forces F, F′, F″,... deviennent égales entre elles, leur centre ne diffère pas du *centre des moyennes distances* des points A, A′, A″,... (*).

IV. En même temps, les proportions ci-dessus deviennent

$$\frac{AC}{A'C}=1,\quad \frac{CC'}{A''C'}=\frac{1}{2},\quad \frac{C'O}{A'''O}=\frac{1}{3}.$$

Ainsi, le point C est le *milieu* de AA′; le point C′ est situé au *tiers* de CA″, à partir de C; le point O est situé au *quart* de C′A‴, à partir de C′, etc.

231. Au moyen des théorèmes précédents, on pourra toujours effectuer la composition d'un nombre quelconque de forces parallèles, agissant, les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé. En effet, on peut d'abord chercher la résultante R_1 des forces appartenant au premier groupe (229), et la résultante R_2 de celles qui appartiennent à l'autre groupe. Cela posé, trois cas principaux peuvent se présenter :

1°. Si les résultantes partielles R_1, R_2 sont *inégales,* elles se composent en une seule force R : *les forces proposées peuvent donc se réduire à une résultante unique.*

2°. Si les résultantes R_1, R_2 sont *égales et directement opposées,* elles se détruisent : *les forces proposées peuvent donc se faire équilibre.*

3°. Enfin, si les résultantes R_1, R_2 sont *égales et non directement opposées,* elles constituent un couple : *les forces proposées peuvent donc se réduire à un couple.*

232. *Remarque.* — Dans le premier cas, *la résultante est égale à la somme algébrique des composantes.*

EXERCICES (**).

I. Une molécule est placée en un point duquel émane une force répulsive, proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance.

(*) *Voyez* l'ouvrage intitulé *Théorèmes et Problèmes de Géométrie,* troisième édition.

(**) Les énoncés suivants sont tirés du savant Recueil publié en 1855 par *M. Jullien,* sous le titre de *Problèmes de Mécanique rationnelle.* Paris, Mallet-Bachelier.

Déterminer la vitesse dont le mobile est animé lorsqu'il a parcouru un espace donné, et le temps qu'il a mis à parcourir cet espace.

II. Un point matériel est attiré, vers un centre fixe, par une force inversement proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance. Trouver quel doit être le nombre n pour que la vitesse que le mobile acquiert en venant d'une distance infinie à la distance a, soit égale à celle qu'il aurait acquise en venant de la distance a à la distance $\frac{a}{4}$.

Résultat: $$n = \frac{3}{2}.$$

III. Un point matériel est placé, en un lieu connu, sur la droite qui joint les centres de deux forces attractives égales, proportionnelles à la distance. Déterminer le mouvement du point.

IV. Un point matériel, qui se meut en ligne droite, est attiré ou repoussé, proportionnellement à la distance, par un pôle qui se meut suivant la même droite, avec une vitesse constante a. On connaît la vitesse initiale b du point attiré, ainsi que les positions initiales des deux mobiles. Quel est le mouvement du point attiré?

V. Un point matériel reçoit une vitesse a dans un milieu homogène, dont la résistance est proportionnelle à la racine carrée de la vitesse. Déterminer l'époque à laquelle le point s'arrêtera.

Résultat: $$T = \frac{2}{k}\sqrt{a},$$

k représentant la résistance pour l'unité de vitesse.

VI. Un point matériel, lancé avec une vitesse de 300 mètres par seconde, dans un milieu dont la résistance est constante, a perdu la moitié de sa vitesse en parcourant une longueur de 1 décimètre. Quel est le temps employé à parcourir cet espace?

Réponse: $\frac{1}{2250}$ de seconde.

VII. Un point matériel décrit une parabole autour d'un pôle attractif, situé à l'intersection de la directrice et de l'axe. Trouver

la force qui sollicite le mobile en un point quelconque de sa trajectoire.

Résultat : $$F = \frac{c^2}{p}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(p-x)^3}.$$

VIII. Déterminer le temps T qu'un projectile emploie à parcourir sa trajectoire parabolique (page 176), en fonction des vitesses v_0, v_1 aux extrémités de cet arc, de la vitesse v_2 au sommet de la parabole, et de l'angle θ que font entre elles les tangentes aux extrémités de l'arc.

Résultat : $$T = \frac{v_0 v_1}{v_2 g}\sin\theta.$$

IX. Un point matériel décrit une spirale logarithmique sous l'action d'une force constamment dirigée vers le pôle. Trouver l'expression de la force et la vitesse du mobile.

X. Un point matériel décrit une parabole sous l'influence d'un centre d'attraction placé au foyer de la courbe. Lorsque le mobile est à une distance donnée du foyer, la force attractive est subitement doublée. Quelle est la trajectoire que le mobile va décrire?

Réponse : Une ellipse tangente à la parabole.

XI. Un point matériel, soumis à l'attraction d'un centre fixe, se meut avec une vitesse inversement proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance au centre. Trouver la loi de l'attraction et l'équation de la trajectoire.

XII. Un point matériel décrit une lemniscate de Jacques Bernoulli (*), sous l'action d'une force dirigée vers le centre de la trajectoire. Déterminer la loi de la force, et le temps employé à décrire une boucle de la lemniscate.

Résultat : $$F = \frac{\mu}{u^7}, \quad T = \sqrt{\frac{3}{\mu}},$$

μ étant une constante.

(*) Cette courbe a pour équation $u^2 = \cos 2\omega$.

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DES MOMENTS.

Définitions.

233. *Le moment d'une force, par rapport à un point, est le produit de l'intensité de la force, par la distance comprise entre le point et la direction de la force.*

Le point donné est appelé *centre des moments*.

De même, *le moment d'une force, par rapport à un plan parallèle à sa direction, est le produit de l'intensité de la force, par la distance comprise entre le plan et la direction de la force* (*).

Enfin, *le moment d'une force, par rapport à un axe, est le produit de la projection de la force, sur un plan perpendiculaire à l'axe, par la plus courte distance entre l'axe et la direction de la force.*

Forces concourantes.

234. THÉORÈME I. — *Le moment de la résultante* R *de deux forces* F, F', *par rapport à un point* O *situé dans leur plan, est égal à la somme des moments des composantes.* (Théorème de Varignon.)

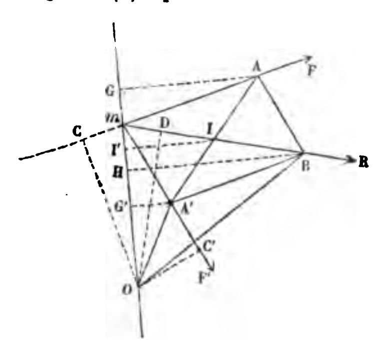
L'égalité $$\mathrm{R}r = \mathrm{F}p + \mathrm{F}'p', \quad (1)$$
ou $$m\mathrm{B}.\mathrm{OD} = m\mathrm{A}.\mathrm{OC} + m\mathrm{A}'.\mathrm{OC}',$$

exprime que le triangle $\mathrm{O}m\mathrm{B}$ est équivalent à la somme des triangles $\mathrm{O}m\mathrm{A}$, $\mathrm{O}m\mathrm{A}'$. Or, ces trois triangles ont même base $\mathrm{O}m$; donc ils sont entre eux comme leurs hauteurs BH, AG, A'G'; donc

(*) La plupart des auteurs ne supposent pas la force parallèle au plan, et appellent *moment le produit de l'intensité de la force par la distance de son point d'application au plan*. Nous n'avons pas cru devoir adopter cette définition, parce que (au moins dans le cas d'un corps solide) tout point de la droite suivant laquelle agit la force pouvant être regardé comme le point d'application de celle-ci, le produit désigné par le mot *moment* deviendrait complétement indéterminé.

l'égalité (1) équivaut à celle-ci :

$$BH = AG + A'G'.$$



Mais, I étant le centre du parallélogramme, $BH = 2\,II'$; et, d'après un théorème connu,

$$II' = \frac{1}{2}(AG + A'G');$$

donc enfin

$$BH = AG + A'G'.$$

235. *Remarque.* — Si le centre O tombait dans l'angle formé par les directions mA, mA', ou dans l'angle formé par les prolongements de ces droites, le triangle OmB serait équivalent à la *différence* des triangles OmA, OmA', en sorte que le moment de la résultante serait égal à la *différence* des moments des composantes. Pour n'avoir pas à modifier l'énoncé du théorème, on regarde le moment d'une force comme *positif* ou comme *négatif*, suivant que cette force *tend à faire tourner la droite* Om *dans un sens ou dans l'autre, autour du centre des moments.*

236. Théorème II. — *Le moment de la résultante* R *de plusieurs forces concourantes* $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ *situées dans un même plan, par rapport à un point* O *situé dans ce plan, est égal à la somme des moments des composantes.*

Appelons R_1 la résultante des forces F_1, F_2; R_2 la résultante des forces F_3, R_1; et ainsi de suite. Nous aurons, d'après le premier théorème :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}R_1 &= \mathfrak{M}F_1 + \mathfrak{M}F_2,\\
\mathfrak{M}R_2 &= \mathfrak{M}F_3 + \mathfrak{M}R_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{M}R_{n-2} &= \mathfrak{M}F_{n-1} + \mathfrak{M}R_{n-3},\\
\mathfrak{M}R &= \mathfrak{M}F_n + \mathfrak{M}R_{n-2};
\end{aligned}$$

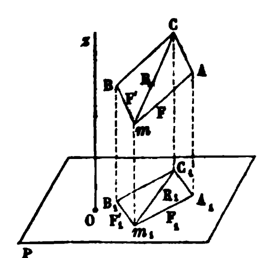
d'où

$$\mathfrak{M}R = \mathfrak{M}F_1 + \mathfrak{M}F_2 + \ldots + \mathfrak{M}F_n,$$

ou, pour abréger,

$$\mathfrak{M}R = \Sigma\,\mathfrak{M}F.$$

237. THÉORÈME III. — *Le moment de la résultante* R *de deux forces* F, F', *par rapport à un axe* Oz, *est égal à la somme des moments des composantes.*



La projection du parallélogramme $mACB$, sur un plan P perpendiculaire à Oz, est évidemment un parallélogramme $m_1A_1C_1B_1$. D'un autre côté, *les plus courtes distances des droites* mA, mB, mC, *à l'axe* Oz, *se projettent, sur le plan* P, *suivant les distances du point* O aux droites m_1A_1, m_1B_1, m_1C_1 (*). Conséquemment, la proposition qu'il s'agit de démontrer se réduit à la relation

$$\mathfrak{M}R_1 = \mathfrak{M}F_1 + \mathfrak{M}F'_1,$$

laquelle rentre dans le Théorème I.

238. THÉORÈME IV. — *Le moment de la résultante de plusieurs forces concourantes, par rapport à un axe, est égal à la somme des moments des composantes.*

La démonstration est la même que celle du Théorème II.

239. *Remarque.* — Soit γ l'angle formé par la direction d'une force F avec un axe Oz; soit δ la plus courte distance entre la direction de la force et l'axe. On a

$$\mathfrak{M}F = \mathfrak{M}F_1 = F_1\delta.$$

Mais
$$F_1 = F\cos(F, P) = F\sin\gamma;$$

donc
$$\mathfrak{M}F = F\delta\sin\gamma.$$

Ainsi, *le moment d'une force, par rapport à un axe, est égal au produit de la force par sa plus courte distance à l'axe et par le sinus de l'angle qu'elle forme avec l'axe* (**).

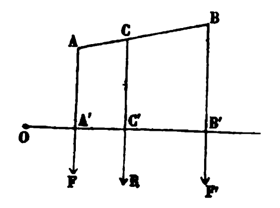
Forces parallèles.

240. THÉORÈME V. — *Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles situées dans un plan, par rapport à un point* O

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive.*

(**) Ce résultat pourrait être pris pour définition.

situé dans ce plan, est égal à la somme des moments des composantes.



Il suffit évidemment de considérer le cas de deux composantes F, F (236). Or,

$$\frac{F}{F'} = \frac{B'C'}{A'C'};$$

ou

$$\frac{F}{F'} = \frac{p'-r}{r-p},$$

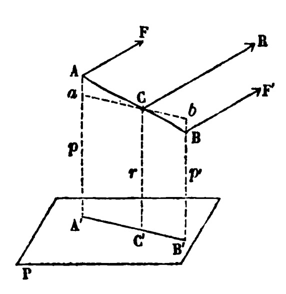
r, r', p désignant les distances OA′, OB′, OC′.

Par suite, $$(F+F')r = Fp + F'p',$$

ou enfin $$Rr = Fp + F'p'.$$

241. *Remarque.* — Pour que l'énoncé subsiste généralement, on doit affecter de signes convenables les forces et les distances (235). La même remarque est applicable aux propositions suivantes.

242. Théorème VI. — *Le moment de la résultante* R *de plusieurs forces parallèles, par rapport à un plan* P, *est égal à la somme des moments des composantes.*



Considérons, comme dans le Théorème V, deux forces F, F′ et leur résultante R : nous pouvons les supposer appliquées en trois points A, B, C situés sur une même droite. Soient A′, B′, C′ les projections orthogonales de ces points, sur le plan P. En menant acb parallèle à A′C′B′, nous aurons

$$\frac{Aa}{Ba} = \frac{AC}{BC} = \frac{F'}{F},$$

ou

$$\frac{p-r}{r-p'} = \frac{F'}{F};$$

et enfin (240) $$Rr = Fp + F'p'.$$

243. Théorème VII. — *Le moment de la résultante d*

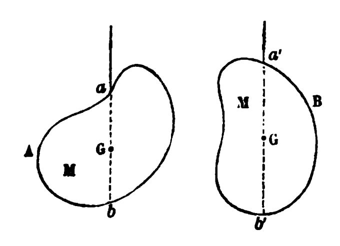
CHAPITRE XV.

DES CENTRES DE GRAVITÉ.

Préliminaires.

248. Nous avons vu que, pour tout système de forces parallèles, il existe un *centre* par lequel passe constamment la résultante, lorsque les composantes tournent autour de leurs points d'application (230). Par conséquent, si l'on considère un corps quelconque comme un assemblage de points matériels ou molécules, et si l'on fait attention que les poids de ces molécules sont des forces sensiblement parallèles, on conclura qu'il existe un point unique par lequel passe constamment la direction du poids; quand on tourne le corps dans diverses positions à l'égard de l'horizon. Ce point est le *centre de gravité* du corps.

249. *Remarque.* — Quand le centre de gravité est situé à l'intérieur du corps, on peut supposer le poids de celui-ci appliqué en ce centre; de sorte que, dans ce cas, *le centre de gravité est le point d'application du poids du corps.* C'est cette propriété que nous avions adoptée provisoirement comme définition (119).



250. Pour obtenir, expérimentalement, la position du centre de gravité G d'un corps solide M, il suffit de suspendre le corps, au moyen d'un fil, successivement dans deux situations différentes A, B. Si l'on prolonge, par la pensée, les directions ab, $a'b'$ du fil, elles se rencontreront au centre de gravité cherché.

En effet, dans chacune des positions d'équilibre du corps, la direction du fil passe par le centre de gravité.

Détermination des centres de gravité.

251. PROBLÈME I. — *Déterminer le centre de gravité d'un système de corps, connaissant le centre de gravité et le poids de chacun d'eux.*

Pour que le système soit invariable de figure, il faut que l'on suppose les corps liés les uns aux autres par des tiges rigides; de plus, ces tiges doivent être *sans pesanteur*, c'est-à-dire que l'on néglige leurs poids. Cela posé, si l'on prend d'abord les moments par rapport à deux plans verticaux, perpendiculaires pour plus de simplicité, on aura (**244**)

$$P=\Sigma p, \quad Pa=\Sigma px, \quad Pb=\Sigma py,$$

p désignant le poids d'un quelconque des corps donnés.

Prenant ensuite les moments par rapport à un plan horizontal arbitraire, on aura pareillement

$$Pc=\Sigma Pz \ (*).$$

Les coordonnées rectangulaires du centre de gravité cherché seront donc

$$a=\frac{\Sigma px}{\Sigma p}, \quad b=\frac{\Sigma py}{\Sigma p}, \quad c=\frac{\Sigma pz}{\Sigma p}.$$

252. PROBLÈME II. — *Déterminer le centre de gravité d'un corps de forme donnée, connaissant la loi de la densité en chacun de ses points.*

Pour essayer de résoudre cette question, on suppose le corps décomposé en *éléments* très-petits, par exemple en parallélipipèdes rectangles ayant leurs faces respectivement parallèles à trois plans coordonnés : les arêtes de l'élément dont un sommet a pour coordonnées x, y, z seront Δx, Δy, Δz. Soit

$$d=\varphi(x, y, z)$$

(*) Il est nécessaire d'employer cette dernière équation, parce que le centre de gravité d'un corps, au lieu d'être un point quelconque de la direction de son poids, est un point *unique* de cette ligne. D'ailleurs, comme la direction de la pesanteur est invariable, on peut supposer que l'on a fait tourner, à la fois, tous les corps composant le système donné, de manière à rendre *horizontale* l'intersection des deux plans par rapport auxquels on avait d'abord pris les moments.

la densité au point considéré, c'est-à-dire *la limite vers laquelle tend le rapport entre le poids p et le volume* $\Delta x \Delta y \Delta z$ *de l'élément* (*). Les coordonnées du centre de gravité de celui-ci sont comprises entre x, y, z et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$. De plus, le poids de cet élément peut être supposé compris entre

$$\Delta x \Delta y \Delta z \varphi \quad \text{et} \quad \Delta x \Delta y \Delta z (\varphi + \Delta \varphi).$$

On conclut facilement de là que le poids du corps est

$$P = \lim \Sigma (\Delta x \Delta y \Delta z \varphi),$$

et que les coordonnées de son centre de gravité sont données par les formules

$$a = \frac{\lim \Sigma (x \Delta x \Delta y \Delta z \varphi)}{P},$$

$$b = \frac{\lim \Sigma (y \Delta x \Delta y \Delta z \varphi)}{P},$$

$$c = \frac{\lim \Sigma (z \Delta x \Delta y \Delta z \varphi)}{P}.$$

253. Quand le corps est homogène, φ est une constante, et l'on a simplement

$$a = \frac{\lim \Sigma (x \Delta x \Delta y \Delta z)}{V},$$

$$b = \frac{\lim \Sigma (y \Delta x \Delta y \Delta z)}{V},$$

$$c = \frac{\lim \Sigma (z \Delta x \Delta y \Delta z)}{V},$$

V représentant le volume, c'est-à-dire $\lim \Sigma (\Delta x \Delta y \Delta z)$ (**).

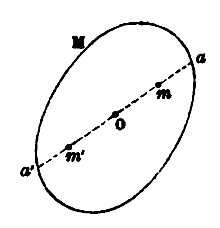
254. Avant d'appliquer les formules précédentes à quelques exemples simples, nous établirons divers théorèmes qui permettent, dans certains cas, de résoudre, sans aucun calcul, les problèmes relatifs aux centres de gravité.

(*) Cette définition, qui suppose la continuité de la matière, conduit cependant à des résultats suffisamment exacts, du moins quand le corps n'a pas de pores appréciables.

(**) La recherche de ces diverses limites constitue un problème de Calcul intégral.

256. **Théorème I.** — *Si un corps homogène* M *a un centre de figure* O, *ce point est le centre de gravité du corps.*

A chaque molécule ou point matériel m correspond, sur la corde aOa' passant en ce point, une autre molécule m', symétrique de la première, relativement au centre O. Si donc, comme nous l'avons supposé, les deux molécules ont des poids égaux, leur centre de gravité sera le point O. Les poids de toutes les molécules du corps, prises deux à deux, sont donc appliqués en ce point, lequel, conséquemment, est le centre de gravité du corps.



257. **Théorème II.** — *Si les centres de gravité de plusieurs corps sont dans un plan, le centre de gravité du système est dans ce même plan.*

En effet, d'après le théorème sur la composition d'un système de forces parallèles (229), il s'ensuit que si les points d'application de ces forces sont dans un même plan, le point d'application de la résultante est également dans ce plan.

258. **Corollaire.** — *Si les centres de gravité de plusieurs corps sont sur une droite, le centre de gravité du système est sur cette droite.*

259. **Théorème III.** — *Si un corps homogène renferme un plan diamétral, le centre de gravité du corps est dans ce plan.*

Soit XY un *plan diamétral* du corps, c'est-à-dire *un plan qui divise en deux parties égales toutes les cordes* ab, $a'b'$, $a''b''$,..., *terminées à la surface et parallèles à une même direction* (*T. D.*, 75). A chaque molécule ou point matériel m correspondra, sur la corde ab passant en ce point, une autre molécule m' symétrique de la première, par rapport au milieu c de ab. Le centre de gravité du système (m, m') est donc en c (256). Par suite, le centre de gravité de la *file* ab de molécules sera également en c, c'est-à-dire dans le plan XY : ce plan contient donc le centre de gravité du corps (257).

260. **Corollaire.** — *Si un corps homogène renferme un plan de symétrie, son centre de gravité est dans ce plan.*

261. Les conséquences des théorèmes précédents sont fort nombreuses; nous en citerons quelques-unes :

1°. *Sphère, parallélipipède, cylindre droit ou oblique.* — Dans chacun de ces corps, le centre de gravité coïncide avec le centre de figure.

2°. *Cercle, parallélogramme, polygone régulier, ligne droite* (*). — Le *centre* de chacune de ces figures est également le centre de gravité de la figure.

3°. *Triangle.* — *Le centre de gravité d'un triangle est le point de rencontre des trois médianes* (259).

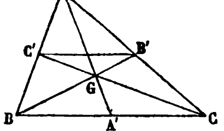
4°. *Prisme triangulaire.* — *Le centre de gravité d'un prisme triangulaire est situé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases* (259).

Etc.

262. *Remarques.* — I. La notion du centre de gravité suffit, indépendamment de toute autre théorie, pour établir le théorème relatif au *point de concours des médianes* d'un triangle. En effet, le centre de gravité du triangle devant se trouver sur chacune de ces trois droites, elles concourent nécessairement en un même point.

De même, la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre est, comme on le reconnaît aisément, l'intersection de deux plans diamétraux de ce corps; donc elle contient le centre de gravité cherché; donc, *dans tout tétraèdre, les trois droites que l'on obtient eu joignant les milieux de deux arêtes opposées concourent en un même point, centre de gravité du tétraèdre.*

II. *Le centre de gravité* G *d'un triangle* ABC *est situé au tiers de chaque médiane, à partir de la base correspondante.*



En effet, les deux triangles BGC, B'GC', évidemment semblables, donnent

$$\frac{BG'}{BG} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ etc.}$$

III. *Le centre de gravité* G *d'un triangle* ABC *coïncide avec le*

(*) Ce qu'on appelle un *cercle pesant* est un cylindre excessivement mince; de même, un *parallélogramme pesant* est un parallélipipède dont la hauteur est sensiblement nulle, etc.

centre de gravité du système de trois poids égaux, ayant pour centres de gravité les sommets A, B, C.

IV. *Le centre de gravité* G *d'un tétraèdre* ABCD *est situé sur la droite* Dg *menée d'un sommet quelconque* D *au centre de gravité* g *de la base; il est au quart de cette ligne, à partir de la base.*

En effet : 1° les deux *plans diamétraux* AA'D, CC'D contiennent le centre de gravité du tétraèdre; donc ce centre est situé sur leur intersection Dg.

2°. Soit g' le centre de gravité de la face BCD. On aura

$$\frac{Gg}{GD} = \frac{gg'}{AD} = \frac{gA'}{AA'} = \frac{1}{3};$$

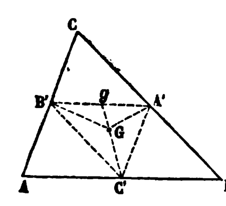
etc.

V. *Le centre de gravité* G *d'un tétraèdre* ABCD *coïncide avec le centre de gravité du système de quatre poids égaux, ayant pour centres de gravité les sommets* A, B, C, D.

VI. Par conséquent, *ce centre est situé au milieu de la droite* A'H *qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques* (*).

Problèmes sur les centres de gravité.

263. Problème I. — *Trouver le centre de gravité du périmètre d'un triangle*, c'est-à-dire *trouver le centre de gravité du système de trois tiges homogènes* AB, BC, CA, *dont l'épaisseur est négligeable par rapport à la longueur.*



Les centres de gravité des trois côtés sont en leurs milieux A', B', C'. Par conséquent, la question se réduit encore à *déterminer le centre de gravité du système de trois poids, proportionnels aux longueurs* BC, CA, AB, *et appliqués en* A', B', C'.

Le centre de gravité g du système des deux premiers poids par-

(*) On démontre directement cette dernière propriété en faisant attention que $A'G = \frac{1}{3} A'H + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} A'H = \frac{1}{2} A'H$.

tage la droite A′B′ en deux segments $A'g$, $B'g$ inversement proportionnels à BC, CA; en sorte que l'on a

$$\frac{A'g}{B'g} = \frac{AC}{BC},$$

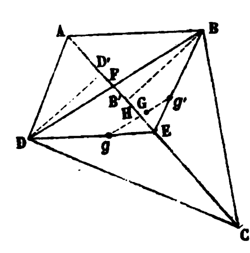
ou, à cause de $A'C' = \frac{1}{2}AC$, $B'C' = \frac{1}{2}BC$:

$$\frac{A'g}{B'g} = \frac{A'C'}{B'C'}.$$

Cette dernière proportion prouve que $C'g$ *est la bissectrice de l'angle* A′C′B′. Donc *le centre de gravité cherché coïncide avec le centre du cercle inscrit au triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle donné* (*).

264. Problème II. — *Trouver le centre de gravité d'un quadrilatère* ABCD.

La diagonale AC partage le quadrilatère en deux triangles dont les centres de gravité g, g' sont situés sur les médianes DE, BE. Conséquemment, le centre de gravité cherché divise la droite gg' en deux segments gG, g'G inversement proportionnels aux *poids* ou aux *aires* de ces triangles. On a donc



$$\frac{gG}{g'G} = \frac{ABC}{ADC}.$$

Mais les triangles ABC, ADC ont même base; donc ils sont entre eux comme leurs hauteurs BB′, DD′; ou encore comme les segments BF, DF de la diagonale BD; ou enfin comme les segments g'H, gH de la droite gg'. Donc

$$\frac{gG}{g'G} = \frac{g'H}{gH}.$$

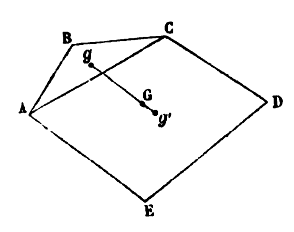
(*) Les segments gG, GC′ sont entre eux comme AB et AC + BC, ou comme A′B′ et A′C′ + B′C′. Par conséquent: *le cercle inscrit à un triangle partage chaque médiane en deux segments proportionnels au côté opposé et à la somme des côtés adjacents*. Cet exemple, et ceux du n° 262 suffisent pour faire comprendre que la théorie des centres de gravité être avantageusement appliquée à la Géométrie.

Cette proportion donne, évidemment, $gG = g'H$, $g'G = gH$. Ainsi, *pour obtenir le centre de gravité* G *du quadrilatère* ABCD, *menez la diagonale* AC, *construisez les centres de gravité* g, g' *des deux triangles* ADC, ABC, *et prenez, sur la droite* gg', $gG = g'H$.

265. *Remarque.* — Le point G est situé sur la droite qui joint les centres de gravité des triangles ABD, BCD.

266. Problème III. — *Déterminer le centre de gravité d'un polygone quelconque.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un pentagone ABCDE.



Menons la diagonale AC, de manière à décomposer le pentagone en un triangle ABC et en un quadrilatère ACDE. Soient g, g' les centres de gravité de ces deux figures, déterminés par les constructions indiquées ci-dessus : la droite gg' contiendra le centre de gravité cherché G.

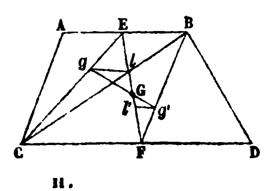
Une autre décomposition du pentagone donnera une seconde droite sur laquelle se trouve le centre G; donc ce point sera déterminé.

Si le polygone donné est un hexagone, on le décomposera en triangles et en pentagones, ou bien en quadrilatères; et ainsi de suite.

267. *Remarque.* — Chaque décomposition donne une droite qui contient le centre de gravité du polygone donné; donc *ce centre est le point de concours d'un réseau de droites.*

268. Problème IV. — *Trouver le centre de gravité* G *d'un trapèze* ABCD.

En opérant comme dans le cas d'un quadrilatère quelconque (264), on obtient une première droite gg', sur laquelle est situé le point cherché G. D'un autre côté, la médiane EF, divisant en deux parties égales toutes les cordes parallèles aux bases du trapèze, contient aussi le centre G. Ce point est donc déterminé.



269. *Remarque.* — On peut se dispenser de construire les points g, g'

En effet, soient gl, $g'l'$ des parallèles aux bases, menées par ces deux points; on aura

$$\frac{lG}{l'G} = \frac{gG}{g'G} = \frac{BCD}{ABC};$$

ou, en appelant B, b les bases CD, AB,

$$\frac{lG}{l'G} = \frac{B}{b}.$$

Cette proportion donne

$$lG = ll'\frac{B}{B+b} = \frac{1}{3}EF\frac{B}{B+b},$$

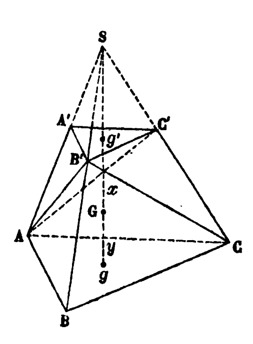
$$l'G = ll'\frac{b}{B+b} = \frac{1}{3}EF\frac{b}{B+b}.$$

Par suite, x et y désignant les segments EG, FG de la médiane,

$$\frac{x}{y} = \frac{\dfrac{B}{B+b}+1}{\dfrac{b}{B+b}+1} = \frac{2B+b}{2b+B}.$$

Ainsi, *le centre de gravité du trapèze partage la médiane* EF *en deux segments* EG, FG *qui sont entre eux comme la première base* AB, *augmentée du double de la seconde* CD, *est à la seconde augmentée du double de la première.*

270. Problème V. — *Déterminer le centre de gravité* G *d'un tronc de tétraèdre, à bases parallèles.*



Les centres g, g' des bases ABC, A'B'C', et le sommet S du tétraèdre, sont évidemment situés sur une même droite; donc le point cherché G appartient à cette droite : pour le déterminer complétement, il suffit d'évaluer le rapport des segments $g'G$, gG.

A cet effet, décomposons le tronc en trois tétraèdres ABCB', A'B'C'A, ACB'C', et prenons les moments par rapport aux deux bases; nous aurons, en employant les mêmes notations que

dans le problème précédent,

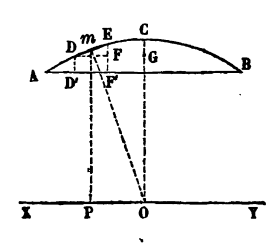
$$\frac{x}{y}=\frac{B.\frac{3}{4}h+b.\frac{1}{4}h+\sqrt{Bb}.\frac{1}{2}h}{B.\frac{1}{4}h+b.\frac{3}{4}h+\sqrt{Bb}.\frac{1}{2}h}\ (*),$$

ou

$$\frac{x}{y}=\frac{3B+b+2\sqrt{Bb}}{B+3b+2\sqrt{Bb}}.$$

271. Problème VI. — *Déterminer le centre de gravité* G *d'un arc de cercle* ACB.

Commençons par chercher le centre de gravité d'une ligne brisée régulière, d'un nombre pair de côtés, inscrite dans ACB. Ce point étant nécessairement situé sur le rayon OC passant par le milieu de l'arc, il suffit d'évaluer sa distance x au centre O. Soit DE un côté quelconque de la ligne brisée. Soit m le milieu de ce côté. En prenant les moments par rapport à un axe XY parallèle à AB, nous aurons



$$\Sigma\,\text{DE}.m\text{P}=x\,\Sigma\,\text{DE},$$

ou

$$\Sigma\,\text{DE}.m\text{P}=\text{P}x,$$

P étant le périmètre du polygone.

Afin de simplifier la *sommation* indiquée dans le premier membre, transformons DE.mP. Nous aurons, en menant Om, puis DF et EF parallèle et perpendiculaire à XY :

$$\frac{\text{DE}}{\text{O}m}=\frac{\text{DF}}{m\text{P}};$$

(*) Les segments x, y sont entre eux comme les distances du point G aux deux plans A′B′C′, ABC; donc $\frac{x}{y}$ représente le rapport des moments du tronc, par rapport à ces plans. De plus, les volumes des trois tétraèdres sont, comme on sait, $B\cdot\frac{1}{3}h$, $b\cdot\frac{1}{3}h$, $\sqrt{Bb}\cdot\frac{1}{3}h$. Enfin, les distances des centres de gravité de ces trois corps, à la base ABC, ont pour valeurs $\frac{1}{4}h$, $\frac{3}{4}h$ et $\frac{1}{2}h$.

donc $$DE.mP = Om.DF = R.D'F' \ (*),$$

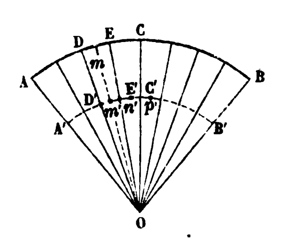
et, conséquemment,

$$x = \frac{R}{P}\Sigma D'F' = \frac{R}{P} AB :$$

la distance x *est une quatrième proportionnelle au périmètre* P, *à la corde* AB *et au rayon* R. Par suite, *la distance du centre* O *d'un arc de cercle, à son centre de gravité* G, *est une quatrième proportionnelle à l'arc, à la corde et au rayon.*

272. Problème VII. — *Trouver le centre de gravité* G *d'un secteur circulaire* ACBO.

Inscrivons, à cette figure, un *secteur polygonal régulier.* Soit ODE un des triangles isocèles égaux composant ce nouveau secteur. Le centre de gravité m' de ce triangle est situé aux deux tiers de l'apothème Om et au milieu de la petite corde D'E', homologue à DE. Conséquemment, le centre de gravité du secteur polygonal coïncide avec le centre de gravité d'une ligne brisée régulière, inscrite dans l'arc A'C'B' qui a pour rayon $\frac{2}{3}$OA. Les deux lignes brisées ont pour limites respectives les deux arcs; donc *le centre de gravité d'un secteur circulaire coïncide avec le centre de gravité d'un arc semblable à celui qui sert de base au secteur, et dont le rayon est les deux tiers du rayon du secteur.*



EXERCICES.

I. *Théorème.* — Le centre de gravité d'une zone sphérique est situé au milieu de la hauteur.

II. *Théorème.* — Le centre de gravité d'un secteur sphérique coïncide avec le centre de gravité d'une zone semblable à celle qui sert de base au secteur, et dont le rayon est les trois quarts du rayon du secteur.

(*) Cette transformation, que l'on emploie pour déterminer l'aire de la sphère, est attribuée à Archimède.

III. *Théorème.* — Le centre de gravité d'un segment sphérique à une base partage la hauteur h en deux parties qui sont entre elles comme $8R - 3h$ et $4R - h$, R étant le rayon de la sphère.

IV. Trouver le centre de gravité de la surface d'un cône droit.

V. Trouver le centre de gravité d'un triangle dans lequel la densité, en un point quelconque, est proportionnelle à la distance comprise entre ce point et la base du triangle.

VI. Aux sommets d'un triangle rigide sont appliquées trois forces parallèles, proportionnelles aux côtés opposés. Déterminer le centre de ces forces.

VII. Aux sommets B, C, D d'un tétraèdre ABCD sont appliquées trois forces parallèles. Déterminer la distance de leur centre au sommet A.

VIII. *Théorème.* — Les centres de gravité de l'aire et du contour d'un polygone circonscrit à une circonférence sont situés sur un rayon; leurs distances au centre de la circonférence sont dans le rapport de 2 à 3. (Brassine.)

IX. *Théorème.* — Le centre de gravité du volume et de l'aire d'un polygone circonscrit à une sphère sont situés sur un rayon; leurs distances au centre de la sphère sont dans le rapport de 3 à 4. (Brassine.)

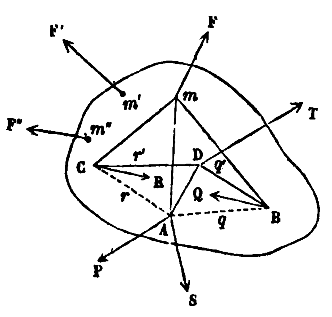
X. *Théorème.* — Étant donnés dans l'espace n points 1, 2, 3,..., n, on les joint deux à deux dans l'ordre des numéros, de manière à former un polygone *ouvert*, plan ou gauche. Sur chaque côté ou sur son prolongement on prend un point, que l'on désigne par l'ensemble des numéros des points par où passe la droite sur laquelle il est pris : joignant ces points aux premiers, on forme une deuxième série de droites. Celles de ces droites qui passent par les points dont les indices réunis contiennent les trois mêmes numéros, se rencontrent en de nouveaux points, dont chacun peut être désigné par *trois* numéros. Joignant ces points aux précédents, on forme une troisième série de droites. Celles de ces droites qui passent par des points dont les indices réunis contiennent les quatre ou les cinq mêmes numéros, se rencontrent en de nouveaux points; etc. (Coriolis.)

CHAPITRE XVI.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DE FORCES QUELCONQUES.

273. Théorème I. — *Tant de forces que l'on voudra*, F, F', F'',..., *appliquées à un corps solide* M, *peuvent toujours se réduire à deux forces* S, T, *dont l'une passe par un point* A, *pris arbitrairement dans le corps.*

Indépendamment du point A, prenons deux points B, C dans l'intérieur du corps, et joignons A, B, C aux points d'application de toutes les forces données. Soit, pour fixer les idées, m le point d'application de la force F. Nous pouvons toujours décomposer F en trois forces dirigées suivant mA, mB, MC (145). Si nous opérons de même pour F', F'',..., nous obtiendrons trois groupes de forces concourantes; et, sans rien changer à l'état du corps, nous pourrons remplacer ces trois groupes par trois *résultantes partielles* P, Q, R, respectivement appliquées en A, B, C (*). Ainsi déjà, *toutes les forces données peuvent être réduites à trois forces passant par trois points pris arbitrairement dans le corps.*



Pour opérer une nouvelle réduction, imaginons l'intersection AD des plans ABQ, ACR; ou, si ces plans se confondent, menons la droite AD de manière qu'elle rencontre les directions des forces Q et R. Dans les deux cas, tirons les droites DB, DC. La force Q, située dans le plan ABD, peut être décomposée en deux forces

(*) S'il arrivait que les forces du premier groupe se fissent équilibre, on aurait à considérer seulement les forces qui concourent soit en B, soit en C; et ainsi de suite.

q, q', dirigées, l'une suivant BA, l'autre suivant BD. De même, la force R peut être remplacée par une force r dirigée suivant CA et par une force r' dirigée suivant CD.

Actuellement, les trois forces *concourantes* P, q, r ont, en général, une résultante unique S passant en A; les deux forces concourantes q', r' ont, pareillement, une résultante unique T passant en D. Ces deux forces S, T, dont la première est appliquée au point A pris arbitrairement dans le corps solide, peuvent donc tenir lieu de toutes les forces F, F', F'',.... C'est ce qu'il fallait démontrer.

274. Remarque. — *La somme des travaux élémentaires des forces* F, F', F'',... *est égale à la somme des travaux des deux résultantes* S, T.

En effet, 1° le travail élémentaire de la force F est égal à la somme de ses composantes suivant mA, mB, mC (167);

2°. Par suite, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces données est égale, soit à la somme des travaux élémentaires des trois résultantes P, Q, R, soit à la somme des travaux élémentaires des résultantes S, T.

275. Lemme. — *Pour que les forces* F, F', F'',... *se fassent équilibre, il faut et il suffit que les forces* S, T *soient égales et directement opposées.*

276. Théorème II. — *Pour que des forces* F, F', F'',..., *appliquées à un corps solide, se fassent équilibre, il faut et il suffit que la somme de leurs travaux élémentaires soit constamment nulle.*

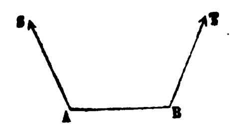
1°. *S'il y a équilibre* entre les forces données, les résultantes S, T sont égales et directement opposées (96); donc leurs travaux élémentaires sont égaux et de signes contraires; et, conséquemment, *la somme des travaux élémentaires des forces* F, F', F'',... *est nulle.*

2°. Si cette somme est nulle, les travaux élémentaires des résultantes S, T sont égaux et de signes contraires (274); d'où il résulte que ces deux forces sont égales et directement opposées.

Pour le faire voir, supposons que A, B soient leurs points d'application. Si l'on fait tourner le corps solide autour du point A, le travail de la force S sera constamment nul. Donc l'équation

$$\mathfrak{C}S + \mathfrak{C}T = 0$$

se réduit à $\mathfrak{T}T = o$. Par conséquent, *la direction de la force* T *est normale à l'élément décrit par le point* B (157), c'est-à-dire qu'elle passe par le centre A de la sphère sur laquelle est situé ce point : en d'autres termes, *la force* T *est dirigée suivant le prolongement de* AB. On en peut dire autant de la force S; donc *les résultantes* S, T *sont directement opposées.*



La somme de leurs travaux étant nulle, par hypothèse, il faut évidemment que ces forces soient égales. Ainsi, *lorsque la somme des travaux élémentaires des forces données est nulle, il y a équilibre.*

Le théorème est donc démontré.

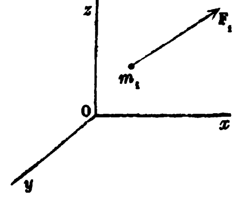
277. *Corollaire.* — La *condition générale de l'équilibre* d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide entièrement libre, est exprimée par l'équation

$$\Sigma \mathfrak{T}F = o.$$

Équations de l'équilibre.

278. La condition précédente, appliquée successivement à tous les petits déplacements que l'on peut imprimer au corps solide, conduirait à une *infinité d'équations* différentes (du moins en apparence), vérifiées si les forces proposées se font équilibre. Nous allons montrer que toutes ces équations sont comprises dans six équations principales, *nécessaires et suffisantes,* appelées, pour cette raison, *les six équations de l'équilibre.*

279. Soit F_1 l'une des forces qui agissent sur le corps solide; soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées rectangulaires de son point d'application m_1, et α, β_1, γ_1 les angles formés, avec les trois axes, par la direction m_1F_1.



Si nous imprimons au corps un petit *mouvement de translation,* parallèle à l'axe des x, le travail élémentaire de la force F_1 sera $\epsilon F_1 \cos\alpha_1$, ϵ représentant le chemin parcouru par chacun des points du corps. Les travaux des autres forces seront, semblablement,

$\varepsilon F_2 \cos\alpha_2$, $\varepsilon F_3 \cos\alpha_3, \ldots$; en sorte que *l'équation du travail* (277) deviendra $\varepsilon \Sigma F \cos\alpha = 0$,

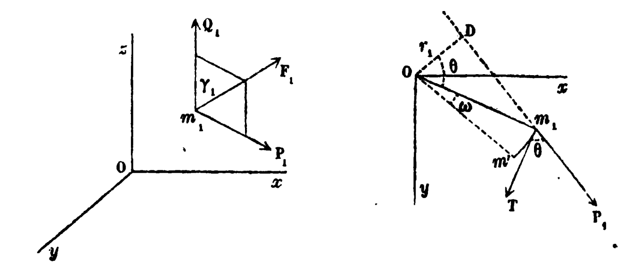
ou $$\Sigma F \cos\alpha = 0. \quad (1)$$

Des translations parallèles à l'axe des y ou à l'axe des z donnent, de la même manière,

$$\Sigma F \cos\beta = 0, \quad (2)$$
$$\Sigma F \cos\gamma = 0. \quad (3)$$

Ainsi, *quand il y a équilibre, les sommes des composantes des forces données, parallèles à trois axes rectangulaires quelconques, sont séparément nulles.*

280. Donnons maintenant au corps un *petit mouvement de rotation* autour de l'axe Ox; et, pour évaluer plus commodément le travail de la force F_1, décomposons cette force en deux autres : l'une, Q_1, parallèle à Ox, et l'autre, P_1, parallèle au plan des yz. La composante Q_1, normale au petit arc décrit par le point m_1, a un travail nul. Par conséquent, le travail de la force F_1 se réduit à celui de la composante P_1.



La seconde figure, qui représente une projection sur le plan des yz ou sur un plan parallèle, passant par le point m_1, montre que le travail élémentaire de P_1 a pour valeur $P_1 . m_1 m'_1 . \cos\theta$. Mais, ω étant l'angle de rotation, $m_1 m'_1 = O m_1 . \omega$. De plus, si nous appelons p_1 *la plus courte distance* OD *entre l'axe* Ox *et la direction de la force* F_1, $\cos\theta = \frac{p_1}{O m_1}$. Donc

$$\mathfrak{G} P_1 = \mathfrak{G} F_1 = P_1 p_1 \omega = F_1 p_1 \sin\alpha_1 . \omega.$$

forces parallèles, de *forces situées dans un plan*, de *forces parallèles à un plan*, *etc.* Elles donnent également les conditions de l'équilibre d'un corps solide qui, au lieu d'être entièrement libre, renferme *un point fixe* ou *un axe fixe* (*).

Cas où les forces ont une résultante unique.

283. Soit R cette résultante; soient a, b, c les coordonnées de son point d'application, et λ, μ, ν les angles formés, avec les axes, par sa direction. Si l'on joint, aux forces proposées, une force égale et contraire à R, il y aura équilibre. On aura donc, en conservant les notations précédentes :

$$-\mathrm{R}\cos\lambda+\mathrm{X}=0,\quad -\mathrm{R}\cos\mu+\mathrm{Y}=0,\quad -\mathrm{R}\cos\nu+\mathrm{Z}=0,$$
$$-\mathrm{R}(b\cos\nu-c\cos\mu)+\mathrm{L}=0,$$
$$-\mathrm{R}(c\cos\lambda-a\cos\nu)+\mathrm{M}=0,$$
$$-\mathrm{R}(a\cos\mu-b\cos\lambda)+\mathrm{N}=0.$$

Au moyen des trois premières équations, on transforme ainsi les dernières :

$$b\mathrm{Z}-c\mathrm{Y}+\mathrm{L}=0,\quad c\mathrm{X}-a\mathrm{Z}+\mathrm{M}=0,\quad a\mathrm{Y}-b\mathrm{Z}+\mathrm{N}=0.\quad (1).$$

284. Ces nouvelles équations, dans lesquelles a, b, c sont *les coordonnées d'un point quelconque de la droite* suivant laquelle agit la résultante, représentent les trois projections de cette ligne : puisqu'elles coexistent, les quantités L, M, N, X, Y, Z doivent satisfaire à l'*équation de condition*

$$\mathrm{LX}+\mathrm{MY}+\mathrm{NZ}=0,$$

que l'on obtient en ajoutant membre à membre les équations (1), après les avoir multipliées, respectivement, par a, b, c. Cette équation exprime la relation à laquelle doivent satisfaire les forces proposées, pour qu'elles aient une résultante unique.

(*) La recherche de ces conditions particulières constitue d'intéressants problèmes, sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

EXERCICES.

I. *Théorème.* — Lorsque des forces sont en équilibre dans l'espace, si l'on décompose chacune d'elles en deux autres, de manière que les premières composantes agissent dans un même plan, et que les secondes soient parallèles à une droite donnée : chacun de ces deux systèmes de composantes sera séparément en équilibre.

II. *Théorème.* — Si l'on projette sur un plan, des forces en équilibre dans l'espace, les projections représentent des forces qui se font équilibre.

III. *Théorème.* — Si l'on réduit un système quelconque de forces, d'une infinité de manières, à deux forces S, T, le tétraèdre construit avec les droites qui représentent ces deux résultantes, prises comme arêtes opposées, a un volume constant. (CHASLES.)

IV. *Théorème.* — Si l'on réduit un système de forces, d'abord à deux forces S, T, ensuite à deux autres forces S', T', les directions de ces quatre résultantes sont situées sur un hyperboloïde à une nappe. (CHASLES.)

V. *Théorème.* — Pour que quatre forces, P, Q, S, T, situées ou non situées dans un même plan, mais non appliquées en un même point, se fassent équilibre, il faut et il suffit :

1°. Que deux de ces forces, par exemple les forces P, Q, soient représentées, en grandeur et en direction, par les deux côtés opposés AB, CB d'un quadrilatère;

2°. Que les deux autres forces, S, T, soient représentées par des droites égales et parallèles aux deux autres côtés AD, BC du quadrilatère;

3°. Que les directions de ces deux dernières forces rencontrent les côtés BC, AD en des points E, F tels, que l'on ait

$$\frac{BE}{CE} = \frac{DF}{AF};$$

4°. Enfin, que les forces P, Q agissent en sens contraires, et qu'il en soit de même pour les forces S, T.

VI. *Théorème.* — La *fonction des forces*, désignée par

$$LX + MY + NZ,$$

représente le sextuple de la somme des tétraèdres ayant pour arêtes

opposées les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les forces données, ces droites étant prises deux à deux.

VII. Connaissant les moments L, M, N d'une force F, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, trouver le moment $\mathfrak{M}$ de cette force, par rapport à un axe OA.

Résultat : Si λ, μ, ν sont les angles formés par OA avec les axes primitifs,

$$\mathfrak{M} = L\cos\lambda + M\cos\mu + N\cos\nu.$$

CHAPITRE XVII.

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES.

Définition des machines.

285. On donne généralement le nom de *machine* à *tout système dans lequel les mouvements des diverses parties sont gênés par des obstacles :* une *locomotive* est une machine, parce que les *pistons*, les *balanciers*, les *bielles* qu'elle renferme, au lieu d'être *entièrement libres*, ne peuvent se mouvoir que d'une certaine manière.

286. Quand le système se réduit à *un seul corps solide*, gêné par *un seul obstacle*, il prend le nom de *machine simple*. Les *organes* ou les *éléments* d'une *machine composée* quelconque, sont toujours des machines simples.

287. On ne compte que trois machines simples : le *levier*, le *tour* et le plan *incliné*. Dans la première, l'obstacle est un *point fixe*, autour duquel le corps solide peut tourner dans tous les sens. Dans la deuxième, l'obstacle est un axe fixe, autour duquel le corps peut prendre un *mouvement de rotation*. Enfin, dans la troisième machine simple, l'obstacle est un *plan fixe*, sur lequel le corps peut *glisser* (*).

(*) Il y a cette différence entre les trois machines simples, que, dans les deux premières, le point fixe et l'axe fixe font habituellement partie du corps, tandis que, dans la troisième, le plan fixe est extérieur au

288. *Autre définition des machines.* — La définition précédente est celle que l'on doit donner quand on considère les machines d'une manière abstraite (*), sans avoir égard aux effets qu'elles peuvent produire. Ces effets, de natures très-diverses, peuvent être envisagés sous deux points de vue différents, correspondant aux deux divisions principales de la Mécanique. Quand on considère les mouvements des différentes parties d'une machine, sans se préoccuper des forces qui les produisent, on peut dire que *les machines sont des systèmes au moyen desquels on effectue des transformations de mouvements* (*B., Mécanique*, 35). Mais si l'on veut indiquer, tout à la fois, la nature et l'usage principal des machines, on peut adopter la définition suivante, à laquelle nous nous arrêterons :

Une machine est un système à liaison complète (**), *destiné à transmettre le travail de forces données.*

289. Ce nouvel énoncé nécessite quelques explications.

En premier lieu, rappelons un principe de Mécanique industrielle, donné dans le n° 152 : *Une force n'est utile, que si elle fait mouvoir le point d'application de la résistance qu'elle est destinée à vaincre.*

D'un autre côté, une machine quelconque, simple ou composée, est toujours formée de trois parties : 1° un organe, appelé *récepteur,* sur lequel agit la force donnée, ou la *puissance,* en produisant un *travail moteur* (158); 2° des pièces, nommées *organes de transmission de mouvement,* ou simplement *transmissions,* intermédiaires entre le récepteur et le point d'application de la *résistance* à vaincre; 3° enfin, l'*appareil opérateur* ou l'*outil,* qui agit sur ce point d'application, en sens contraire de la résistance, de manière que le travail de cette dernière force est un *travail résistant* (158). En outre, la liaison établie entre les deux organes ex-

---

corps. On conçoit, en effet, que si un corps solide renfermait un *plan fixe*, ou seulement *trois points fixes,* non en ligne droite, il ne pourrait prendre aucun mouvement.

(*) Cette définition était employée dans les anciens *Traités de Statique.*

(**) Par cette expression : *liaison complète,* on entend, conformément à la définition précédente, que *les diverses parties dont se compose la machine sont solidaires les unes des autres.*

trêmes, au moyen des *transmissions*, est complète, c'est-à-dire que si le *récepteur* a un certain mouvement, l'*outil* est *contraint* à se mouvoir d'une manière *déterminée*.

Dans le cas très-simple d'une *poulie fixe*, servant, par l'intermédiaire d'une corde AB, à soulever un seau B, le *récepteur* est l'extrémité A de la corde; le crochet servant à suspendre le seau est l'*outil*; enfin, les *organes de transmission de mouvement* sont la corde et la poulie. De plus, le travail de la force musculaire appliquée en A est *moteur*, tandis que le travail de la pesanteur, dans le mouvement ascendant du fardeau B, est *résistant*.

290. *Remarque*. — On doit toujours compter, comme forces motrices ou résistantes, les poids des diverses parties de la machine. Dans l'exemple précédent, la résistance à vaincre était précisément le poids de l'eau et du seau (*). Au contraire, dans les horloges, le *moteur* est un poids. Enfin, pour régulariser le jeu de la machine, on emploie fréquemment des pièces très-lourdes, appelées *volants*.

Du mouvement uniforme des machines.

291. Quand une machine part de l'état de repos, les parties qui la composent se meuvent d'abord avec lenteur, puis de plus en plus rapidement, et la vitesse de chacune atteint bientôt un certain maximum qu'elle ne peut dépasser, parce que les forces motrices dont on dispose sont nécessairement *finies* (**). Arrivé à cet état régulier, l'appareil peut être considéré, à un instant quelconque, comme un système de corps qui se mouvraient en vertu seulement de leur inertie. *Les forces appliquées à la machine se font* donc *équilibre* (90); et, par conséquent, *la somme de leurs travaux est constamment nulle* (277).

292. Ces forces peuvent être réparties en trois groupes : 1° les *puissances* ou *forces motrices*; 2° les *résistances extérieures* ou *résistances principales*; 3° les *résistances intérieures* ou *résistances passives*.

Nous avons parlé déjà des forces motrices et des résistances prin-

(*) En négligeant, bien entendu, le frottement de l'*axe* contre la *chape*.

(**) Cette proposition est une conséquence du *principe des forces vives*.

cipales (289). Quant aux résistances passives, elles sont ordinairement de quatre espèces : 1° la *roideur des cordes ;* 2° les *frottements ;* 3° les *chocs qui déforment les pièces* ou *ébranlent le sol ;* 4° la *résistance des milieux* dans lesquels fonctionne la machine.

293. *Remarque.* — Ces résistances passives, qui peuvent, dans certains cas, se réduire au frottement des pièces les unes sur les autres, naissent aussitôt que la machine commence à se mouvoir, et persistent pendant toute la durée du mouvement. Si donc on peut se représenter une machine à laquelle ne seraient appliquées, après la *mise en train,* ni forces motrices, ni résistances principales, on ne doit jamais faire abstraction des résistances passives, sous peine d'arriver à des conclusions très-éloignées de la vérité. C'est pour avoir ignoré cet axiome de la théorie des machines : *il n'y a pas de mouvement sans frottement,* que bien des personnes ont perdu leur temps à chercher le *mouvement perpétuel.*

Principe de la transmission du travail.

294. Une force motrice tend à accélérer la vitesse de son point d'application ; le travail de cette force est donc positif (158). Au contraire, les résistances, soit extérieures, soit passives, produisent des travaux négatifs. D'après cela, si l'on représente par T_m la somme des travaux des forces motrices appliquées à une machine, par $-T_r$ et $-T_p$ les sommes des travaux dus aux résistances principales et aux résistances passives, on aura, pour toute la durée du mouvement uniforme de la machine, ou pour une partie quelconque de ce temps :

$$T_m - T_r - T_p = 0. \quad (1)$$

En effet, cette équation exprime qu'il y a équilibre entre toutes les forces appliquées à la machine (277).

295. Le mouvement de la machine étant uniforme, la pression exercée, de dedans en dehors, en un point quelconque de l'*outil,* est égale et contraire à la résistance qu'éprouve ce point de la part du corps sur lequel agit la machine. Il résulte de là que le *travail résistant principal* $-T_r$, est égal et de signe contraire au travail produit par l'outil : ce dernier, que l'on appelle *travail utile*, est donc exprimé par T_r. Or, l'équation (1) équivaut à

$$T_r = T_m - T_p. \quad (2)$$

Ainsi, *dans toute machine à l'état de mouvement uniforme, le travail utile est égal au travail moteur, diminué du travail dû aux résistances passives.*

296. S'il était possible de supprimer complétement ces dernières résistances, le travail utile serait égal au travail moteur, en sorte que la machine transmettrait intégralement, à l'outil, le travail des forces appliquées au récepteur; mais, comme ces résistances existent par cela seul que la machine agit (293), on a nécessairement :

$$T_r < T_m. \quad (3)$$

Ainsi, *le travail utile est toujours moindre que le travail moteur.*

Impossibilité du mouvement perpétuel.

297. Dans le cas où l'outil ne rencontrerait aucune résistance, et où, conséquemment, *la machine ne produirait aucun effet utile,* l'équation (1) donnerait

$$T_m = T_p. \quad (4)$$

Ainsi, *pour entretenir le mouvement d'une pareille machine, on devrait lui appliquer un moteur capable de faire équilibre, à chaque instant, aux résistances passives.* Il n'est donc pas possible d'imaginer un appareil dont le mouvement soit continu, et qui n'exige pas, de temps à autre, l'action d'une force motrice extérieure. En d'autres termes, ainsi que le faisait pressentir la remarque du n° 293, *il ne peut y avoir de mouvement perpétuel.*

298. *Remarque.* — Les corps célestes semblent échapper à cette loi : c'est peut-être parce qu'ils se meuvent dans des espaces dépourvus de matière pondérable. En effet, la présence d'un milieu résistant suffirait pour accélérer peu à peu la vitesse d'une planète et pour diminuer les dimensions de son orbite; en sorte que, dans la suite des siècles, la planète finirait par se précipiter sur le soleil.

299. Si le mouvement perpétuel n'est pas réalisable, à plus forte raison est-il *impossible,* au moyen d'une machine, *de multiplier le travail moteur.* Dire qu'*une machine produit de la force,* c'est proférer un non-sens.

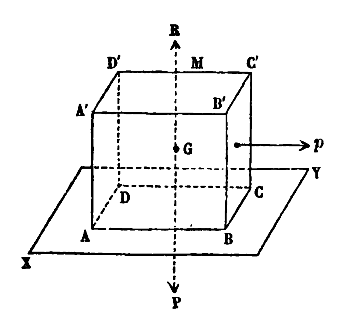
Rendement d'une machine.

300. L'inégalité (3) revient à $\frac{T_r}{T_m} < 1$: *le rapport du travail utile au travail moteur est toujours inférieur à l'unité.* A cause de $\frac{T_r}{T_m} = 1 - \frac{T_p}{T_m}$, il est clair que, moins il y aura de résistances passives, plus ce rapport $\frac{T_r}{T_m}$, appelé *rendement* de la machine, s'approchera de l'unité. Dans les meilleures machines, le rendement est à peu près égal à $\frac{3}{4}$.

Du frottement.

301. On désigne, en général, sous le nom de *frottement, la résistance au glissement ou au roulement d'un corps sur un autre corps.*

Pour expliquer cette définition, considérons le cas, purement hypothétique, d'un parallélipipède rectangle M reposant, par une face ABCD parfaitement plane, sur un plan XY inébranlable et horizontal. Puisque le corps est en repos, il y a équilibre entre son poids P et la *réaction* R exercée par le plan XY (96) : *cette force* R *est* donc verticale, c'est-à-dire *normale à la surface de contact* ABCD.



Il semblerait, d'après cela, que si l'on applique, perpendiculairement à la face verticale BB'CC', une *traction p, aussi petite qu'on le voudra,* le parallélipipède se mouvra sur le plan fixe, dans le sens de la force p : en effet, les forces R et P se faisant équilibre, le solide M peut être assimilé à un corps privé de pesanteur et *entièrement libre.*

Dans la réalité, les choses ne se passent pas de cette manière : quel que soit le degré de *poli* du plan fixe et de la *face d'appui* ABCD, le parallélipipède reste en repos tant que p n'atteint pas un certain minimum. Il y a plus : *pour entretenir la vitesse* ac-

quise par le corps, on doit faire agir constamment la force p, avec l'intensité qu'elle avait quand le mouvement a commencé, ou avec une intensité un peu moindre. Ce résultat serait contraire aux principes fondamentaux de la Mécanique (83, 98, etc.), si l'on pouvait admettre que les surfaces des deux corps en contact sont *continues*, comme les surfaces idéales que l'on considère dans la Géométrie. On doit donc tirer, de l'expérience précédente, les conclusions suivantes :

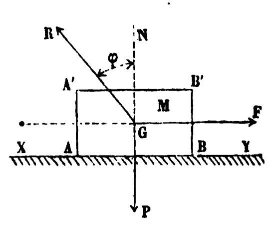
1°. *La surface d'un corps quelconque est toujours hérissée d'aspérités ;*

2°. *Quand deux corps sont en contact, suivant une certaine surface, les aspérités de l'un s'engagent entre les aspérités de l'autre ;*

3°. *Pour faire glisser ou rouler le premier corps sur le second, il est nécessaire d'employer une certaine force, destinée à vaincre la résistance que ces aspérités opposent au mouvement.*

302. Le *frottement* est dit *de première* ou *de seconde espèce*, selon que les deux corps *glissent* ou *roulent* l'un sur l'autre. On doit prévoir que *le frottement de roulement est bien moins considérable que le frottement de glissement*. Aussi, quand on veut donner une grande mobilité à l'axe d'une roue, au lieu de l'engager dans deux tourillons, on fait simplement reposer chacune de ses extrémités sur les circonférences de deux roues. Cette disposition est adoptée dans la machine d'Atwood.

303. Reprenons l'expérience ci-dessus, et supposons que, pour conserver au corps M la vitesse qu'il avait à un certain moment, on soit obligé de lui appliquer une *force constante* F, dont la direction passe par le centre de gravité G. Le mouvement étant uniforme, il doit y avoir équilibre entre le poids P, la force de *traction* F et la réaction du plan : *cette dernière force*, égale et directement opposée à la résultante des deux autres, *est* donc *située dans le plan vertical* PGF ; et, au lieu d'être dirigée normalement à la surface de contact AB, *elle fait, avec la verticale* GN, *du côté opposé à la force de traction, un angle aigu* NGR.



Si nous décomposons la réaction R en deux forces, l'une dirigée suivant GN, l'autre dirigée suivant le prolongement de GF, ces deux forces seront égales, respectivement, à P et à F; donc

$$R\cos\varphi = P, \quad (1)$$
$$R\sin\varphi = F. \quad (2)$$

Ces équations donnent

$$\tang\varphi = \frac{F}{P}.$$

Ainsi, l'angle φ est d'autant plus grand que la force F, nécessaire pour vaincre la résistance au glissement, est plus considérable : pour cette raison, φ est appelé *angle de frottement*. Quant au frottement lui-même, il est égal à la composante $R\sin\varphi$; car le mouvement du corps M étant uniforme, il y a équilibre entre la force F et la résistance au glissement; et cette résistance est précisément le frottement (301).

Expériences de Coulomb (*).

304. Pour découvrir les lois du *frottement de première espèce*, Coulomb s'est servi d'un appareil dont voici la description sommaire :

Sur une table T, solidement établie, étaient placées deux pièces de bois de chêne AB (**) portant un madrier *ab*, également en chêne, dont la surface avait été dressée avec soin. Un *traîneau* CD, pouvant recevoir des poids, portait, à sa partie inférieure, soit deux petits *liteaux cd*, soit des règles de différentes largeurs, formées d'une des substances à essayer. Le madrier pouvait également recevoir des règles ou *rails* d'une autre matière. Une corde CE, passant sur une poulie de renvoi, était attachée au traîneau, et se terminait par un plateau F, sur lequel on pouvait placer des poids.

Le traîneau ayant été amené vers l'extrémité A du madrier, au moyen du petit *treuil* G, on le chargeait; on chargeait également le plateau; et, pour déterminer le mouvement, on frappait légèrement le traîneau, ou on le pressait au moyen d'un petit

---

(*) Mémoires de l'Académie des Sciences, *Savants étrangers*, 1785.

(**) Sur la figure, qui est une projection verticale, on n'en voit qu'u

II. *Le frottement pendant le mouvement est :*

1° *Proportionnel à la pression ;*

2° *Indépendant de l'étendue des surfaces en contact ;*

3° *Indépendant de la vitesse.*

III. *Le frottement au départ est plus grand que le frottement pendant le mouvement* (*).

308. Le rapport $\frac{F}{P}$ est constant pour deux mêmes surfaces frottantes ; il varie quand on en modifie la composition : on peut donc désigner ce rapport $\frac{F}{P} = \operatorname{tang}\varphi = f$ sous le nom de *coefficient de frottement*. En voici la valeur dans quelques cas :

(*) Nous compléterons cet énoncé par quelques citations :

1°. Le frottement des bois glissant à sec sur les bois oppose, après un temps suffisant de repos, une résistance proportionnelle aux pressions ; cette résistance augmente sensiblement dans les premiers instants du repos ; mais après quelques minutes elle parvient ordinairement à son maximum ou à sa limite.

2°. Lorsque les bois glissent à sec sur les bois, le frottement est encore proportionnel aux pressions, mais son intensité est beaucoup moindre que celle que l'on éprouve en détachant les surfaces après quelques minutes de repos....

3°. Le frottement des métaux glissant sur les métaux sans enduit est également proportionnel aux pressions ; mais son intensité est la même, soit qu'on veuille détacher les surfaces après un temps quelconque de repos, soit qu'on veuille entretenir une vitesse quelconque.

4°. Les surfaces hétérogènes, telles que les bois et les métaux, glissant l'une sur l'autre sans enduit, donnent pour leur frottement des résultats très-différents de ceux qui précèdent, car l'intensité de leur frottement, relativement au temps de repos, croît lentement, et ne parvient à sa limite qu'après quatre ou cinq jours, et quelquefois davantage.... Ce n'est pas encore tout.... Le frottement croît très-sensiblement à mesure que l'on augmente les vitesses.... Le frottement croît à peu près suivant une progression arithmétique, lorsque les vitesses croissent suivant une progression géométrique. (Mémoire de Coulomb.

SURFACES FROTTANTES.	ÉTAT DES SURFACES	COEFFICIENT DE FROTTEMENT au départ.	COEFFICIENT DE FROTTEMENT pendant le mouvement.
Chêne sur chêne	Sans enduit. — Fibres parallèles	0,62	0,48
	Frottées de savon sec.	0,44	0,16
Fer sur chêne	Sans enduit	0,62	0,62
	Mouillées d'eau	0,65	0,26
Fer sur fonte	Sans enduit	0,19	0,18
Cuir sur fonte (piston).	Mouillées d'eau	0,62	0,15
Calcaire tendre sur calcaire tendre	Sans enduit	0,74	0,64

CHAPITRE XVIII.

ÉQUILIBRE ET TRAVAIL DES FORCES APPLIQUÉES AU LEVIER.

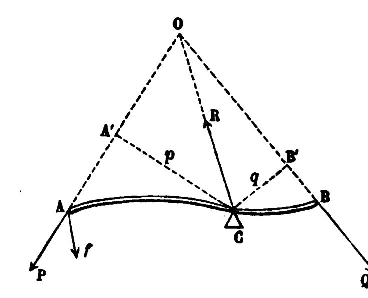
309. Considéré dans toute sa généralité, *le levier est un corps solide, mobile autour d'un point fixe.* Dans la pratique, on donne spécialement le nom de levier à *une barre rigide, droite ou coudée, reposant sur un point fixe.* Les pédales des pianos ou des roues d'émouleurs, les barres de fer employées par les paveurs, etc., sont des leviers par l'intermédiaire desquels une *puissance* et une *résistance* se font équilibre, du moins quand ces machines sont à l'état de mouvement uniforme.

310. Quand le point fixe est situé entre les points d'application des deux forces, le levier est dit du *premier genre.* Il est du *deuxième genre* si le point d'application de la résistance tombe entre le point fixe et le point d'application de la puissance. Enfin, dans le levier du *troisième genre,* le point d'application de la puissance est situé entre l'autre point d'application et le point fixe. La b

lance ordinaire et la balance romaine sont des leviers du premier genre; les leviers des tailleurs de pierre appartiennent au deuxième genre; les pédales peuvent être considérées comme des leviers du troisième genre.

311. Quelle que soit l'espèce du levier BAC, *il faut*, pour l'équilibre, *que la puissance* P *et la résistance* Q *aient une résultante égale et directement opposée à la réaction* R *du point fixe* A : car ces trois forces sont les seules qui soient appliquées à la machine (*). *La puissance et la résistance doivent donc être situées dans un même plan passant par le point fixe.*

Cette condition n'est pas suffisante : il faut encore que la somme des travaux des forces P, Q, R soit constamment nulle. La réaction R, passant par le point fixe, a un travail nul; d'un autre côté, si le levier tourne d'un petit angle ω, dans le sens indiqué par la flèche f, les travaux des forces P, Q seront sensiblement $Pp\omega$ et $Qq\omega$, p et q représentant les distances du point fixe aux directions des deux forces, ou les *bras de levier* de ces forces.



La seconde condition de l'équilibre est donc

$$Pp\omega - Qq\omega = 0,$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}.$$

Ainsi, *la puissance et la résistance sont en raison inverse de leurs bras de levier.*

312. *Remarques.* — I. Cette condition aurait pu être obtenue indépendamment de la théorie du travail. En effet, les forces P, Q ayant une résultante passant par le point d'appui A, *les distances de ce point aux deux composantes sont en raison inverse de ces composantes* (143, 2°).

(*) On néglige, pour plus de simplicité, le poids du levier.

II. Dans le levier du deuxième genre, supposé rectiligne pour plus de simplicité, le bras de levier de la puissance est plus grand que celui de la résistance. Donc, à cause de $\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$, *la puissance est moindre que la résistance*. Le contraire a lieu dans le levier du troisième genre.

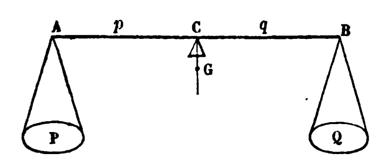
313. Si le levier est sollicité par un nombre quelconque de forces, F, F′, F″,..., *il faut et il suffit*, pour l'équilibre, *que toutes ces forces aient une résultante unique, dont la direction passe par le point fixe.*

314. *Remarques.* — I. On doit comprendre, parmi les forces données, le poids du levier.

II. Si le levier, comme on le suppose souvent, ne fait que *reposer sur une surface fixe*, la condition précédente ne suffit plus : il faut, en outre, que la résultante des forces données soit normale à la surface, au point de contact, et qu'elle presse le levier contre la surface.

De la balance.

315. La *balance* est un levier du premier genre, aux extrémités duquel sont appliqués deux poids P, Q (*). D'après les usages auxquels la balance est destinée, ces poids doivent être égaux quand l'équilibre est établi, c'est-à-dire *quand le fléau* AB *reste horizontal.*



En représentant par R le poids de la balance, par r la distance de son centre de gravité G à la verticale passant par le point d'appui, etc., nous aurons, pour l'équation de l'équilibre (280):

$$P(p-q)+Rr=0.$$

Cette équation, qui doit subsister pour toutes les valeurs de P (**),

(*) Nous ne donnons pas la description complète de la balance: ces détails appartiennent à la Physique.

(**) Du moins entre certaines limites.

se décompose en

$$p = q, \quad r = o.$$

Donc, *pour que la balance soit* JUSTE, *il faut :* 1° *que les deux bras du fléau soient égaux ;* 2° *que le centre de gravité de la balance soit sur la verticale passant par le point d'appui.*

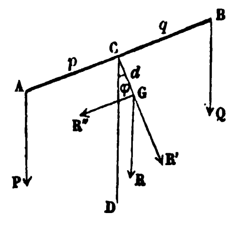
316. *Remarque.* — Quand la balance est *fausse*, on peut déterminer le poids P d'un corps, soit par la *méthode des doubles pesées*, due à *Borda*, soit en prenant la *moyenne proportionnelle* entre les poids a, b obtenus en plaçant le corps successivement dans les deux plateaux. En effet, de

$$Xp = aq,$$
$$Xq = bq,$$

on conclut,

$$X = \sqrt{ab} \ (*).$$

317. *Stabilité et sensibilité de la balance.* Il ne suffit pas qu'une balance soit *juste*, il faut encore qu'elle soit *stable*, c'est-à-dire qu'elle tende à revenir à sa position d'équilibre, quand elle en a été tant soit peu écartée. Il faut, en outre, qu'elle soit *sensible*, ou qu'une légère différence entre les poids P, Q soit manifestée par un défaut d'horizontalité du fléau. La première condition est vérifiée quand *le centre de gravité* G *de l'appareil est au-dessous du point d'appui* C. En effet, le poids R est décomposable en deux forces R′, R″ dirigées suivant le prolongement de CG et suivant la perpendiculaire à cette ligne. La première composante est détruite par le point fixe ; l'autre tend à ramener le fléau dans la position horizontale : la balance devient alors un pendule composé.



On voit, avec la même facilité, que si le centre de gravité coïncide avec le point d'appui, la balance reste en équilibre dans toutes ses positions ; et que, si le premier point est *au-dessus* du second, l'appareil tend à se renverser dès qu'il est écarté de sa position

(*) Cette formule, qui serait évidemment peu commode dans la pratique, suppose $r = o$.

d'équilibre. Dans le premier cas, la balance est dite *indifférente;* dans le second, on dit qu'elle est *folle.*

318. *Mesure de la sensibilité.* — Soient : d la distance CG, ϖ le poids additionnel placé dans le plateau A, φ l'angle du fléau avec l'horizon. Nous aurons, en conservant les notations précédentes,

$$(P+\varpi)p\cos\varphi = Qq\cos\varphi + Rd\sin\varphi.$$

Mais, par hypothèse, $P=Q$, $p=q$; donc l'équation se réduit

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{p}{d}\cdot\frac{\varpi}{R}.$$

Ainsi : 1° pour une même balance, *la tangente de l'angle φ es proportionnelle au poids additionnel ϖ*; 2° toutes choses égales d'ailleurs, *cette tangente varie en raison inverse de la distance d.*

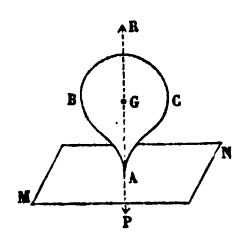
319. En résumé, *pour qu'une balance soit sensible, il faut que le centre de gravité soit au-dessous du point d'appui, et très-près de ce point* (*).

CHAPITRE XIX.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN CORPS REPOSANT SUR UN PLAN.

Conditions d'équilibre d'un corps reposant sur un plan.

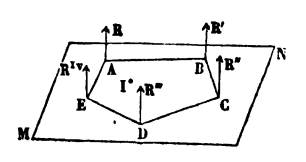
320. Soit d'abord le cas très-simple d'un corps ABC, s'appuyant, par un seul point A, sur un plan *horizontal* MN. Ainsi qu'on l'a vu plusieurs fois, la résistance du plan est représentée par une force R, normale au plan, c'est-à-dire verticale, appliquée au point d'appui A, et dirigée en sens contraire de la pesanteur. Si le corps est sollicité seulement par son poids P, il faudra, pour l'équilibre, que les forces R, P soient



(*) Il résulte encore, de la formule ci-dessus, qu'*une balance très-lourde ne peut être sensible*, du moins en général.

égales et directement opposées. Donc *la verticale abaissée du centre de gravité* G *doit passer par le point d'appui* A (*).

321. Si le corps, toujours supposé sollicité seulement par son poids P, présente divers points d'appui A, B, C, D, E, *il faudra, pour l'équilibre, que la verticale passant par le centre de gravité* G *rencontre le plan* MN *en un point* I *intérieur au polygone convexe déterminé par les points d'appui* (**).



En effet, les résistances opposées par le plan fixe, aux points d'appui A, B, C,..., sont des forces verticales r, r', r'', dirigées de bas en haut, et dont la résultante R est appliquée en un point I, intérieur au polygone convexe ABC.... Cette force R est directement opposée au poids P ; donc, etc.

322. Enfin, supposons qu'*un corps sollicité par des forces quelconques* F, F', F'',... (***) *s'appuie sur un plan fixe, par divers points* A, B, C,.... En répétant la démonstration précédente, nous arriverions à cette conclusion générale : *Il faut, pour l'équilibre, que les forces proposées aient une résultante unique, tendant à presser le corps contre le plan, et dont la direction, normale au plan, le rencontre en un point intérieur au polygone déterminé par les points d'appui* (****).

323. *Pressions exercées sur les points d'appui.* — Reprenons

(*) Si le corps, comme on l'a supposé sur la figure, se termine par une pointe, l'équilibre est nécessairement *instable*. Au contraire, l'équilibre est *stable* quand le corps a une forme aplatie, et que la distance entre le centre de gravité et le point d'appui est très-petite. Ces résultats, sur lesquels nous ne pouvons insister, sont d'accord avec ce qu'on a vu à propos des diverses espèces de balances.

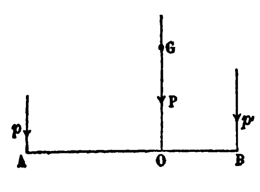
(**) Quelle que soit la disposition des points d'appui, il est toujours possible de former un polygone convexe ayant pour sommets plusieurs de ces points, et qui contienne tous les autres dans son intérieur.

(***) Parmi ces forces, on doit toujours comprendre le poids P du corps.

(****) Les conditions trouvées ci-dessus sont nécessairement comprises dans les six équations de l'équilibre. Nous engageons le lecteur à essayer cette déduction.

le cas d'un corps sollicité seulement par son poids P, reposant sur un plan horizontal; et supposons que le nombre des points d'appui soit successivement un, deux, trois,....

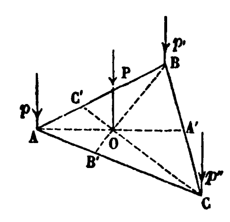
1°. Lorsque le corps repose sur le plan par un seul point, la pression exercée en ce point est évidemment le poids P.



2°. Si le corps présente deux points d'appui A, B, les pressions p, p' exercées en ces deux points, égales et contraires aux résistances r, r', ont pour résultante P (321). Donc, O étant le point où la droite AB est rencontrée par la verticale abaissée du centre de gravité G (226),

$$p = \mathrm{P}\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}, \quad p' = \mathrm{P}\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}.$$

3°. Lorsqu'il y a trois points d'appui A, B, C, non en ligne droite, la direction du poids P rencontre le plan fixe en un point O situé dans l'intérieur du triangle ABC, et les pressions p, p', p'' sont encore déterminées.



En effet, si l'on mène la droite AOA', on pourra regarder P comme la résultante de la pression p qui agit en A, et d'une pression égale à $p'+p''$, agissant en A'. Cette dernière force est elle-même la résultante des pressions p', p'' qui s'exercent en B, C. Par suite

$$\frac{p}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{AA'}}, \quad \frac{p'}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{BB'}}, \quad \frac{p''}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{CC'}}.$$

Mais, évidemment,

$$\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\mathrm{BOC}}{\mathrm{BAC}}, \quad \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{ABC}}, \quad \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{CC'}} = \frac{\mathrm{AOB}}{\mathrm{ABC}};$$

donc

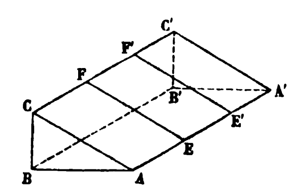
$$\frac{p}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{BOC}}{\mathrm{BAC}}, \quad \frac{p'}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{ABC}}, \quad \frac{p''}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{AOB}}{\mathrm{ACB}}.$$

Ainsi, *les pressions exercées en* A, B, C *sont proportionnelles aux aires des triangles* BOC, COA, AOB.

324. Quand le nombre n des points d'appui A, B, C, D,... surpasse *trois*, les valeurs des pressions exercées en ces points deviennent *indéterminées*; car le poids P peut, *d'une infinité de manières*, être décomposé en forces appliquées aux points A, B, C, D,... (*). Ce résultat paradoxal tient à ce que, contrairement à la réalité, nous avons supposé les corps parfaitement rigides : si l'on avait égard aux *actions moléculaires*, on trouverait que les pressions sont parfaitement déterminées.

Du plan incliné.

325. Soit un prisme droit ABCA'B'C' ayant pour base un triangle rectangle ABC. Si ce prisme repose, par sa face ABB'A', sur un plan horizontal, la face BCB'C' sera verticale, et la troisième face ACA'C' formera ce qu'on appelle un *plan incliné* (**).



Les droites AB, BC, AC sont, respectivement, la *base*, la *hauteur* et la *longueur* du plan incliné; cette dernière droite, perpendiculaire à la *trace horizontale* AA', est la *ligne de plus grande pente* du plan. Il en est de même pour toutes les droites EF, E'F', parallèles à CA.

326. *Équilibre d'un corps reposant sur un plan incliné.* — Considérons un corps M retenu en équilibre sur un plan incliné ABC, ou animé d'une vitesse constante, dirigée parallèlement à la ligne

---

(*) Cette proposition, qui paraît assez évidente, résulte aussi de la considération des équations

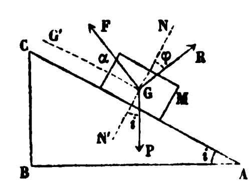
$$p + p' + p'' + \ldots = P,$$
$$px + p'x' + p''x'' + \ldots = Px_1,$$
$$py + p'y' + p''y'' + \ldots = Py_1,$$

données par la théorie des moments. Relativement aux limites entre lesquelles il est permis de faire varier les inconnues $p, p', p'', \ldots$, le lecteur pourra consulter la *Statique* de M. Gerono, remarquable ouvrage, auquel nous avons fait de nombreux emprunts.

(**) C'est-à-dire incliné à l'horizon.

de plus grande pente; et cherchons les relations qui existent entre la *puissance* F, le poids P et la réaction R du plan.

Que le corps soit en repos ou qu'il ait un mouvement uniforme, les trois forces F, P, R devront se faire équilibre; ce qui exige qu'elles soient dans un même plan. Or, la réaction R est située dans le plan normal passant par la direction de la vitesse (303), c'est-à-dire *dans le plan vertical passant par la ligne de plus grande pente;* le poids P est évidemment situé dans ce même plan; donc, *pour l'équilibre, la direction de la puissance* F *doit être située dans le plan vertical passant par la ligne de plus grande pente du plan incliné* (*). Pour plus de simplicité, on peut supposer cette force F appliquée au centre de gravité G.



Cela posé, désignons par *i l'inclinaison du plan,* et par *α l'angle de la puissance avec la ligne de plus grande pente.* Si le mouvement est *ascendant* (**), nous aurons

$$\frac{F}{\sin(P, R)} = \frac{P}{\sin(F, R)} = \frac{R}{\sin(F, P)},$$

ou
$$\frac{F}{\sin(i+\varphi)} = \frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi-\alpha\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+i\right)};$$

ou enfin
$$\frac{F}{\sin(i+\varphi)} = \frac{P}{\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{R}{\cos(\alpha+i)}.$$

327. *Remarques.* — I. *L'équilibre sur le plan incliné* est un cas particulier de *l'équilibre d'un corps reposant sur un plan.*

II. Pour faire monter le poids P le long du plan incliné, on doit

(*) Si le mouvement, toujours supposé rectiligne et uniforme, n'avait plus lieu parallèlement à la ligne de plus grande pente, *la puissance* F *devrait être dirigée dans le plan vertical parallèle à la direction du mouvement.*

(**) Dans le cas où le corps descendrait le long du plan incliné, il suffirait de changer φ en $-\varphi$ dans les relations suivantes.

y appliquer une force F, égale à $P \frac{\sin(i+\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)}$. Cette force atteint son minimum lorsque $\cos(\alpha-\varphi)=1$, auquel cas $\alpha=\varphi$. Ainsi, *la puissance* F, *capable de faire monter uniformément un corps le long d'un plan incliné, est la plus petite possible lorsqu'elle fait, avec le plan, un angle égal à l'angle de frottement.*

328. Supposons que le corps solide, en repos ou animé d'une vitesse constante, ne soit sollicité par aucune puissance. Les forces P, R, devant se faire équilibre, seront égales et directement opposées; par conséquent, les angles NGR, N′GP, opposés au sommet, et formés par des lignes droites, sont égaux; et comme $N'GP = i$, on aura $NGR = i$. Donc,

Pour qu'un corps, sollicité seulement par son poids, descende uniformément le long d'un plan incliné, parallèlement à la ligne de plus grande pente, il faut et il suffit que l'inclinaison du plan soit égale à l'angle de frottement.

329. Si l'on fait abstraction du frottement, c'est-à-dire si l'on suppose $\varphi = 0$, les relations (3) se réduisent à

$$\frac{F}{\sin i} = \frac{R}{\cos(i+\alpha)} = \frac{P}{\cos\alpha}. \quad (4)$$

On a donc, dans ce cas,

$$F = P\frac{\sin i}{\cos\alpha}. \quad (5)$$

Ainsi :

1°. *La force* F, *nécessaire pour faire mouvoir uniformément le poids* P *sur un plan incliné, est proportionnelle au sinus de l'inclinaison du plan, et inversement proportionnelle au cosinus de l'angle formé par la direction de* F *avec la ligne de plus grande pente du plan.*

2°. *La force* F *est la plus petite possible quand elle agit parallèlement à la ligne de plus grande pente.*

330. Remarquons à présent que le triangle rectangle ABC donne

$$\sin i = \frac{BC}{AC};$$

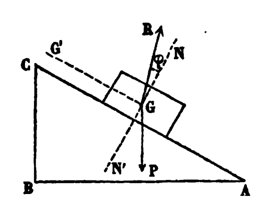
par conséquent, en supposant $\alpha = 0$,

$$\frac{F}{P} = \frac{BC}{AC}.$$

Ce résultat s'énonce ainsi :

Quand un poids P, *sollicité par une force* F *parallèle à la ligne de plus grande pente d'un plan, se meut uniformément le long du plan, supposé d'un poli parfait, la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan est à la longueur.*

331. *Mouvement varié d'un corps sur un plan incliné.* — Pour nous borner au cas le plus intéressant, supposons que le corps ait été lancé, avec une vitesse initiale a, dans une direction parallèle à AC : il s'élèvera le long du plan incliné, après quoi il redescendra (pourvu que le frottement ne soit pas trop considérable). Le mouvement complet du corps se compose donc d'un *mouvement ascendant,* suivi d'un *mouvement descendant.* Examinons ces deux phases du phénomène.



332. *Mouvement ascendant.* — La force X qui sollicite le corps est dirigée suivant le prolongement de GG'; elle est égale à la *somme* des composantes de P et de R, parallèles à CA; donc

$$X = P \sin i + R \sin \varphi. \quad (6)$$

D'un autre côté, comme il n'y a aucun mouvement dans le sens de la normale NN', les composantes parallèles à cette direction doivent se faire équilibre; en sorte que

$$P \cos i = R \cos \varphi. \quad (7)$$

L'élimination de R, entre les équations (6) et (7), donne

$$X = P \frac{\sin(i+\varphi)}{\cos \varphi}. \quad (8)$$

La force X étant *constante,* le corps a un mouvement *uniformément retardé,* dont les équations sont, en conservant les notations habituelles,

$$\left.\begin{aligned} w &= -g \frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}, \\ v &= a - g \frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi} t, \\ x &= at - \frac{1}{2} g \frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi} t^2. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

333. Le temps au bout duquel le mobile s'arrêtera, et l'espace e qu'il aura parcouru, sont donnés par les formules

$$t = \frac{a}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)}, \quad e = \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)}. \quad (10)$$

334. *Mouvement descendant.* — La force X_1 qui produit le mouvement est encore dirigée suivant le prolongement de GG'; mais elle est égale à la *différence* des composantes de P et de F, parce que la réaction R *a changé de sens*. Conséquemment

$$X_1 = P\sin i - R\sin\varphi \quad (^*),$$

ou, à cause de l'équation (7),

$$X_1 = P\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos\varphi}. \quad (11)$$

Par suite, les formules qui déterminent le mouvement *uniformément accéléré* du mobile sont

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= g\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos\varphi}, \\ v_1 &= g\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos\varphi}t_1, \\ x_1 &= \frac{1}{2}g\frac{\sin(i-\varphi)}{\sin\varphi}t_1^2. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

335. En comparant le mouvement descendant au mouvement ascendant, nous pouvons chercher *le temps t_1 qu'emploie le mobile pour revenir à sa position initiale.* Supposant $x_1 = e$ (333), nous obtenons

$$t_1 = \frac{a}{g}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin(i+\varphi)\sin(i-\varphi)}}. \quad (13)$$

Nous avons trouvé ci-dessus

$$t = \frac{a}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)};$$

(*) Les calculs suivants supposent la force X_1 positive. Si elle était négative, c'est-à-dire *si le frottement au départ,* représenté par $R\sin\varphi$, *l'emportait sur la composante* $P\sin i$ *du poids* P, *le corps ne redescendrait pas.* Cette circonstance se présente lorsque *l'angle de frottement sur-e l'inclinaison du plan.*

donc $t_1 > t$: *le corps descend plus lentement qu'il n'est monté.* On pouvait prévoir ce résultat; car, dans le mouvement ascendant, les deux forces $P \sin i$, $R \sin \varphi$ tendent à diminuer la vitesse; et, dans le mouvement descendant, l'accroissement de vitesse est dû à la différence de ces deux forces. Du reste, *quand le mobile revient au point de départ, la vitesse* V *qu'il possède est moindre que la vitesse initiale a.* En effet,

$$V = a\sqrt{\frac{\sin(i-\varphi)}{\sin(i+\varphi)}}.$$

336. *Equation du travail et des forces vives.* — La relation générale entre ces deux sortes de grandeurs, démontrée ci-dessus (174), peut aisément être vérifiée dans les divers cas dont nous venons de nous occuper : pour abréger, reprenons seulement les deux derniers.

1°. Si le corps s'élève le long du plan incliné, la demi-variation de sa force vive, au bout du temps t, est

$$\frac{1}{2}m(v^2 - a^2) = -\frac{1}{2}mgt\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}\left[2a - gt\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}\right].$$

D'un autre côté, le travail de la force X, qui est négatif, a pour valeur

$$\mathfrak{T}.X = -Xx = -mg\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}\left[at - \frac{1}{2}gt^2\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}\right];$$

donc
$$\frac{1}{2}m(v^2 - a^2) = \mathfrak{T}.X.$$

2°. Si le mobile, après avoir parcouru l'espace e en montant, est revenu au point de départ, il a perdu une quantité de force vive représentée par

$$m(a^2 - V^2) = ma^2\left[1 - \frac{\sin(i-\varphi)}{\sin(i+\varphi)}\right].$$

En même temps, le travail total des forces X, X_1, qui ont successivement sollicité le corps, est

$$(X_1 - X)e = \frac{P}{\cos\varphi}[\sin(i-\varphi) - \sin(i+\varphi)]\frac{1}{2}\frac{a^2}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)}$$
$$= \frac{1}{2}ma^2\left[\frac{\sin(i-\varphi)}{\sin(i+\varphi)} - 1\right],$$

donc
$$\frac{1}{2}m(V^2 - a^2) = \mathfrak{T}X_1 + \mathfrak{T}X.$$

337. *Portion du travail absorbée par le frottement.* — **Le travail résistant T, dû au frottement du mobile sur le plan incliné, a pour valeur absolue $Rx \sin\varphi$, x étant l'espace parcouru. Par suite, dans le cas du mouvement ascendant,**

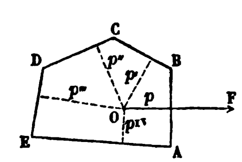
$$T = \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)} \cdot R\sin\varphi$$
$$= \frac{1}{4} ma^2 \frac{\sin\varphi\cos i}{\sin(i+\varphi)};$$

et, si le mobile revient à sa position initiale,

$$T = \frac{1}{4} ma^2 \frac{\sin\varphi\cos i}{\sin(i+\varphi)} + \frac{1}{2} ma^2 \frac{\sin\varphi\cos i}{\sin(i-\varphi)}$$
$$= \frac{1}{4} ma^2 \frac{\sin 2\varphi \cos 2i}{\sin(i+\varphi)\cos(i-\varphi)}.$$

Stabilité des corps pesants.

338. Supposons, comme dans le n° 321, qu'un corps pesant s'appuie sur un plan horizontal, par une base polygonale ABC.... Pour l'équilibre, il suffit que le point O, où la verticale passant par le centre de gravité du corps rencontre le plan, soit intérieur au *polygone d'appui*. Si les surfaces en contact ont un degré de poli suffisant, une force horizontale F, appliquée au corps, le fera simplement *glisser* sur le plan. Mais si les deux surfaces frottent l'un contre l'autre, ou plutôt si la base ABC... a légèrement pénétré dans la matière qui constitue le plan, les choses ne se passent plus de la même manière : la force F tend à *renverser* le corps. Admettons, en effet, pour plus de simplicité, que cette force F soit appliquée au centre de gravité du corps et qu'elle soit perpendiculaire à un côté du polygone d'appui, au côté AB, par exemple. D'après les hypothèses précédentes, le corps tournera autour de AB, et se renversera sur le plan, si la résultante du poids P et de la force F rencontre le plan en un point extérieur au polygone d'appui; ou, ce qui est équivalent, si le moment de F, par rapport à AB, l'emporte sur le moment de P. Représentant par h l'ordonnée verti-

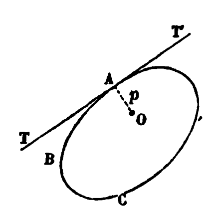


cale du centre de gravité, et par p la distance du point O à l'arête AB, nous aurons, pour valeurs de ces deux moments, Fh et Pp. La condition exprimant la *stabilité de l'équilibre* est donc

$$Pp > Fh. \quad (1)$$

339. *Remarques.* — I. Le produit Pp, qui exprime, en quelque sorte, l'énergie avec laquelle le poids P s'oppose à la rotation autour de AB, est appelé, pour cette raison, *moment de stabilité* par rapport à AB.

II. Soient EA le côté du polygone d'appui, le plus voisin de la projection horizontale O, et Pp^{iv} le moment de stabilité relatif à ce côté. Si ce *moment minimum* surpasse Fh, la force F ne peut faire tourner le corps autour d'aucun des côtés du polygone d'appui, et *la stabilité est assurée.*

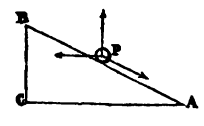


III. Plus généralement, si le corps P a une base curviligne ABC, et si TT' est la tangente la plus voisine du point O, projection horizontale du centre de gravité de P, la relation (1), appliquée à TT', suffit pour que la stabilité soit assurée.

IV. *Toutes choses égales d'ailleurs, la stabilité est la plus grande possible, quand le moment minimum est maximum.*

EXERCICES.

I. Un poids P est maintenu en équilibre sur un plan incliné BA,



par trois forces égales à $\frac{P}{3}$, et parallèles, respectivement, à BA, AC, CB. Quelle est l'inclinaison i du plan?

Réponse: $i = \text{arc tang}\,\frac{4}{3}$.

II. Deux poids P, P' s'appuient sur deux plans inclinés et dépolis AC, AC'. Ces deux poids sont réunis par un fil sans pesanteur POP', qui s'enroule sur une poulie O, située au-dessus de l'arête commune A. Quelle est la figure du fil, lorsque le poids P commence à descendre le long du plan incliné AC?

[illegible]
$$z = \tang \frac{1}{2}\theta.$$

[illegible] très-simple donne enfin les formules suivantes :

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{2} [illegible] z^{-1-k}, \quad x' = cz^{-k}, \quad y' = \frac{1}{2} c(1 - z^2) z^{-1-k},$$

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{2 g \sin [illegible]} \left(\frac{z^{1-2k}}{1 - 2k} - \frac{z^{-1-2k}}{1 + 2k} \right) + \text{const.},$$

$$[illegible] = - \frac{[illegible]}{4 g \sin [illegible]} \left(\frac{z^{2-2k}}{2 + 2k} + \frac{z^{-2-2k}}{2 - 2k} \right) + \text{const.},$$

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{4 g \sin [illegible]} \left(\frac{z^{2-2k}}{2 - 2k} - \frac{1}{k} z^{-2k} - \frac{z^{-2-2k}}{2 + 2k} \right) + \text{const.},$$

[illegible] complètement le problème (*).

[illegible] elliptique est soutenue, en trois points [illegible], par des pieds verticaux, sans pesan- [illegible] sont égales, et dont les extrémités infé- [illegible] plan horizontal. Comment doit-on disposer [illegible] stabilité de la table soit la plus grande [illegible] que le moment minimum de stabilité [illegible] (339, IV) ?

[illegible] ABC doit être circonscrit à une cir- [illegible] avec l'ellipse ; 2° a et b étant les demi- [illegible] de la circonférence égale $\frac{ab}{a+b}$.

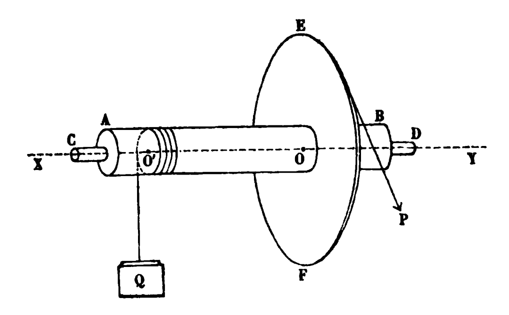
(*) [illegible] quelques restrictions, analogues à celle [illegible]

CHAPITRE XX.

ÉQUILIBRE ET TRAVAIL DES FORCES APPLIQUÉES AU TREUIL OU A LA POULIE.

Du treuil.

340. Le *treuil* ou *tour* est, en général, un corps solide tournant autour d'un axe fixe. Il se compose, ordinairement : 1° d'un cylindre horizontal AB (*), en bois ou en fonte, terminé par



deux petits cylindres AC, BD, appelés *tourillons*, reposant sur des *coussinets* ; 2° d'une *roue* EF, perpendiculaire à l'axe XY, et dont la circonférence porte des échelons sur lesquels montent les ouvriers, qui agissent seulement par leur poids (**). La résistance Q est appliquée à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur le cylindre.

341. Si l'on fait abstraction du frottement, et si l'on suppose la puissance P appliquée tangentiellement à la roue, il faudra, pour l'équilibre ou pour le mouvement uniforme du treuil, que *la somme des moments des forces* P, Q, *par rapport à l'axe* XY, *soit égale à*

(*) Un treuil dont l'axe est vertical prend le nom de *cabestan*.

(**) Cette disposition est adoptée dans le *treuil des carriers*.

zéro (280) (*). Cette condition unique se décompose dans les deux suivantes :

1°. *La puissance et la résistance doivent tendre à faire tourner la machine en sens contraires;* 2° *la puissance est à la résistance, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.* En effet, r et R étant ces deux rayons, on doit avoir

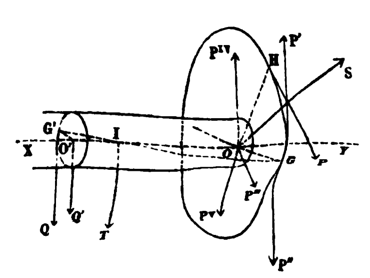
$$PR = Qr, \quad (1)$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}. \quad (2)$$

342. *Équation du travail.* — Si la machine tourne d'un petit angle ω autour de l'axe, les points d'application de la puissance et de la résistance décrivent des arcs semblables, représentés par $R\omega$, $r\omega$; en sorte que les *travaux élémentaires* de ces deux forces ont pour valeurs $P.R\omega$ et $Q.r\omega$. Donc, d'après l'équation (1), *le travail moteur est égal au travail résistant;* ce qui devait être (277).

343. *Pressions exercées sur l'axe.* — Ces pressions sont produites par le poids du treuil, composé avec les forces données P, Q. On peut démontrer, de la manière suivante, que *ces deux dernières forces agissent comme si elles étaient transportées, parallèlement à elles-mêmes, aux centres* O, O′ *des circonférences sur lesquelles sont situés leurs points d'application.*



Par le centre *O* de la roue, menons le rayon *OG*, parallèle au rayon *horizontal* O′G′; puis appliquons au *point* G deux forces verticales P′, P″, dirigées en sens contraires, et *égales à la puissance* P : l'état du système ne sera pas changé.

Or, les deux forces égales P, P′, appliquées en H, G, tangentiel-

(*) *Le seul mouvement possible* étant une rotation autour de *XY*, *les six équations de l'équilibre se réduisent à une.* On va voir que l'*équation du travail* (277) conduit au même résultat.

lement à la roue, se composent en une force S, dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les directions de P, P' : on peut donc supposer cette résultante S appliquée au centre O de la roue, et on peut ensuite la décomposer en deux nouvelles forces P''', P^{IV}, respectivement égales et parallèles à P, P'.

D'un autre côté, si l'on mène la droite GG', qui rencontre l'axe OO' en un point I, les deux triangles rectangles GOI, G'O'I donneront

$$\frac{\text{GO}}{\text{G'O'}} = \frac{\text{GI}}{\text{G'I}} = \frac{\text{IO}}{\text{IO'}}.$$

Mais (226)

$$\frac{\text{GO}}{\text{G'O'}} = \frac{\text{Q}}{\text{P}} = \frac{\text{Q}}{\text{P''}};$$

donc

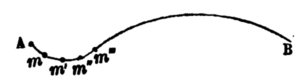
$$\frac{\text{Q}}{\text{P''}} = \frac{\text{GI}}{\text{G'I}} = \frac{\text{IO}}{\text{IO'}}.$$

Ces deux égalités de rapports prouvent : 1° que la résultante T des forces parallèles P'', Q est appliquée en I; 2° que ces deux forces peuvent être remplacées par deux nouvelles forces verticales P^{V}, Q', respectivement égales aux premières, et appliquées en O, O'.

Les forces P^{IV}, P^{V}, égales et directement opposées, se détruisent; et il ne reste plus que les forces P''', Q', appliquées en O, O' et égales, respectivement, à la puissance P et à la résistance Q.

Équilibre d'un cordon (*).

344. Les *cordons* ou cordes qui entrent dans la composition de certaines machines sont regardés comme des *tiges flexibles, inextensibles et sans pesanteur.* Un cordon AB, quelle qu'en soit la orme, doit donc être considéré comme une chaîne formée d'éléments *rectilignes* et *rigides,* A*m*, *mm'*, *m'm''*,..., mobiles autour de leurs extrémités communes.

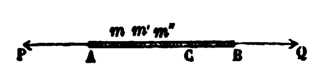


345. *Équilibre d'un cordon rectiligne.* — De la définition pré-

(*) Les notions contenues dans ce paragraphe nous semblent nécessaires pour établir, d'une manière satisfaisante, les conditions d'équiibre de la poulie.

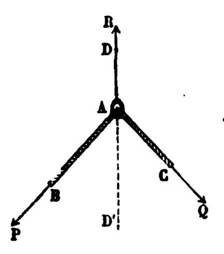
cédente, jointe au principe général de la page 220, résulte immédiatement cette proposition :

Quand un cordon rectiligne AB *est sollicité, à ses extrémités, par deux forces* P, Q *directement opposées, il faut et il suffit, pour l'équilibre, que ces deux forces soient égales.*



346. *Tension d'un cordon.* — L'action d'une force P, appliquée à l'extrémité A d'un cordon rectiligne AB, et agissant dans la direction du cordon, se transmet donc en chacun de ses points C comme si la droite AB était rigide; et, si l'on vient à enlever la partie CA du cordon, on devra, pour maintenir en équilibre la partie CB, appliquer en C, dans la direction CA, une force T égale à P. Cette force T est ce qu'on appelle la *tension* du cordon.

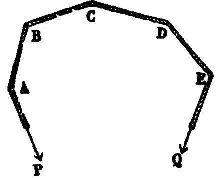
347. *Équilibre d'un cordon passant dans un anneau.* — Si le cordon BAC, auquel sont appliquées des forces P, Q, traverse un anneau mobile A sollicité par une force R, *il faut, pour l'équilibre :* 1° que le prolongement de la direction DA divise, en deux parties égales, l'angle BAC; 2° *que les deux forces* P, Q *soient égales.*



En effet, l'équilibre ne sera pas troublé si l'on fixe deux points B, C du cordon. L'anneau A, auquel est appliquée la force R, se mouvra donc sur un ellipsoïde de révolution dont la section méridienne a pour foyers les points B, C : pour l'équilibre, la force R doit être normale à cette surface; ce qui donne les conditions

$$BAD' = CAD', \quad P = Q.$$

348. *Remarque.* — Si l'anneau A est fixe, il faut encore, pour l'équilibre, que les forces P, Q soient égales entre elles.



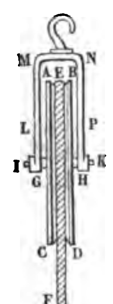
En effet, si P = Q, l'équilibre a lieu; donc il sera détruit si l'on augmente l'une des deux forces.

349. *Équilibre d'un cordon passant sur un polygone* ABC.... — En consi-

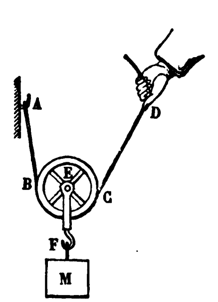
dérant successivement chacun des sommets du polygone, on trouve encore que *les forces* P, Q, *appliquées aux extrémités du cordon, doivent être égales.*

De la poulie.

350. On appelle *poulie* un cylindre ABCD, de hauteur AB très-petite, mobile autour d'un axe, et dont la surface latérale est creusée en gorge, de manière à recevoir une corde EF. Le plus souvent, l'axe solide GH, qui traverse la poulie, pénètre, au moyen de deux tourillons GI, HK, dans une *chape* ou monture LMNP; quelquefois aussi les tourillons reposent sur des *coussinets*. Enfin, l'axe GH peut faire *corps* avec la poulie, ou en être indépendant.



351. La poulie est dite *fixe* lorsque la chape est établie à demeure ou accrochée à un anneau scellé dans un mur. Dans la poulie *mobile*, l'un des deux *brins* AB de la corde est fixé en un point A: avec la main, on soulève l'autre brin CD. La chape EF, au lieu de supporter l'axe, est accrochée au fardeau M.

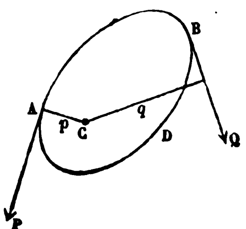


352. *Équilibre de la poulie fixe.* — On peut démontrer, très-simplement, les deux propositions suivantes : 1° *les forces* P, Q, *appliquées aux extrémités de la corde* AB, *doivent être égales*, 2° *la poulie doit être circulaire.*

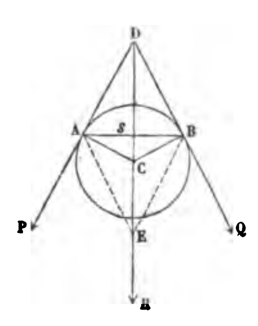
1°. Si l'équilibre a lieu, il ne sera pas troublé quand on rendra la poulie immobile, mais alors $P = Q$ (347).

2°. L'équilibre, s'il existe, ne sera pas troublé si la partie AB de la corde fait corps avec la poulie. La machine ne différant plus

d'un levier sollicité par des forces égales, les distances p, q doivent être égales entre elles. D'après les usages auxquels la poulie est destinée, cette relation doit avoir lieu quelle que soit la position de la courbe ABD; donc cette courbe est une circonférence ayant pour centre le point C.



353. *Pression exercée sur l'axe.* — Les forces égales P, Q, que l'on peut supposer représentées par les deux tangentes *égales* AD, BD, ont pour résultante une force R, dirigée suivant DC, et représentée elle-même par la diagonale DE du losange DAEB. Cette résultante est, abstraction faite du poids de la poulie, *la pression exercée sur l'axe.*



Pour évaluer R, menons les rayons AC, BC et la droite AB, *sous-tendante de l'arc embrassé par la corde :* les deux triangles isocèles DAE, ACB seront semblables; donc

$$\frac{DE}{DA} = \frac{AB}{AC},$$

ou

$$\frac{R}{P} = \frac{s}{r}.$$

Ainsi, *la pression exercée sur l'axe est à l'une des forces égales appliquées à la poulie, comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie.*

354. *Cas où l'on a égard au frottement.* — Supposons que le tourillon OB′ fasse corps avec la poulie DE. Dans l'état de repos, le contact entre le tourillon et le coussinet ABC a lieu en B. Mais si la poulie tourne uniformément, dans le sens marqué par la flèche f, le tourillon frotte sur le coussinet, et le point de contact

vient occuper une position B′, déterminée par la condition que la *réaction* R fasse équilibre aux forces P, Q. Admettons que ces deux forces soient verticales; alors

$$R = P + Q. \quad (1)$$

Si nous représentons par r le rayon de la poulie, par ρ le rayon du tourillon, et par φ *l'angle de frottement*, égal à OB′R, nous aurons, en égalant à zéro la somme des moments par rapport au point B′,

$$P(r - \rho \sin\varphi) = Q(r + \rho \sin\varphi),$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{r + \rho\sin\varphi}{r - \rho\sin\varphi}. \quad (2)$$

355. *Remarques.* — I. *Quand il y a frottement entre le tourillon et le coussinet, la puissance appliquée à la poulie doit être plus grande que la résistance.*

II. *Si l'angle de frottement est nul, la puissance devient égale à la résistance.*

III. D'après l'équation (2),

$$\frac{P}{Q} - 1 = 2\frac{\frac{\rho}{r}\sin\varphi}{1 - \frac{\rho}{r}\sin\varphi}; \quad (3)$$

donc, *pour qu'une poulie soit bonne :* 1° *le frottement du tourillon sur le coussinet doit être faible* (*); 2° *le tourillon doit avoir un rayon beaucoup plus petit que celui du coussinet* (**).

356. *Valeur du frottement.* — Le frottement F est la composante *tangentielle* de la réaction R (303). Or,

$$R = Q\frac{2r}{r - \rho\sin\varphi};$$

donc

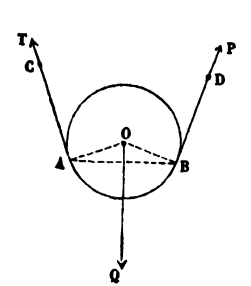
$$F = Q\frac{2r\sin\varphi}{r - \rho\sin\varphi}. \quad (4)$$

(*) Cette première condition était évidente à priori.

(**) Cependant, comme la machine doit présenter une résistance suffisante, le premier rayon ne doit pas être trop petit.

La fraction contenue dans le second membre diminue avec φ et avec le rapport $\frac{\rho}{r}$: nous retrouvons donc, d'une autre manière, les deux conditions obtenues tout à l'heure.

357. *Equilibre de la poulie mobile.* — On peut faire abstraction du point fixe C, si l'on suppose le cordon CA sollicité par une force T, directement opposée à CA. Cela posé, dans l'état d'équilibre de la poulie : 1° *la tension* T *doit être égale à la puissance* P; 2° la résistance Q est égale à la résultante des deux forces égales T, P.

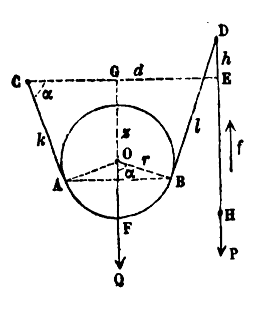


De cette seconde condition, on déduit (353) la relation suivante :

La puissance est à la résistance, comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante s de l'arc embrassé par la corde.

358. *Remarque.* — *Quand les deux cordons* AC, BD *sont parallèles, la puissance est la moitié de la résistance.*

359. *Travail des forces dans la poulie mobile.* — Afin de vérifier si, dans l'état d'équilibre, le travail de la puissance P est, *sensiblement*, égal au travail de la résistance, nous supposerons que la corde CAFBDE, dont l'extrémité C est fixe, passe dans un anneau placé en D.



Ceci admis, menons l'horizontale CE, et posons :

$$CE = d, \quad AO = r,$$
$$DE = h, \quad AOB = 2\alpha,$$
$$CA = k, \quad GO = z,$$
$$BD = l, \quad CA + AFB + BD = L.$$

Si le centre O de la poulie descend d'une petite quantité, représentée par Δz, *le point d'application* H *de la puissance* P *s'élèvera d'une quantité égale à l'allongement* ΔL *du cordon* CAFBD. L'équation du travail est donc (277)

$$Q\Delta z - P\Delta L = 0,$$

ou, à cause de $$Q = 2P\sin\alpha,$$

$$2\sin\alpha\Delta z - \Delta L = 0. \quad (1)$$

L'inspection de la figure donne, immédiatement,

$$k + l + 2r\alpha = L, \quad (2) \qquad (k+l)\cos\alpha + 2r\sin\alpha = d, \quad (3)$$

$$z = k\sin\alpha - r\cos\alpha = l\sin\alpha - h - r\cos\alpha. \quad (4)$$

Par conséquent,

$$z = -\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}d\,\text{tang}\,\alpha - \frac{r}{\cos\alpha}, \quad (5)$$

$$L = \frac{d}{\cos\alpha} - 2r\,\text{tang}\,\alpha + 2r\alpha; \quad (6)$$

puis

$$\Delta z = \left(\frac{1}{2}d\frac{1}{\cos^2\alpha} - r\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\Delta\alpha,$$

$$\Delta L = \left(\frac{d\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - 2r\,\text{tang}^2\alpha\right)\Delta\alpha \; (*).$$

Ces dernières valeurs, substituées dans l'équation (1), la rendent identique; donc *le travail moteur est égal au travail résistant.*

Des moufles.

360. Une *moufle* est un système de poulies assemblées dans une même chape, et montées, soit sur des axes séparés, comme le montre la figure ci-après, soit sur un même axe. Ordinairement, on emploie en même temps une moufle *fixe ab* et une moufle *mobile cd.* Une corde, dont l'extrémité A est sollicitée par une puissance P, embrasse successivement, par la moitié, les poulies BC, DE, FG,..., MN, et vient s'attacher en P, à la partie inférieure de la chape fixe *ab*. La résistance Q est appliquée à la chape mobile.

361. *Condition d'équilibre.* — En exprimant que *la résistance* R *fait équilibre aux tensions des cordons* DC, EF, HG, IK, ML, NP,

---

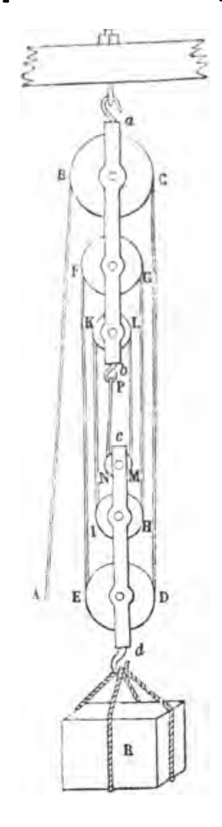
(*) D'après la théorie des dérivées, l'équation $y = f(x)$ donne

$$\Delta y = [f'(x) + \varepsilon]\,\Delta x,$$

ε ayant pour limite *zéro*. Donc, *quand on se borne aux quantités du premier ordre*, on doit supposer $\Delta y = f'(x).\Delta x$.

ou *en égalant le travail moteur au travail résistant,* on arrive à la proposition suivante :

La résistance Q *est égale à la puissance* P, *multipliée par le nombre des cordons qui soutiennent la moufle mobile.*

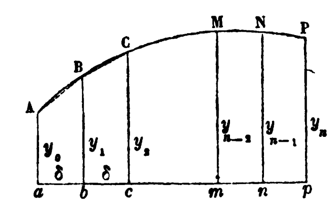


APPENDICE.

FORMULES APPROXIMATIVES DE QUADRATURE.

On a vu, à la page 194, que la détermination du travail total d'une force peut être ramenée à la recherche de l'aire d'une courbe dont on connaît un certain nombre d'ordonnées. Nous allons indiquer les formules qui permettent d'effectuer ces *quadratures approchées*.

1. *Méthode des trapèzes.* — AP*pa* étant l'aire qu'il s'agit d'évaluer, soient $y_0, y_1, \ldots, y_n$ les ordonnées des points A, B,..., P, ordonnées que l'on suppose *équidistantes*. Si l'intervalle δ est assez petit, on pourra, sans grande erreur, supposer que les arcs AB, BC,..., NP, sont confondus avec leurs cordes. On aura donc, à peu près, en appelant A l'aire cherchée,



$$A = \frac{1}{2}\delta(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}\delta(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{1}{2}\delta(y_{n-1} + y_n);$$

ou
$$A = \delta\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right);$$

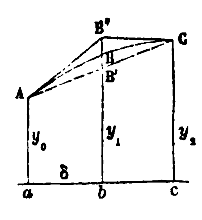
ou encore, en représentant par S la somme de toutes les ordonnées,

$$A = \delta\left(S - \frac{y_0 + y_n}{2}\right). \quad (1)$$

Ainsi, *l'aire* A *a pour valeur approchée le produit de la distance comprise entre deux ordonnées consécutives, par la somme de toutes les ordonnées, diminuée de la demi-somme des ordonnées extrêmes.*

2. *Méthode de Thomas Simpson.* — Au lieu de remplacer les arcs AB, BC,... par leurs cordes, comme dans la méthode précédente, le géomètre anglais Thomas Simpson substitue, à la courbe ABC... MNP, des paraboles du second degré,

par les extrémités de trois ordonnées consécutives, et dont les axes sont parallèles à ces ordonnées. Ce procédé exige évidemment que le nombre n des divisions de la base ab soit *pair.*



Considérons, pour fixer les idées, l'arc de parabole passant par les extrémités A, B, C des trois premières ordonnées. Menons la corde AB'C. Prenons BB'' = BB', et menons B''A, B''C : ces deux droites seront tangentes à la parabole (*D. D.*, 341). D'un autre côté, le *segment parabolique* ABCB' *est les deux tiers du triangle* AB''C (*D. D.*, 345). Par conséquent,

$$\text{ABC}ca = (y_0 + y_2)\delta + \frac{2}{3}\text{B}'\text{B}''.\delta$$

$$= \left[(y_0 + y_2) + \frac{4}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)\right]\delta;$$

ou

$$\text{ABC}ca = \frac{1}{3}\delta(y_0 + y_2 + 4y_1).$$

En appelant encore A l'aire cherchée, nous aurons donc

$$A = \frac{1}{3}\delta(y_0 + y_2 + 4y_1 + y_2 + y_4 + 4y_3 + \ldots + y_{n-2} + y_n + 4y_{n-1}),$$

ou, en désignant par S_p la somme des ordonnées à *indice pair,* et par S_i la somme des ordonnées à *indice impair,*

$$A = \frac{1}{3}\delta[2S_p + 4S_i - (y_0 + y_n)]. \quad (2)$$

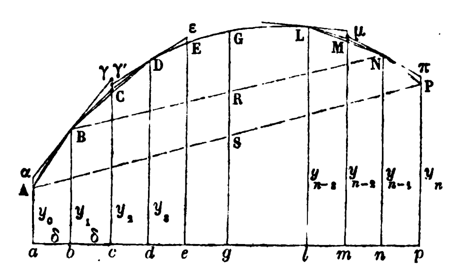
L'aire A *a pour valeur approchée le tiers du produit de la distance comprise entre deux ordonnées consécutives, par deux fois la somme des ordonnées à indice pair, plus quatre fois la somme des ordonnées à indice impair, moins la somme des ordonnées extrêmes* (*).

3. *Remarque.* — La formule de Simpson, appliquée à la para-

(*) Par des considérations particulières, *M. Saigey* est arrivé à une règle qui rentre dans celle de Simpson. (*Géométrie élémentaire*, par MM. Vincent et Saigey, page 243.)

bole du troisième degré (*), donne un résultat *exact*, même quand le nombre des valeurs de l'ordonnée se réduit à *trois* (**).

4. *Méthode de M. Poncelet.* — En supposant encore la base ab partagée en un nombre *pair* de parties égales, on mène les cordes AB, BD, ..., LN, NP, puis les tangentes aux sommets B, D, ..., L, N; et l'on prolonge chacune de ces dernières droites jusqu'aux ordonnées voisines du sommet correspondant. On obtient ainsi un polygone ABD, ..., LNPpa *inscrit* à la courbe, et un autre polygone $\alpha\alpha\gamma\gamma'\varepsilon, \ldots, \mu\pi p$, qu'on peut regarder comme y étant *circonscrit* (***).



Cela posé, en appelant A' et A'' les aires de ces deux polygones, on a, par un calcul analogue à ceux qui précèdent,

$$A' = \delta\left(2S_i + \frac{y_0 + y_n}{2} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{2}\right), \quad A'' = 2\delta S_i.$$

L'aire cherchée A, étant comprise entre A' et A'', doit différer assez peu de la moyenne entre ces deux quantités; donc

$$A = \delta\left(2S_i + \frac{y_0 + y_n}{4} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{4}\right). \quad (3)$$

Telle est la formule de *M. Poncelet*.

(*) Représentée par

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 312.

(***) On suppose, pour plus de simplicité, que la courbe donnée n'a aucun point d'inflexion, et qu'elle tourne sa concavité vers la base ab. Tous les autres cas peuvent être ramenés à celui-là.

5. *Remarque.* — En vertu des hypothèses précédentes, la *limite de l'erreur* ε, à laquelle donne lieu l'application de cette formule, est $A'' - A'$; donc

$$\varepsilon < \delta\left(\frac{y_0 + y_n}{2} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{2}\right).$$

Soit gG l'ordonnée passant par le milieu de ab; alors, en menant les cordes AP, BN, on a

$$gS = \frac{1}{2}(y_0 + y_n), \quad gR = \frac{1}{2}(y_1 + y_{n-1});$$

donc $$\varepsilon < \delta . RS.$$

6. *Méthode de M. Piobert.* — En discutant les principales formules de quadrature, et en particulier celle de M. Poncelet, *M. Parmentier,* capitaine du Génie, a été conduit, par une méthode que nous ne pouvons reproduire ici, à cette conclusion remarquable : *la différence* $A'' - A$ *est, à fort peu près, la moitié de la différence* $A - A'$. Par conséquent,

$$A = \frac{A' + 2A''}{3},$$

ou $$A = \delta\left(2S_i + \frac{y_0 + y_n}{6} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{6}\right). \quad (4)$$

Cette nouvelle formule, à laquelle M. Piobert était arrivé de son côté, n'est pas plus compliquée que celle de M. Poncelet; et, comme elle est beaucoup plus approchée, elle doit toujours lui être préférée (*).

7. *Autre méthode.* — En modifiant la méthode de Simpson, on arrive aisément (**) à la formule suivante :

$$A = \delta\left[S - \frac{5}{8}(y_0 + y_n) + \frac{1}{6}(y_1 + y_{n-1}) - \frac{1}{24}(y_2 + y_{n-2})\right].$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* tome XIV, page 381.

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* tome X, page 412.

FIN DU SECOND VOLUME.

